数理解析研究所講究録
1176巻 2000年 26-30

影の領域における弾性波

(Elastic waves in shadow)

森岡 達史　　阪大 理

(Tatsushi MORIOKA　　Osaka University)

ある種の物体に力を加えると変形するが、力を加えるのをやめるともとにもどる。このような性質を弾性という。弾性をもつ物体を弾性体とよぶ。弾性波とは、弾性体を伝わる波のことをいう。波の媒質のもとの状態からのずれを変位とよぶ。変位と進行方向とが互いに平行な波を縦波といい、垂直な波を横波という。弾性体が等方性をもつ場合、そこを伝わる弾性波は一般に縦波と横波の重合わせになっている。

縦波と横波について、それぞれの進行方向に対する変位の自由度を考えてみる。縦波の変位は進行方向に対して一意的に定まるので、変位の自由度は無いといえる。一方、横波の変位は進行方向に対して2次元の自由度を持っている。そこで、横波については、偏りが問題になる。ここで、波が偏りをもつとは、その変位が特定方向に集中していることをいう。

一般に波が障害物に当たると反射が起こる。弾性波の場合、入射波が縦波または横波のみであっても、一般には反射波として縦波と横波の両方が現れる。このように、波の種類が変わる現象を Mode の変換とよぶ。波が障害物の後ろ側に回りこむ現象を回折という。等方性弾性体を伝わる弾性波の場合、凸な障害物に対してある角度から横波が斜めに入射すると、Mode の変換により縦波が障害物に接する方向に現れて回折が起こる。このとき、障害物の境界を伝わる縦波にMode の変換が起こって、障害物の境界から弾性体の内部に向かって伝播する横波が現れる。障害物の境界を伝わる弾性波を単に表面波とよぶことにする。今の場合、回折により現われた表面波は、縦波と横波の重合わせになっている。この現象において、障害物に入射する横波が偏っていると仮定する。このとき、結論として、回折により現れる表面波が偏っていること、その偏りの方向は、入射波の偏りの方向に依存して定まることがわかった。

以下、問題の定式化について述べる。 等方性弾性体を伝わる弾性波の運動は、3×3 双曲型偏微分方程式系 $Lu = 0$ により記述される。ここで、

$$L = \partial_t^2 - A(\partial_x) \quad \text{in} \quad \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3 ,$$
$$A(\partial_x) = \mu\triangle + (\lambda+\mu)\text{grad div} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}_x^3 ,$$
$\lambda, \ \mu$ ： 正の定数。

弾性体を伝わる縦波、横波はそれぞれ P 波、S 波とよばれる。 $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3$ における 2 つの scalar 値偏微分作用素 $\Box_n$, $n = 1, 2$ を $\Box_n = \partial_t^2 - c_n^2\triangle$ により定義する。ここで、 $c_1 = (\lambda+2\mu)^{1/2}$, $c_2 = \mu^{1/2}$ である。 P 波、S 波はそれぞれ $Lu_P = \Box_1 u_P = 0$, $Lu_S = \Box_2 u_S = 0$ をみたす vectre 値関数 u_P , u_S として定式化される。 これらの等式は、P 波、S 波の伝播速度がそれぞれ c_1, c_2 であることを表している。

本講演において考察する現象を定式化する方程式は次のようになる。

$$(1) \qquad \begin{cases} Lu = 0 & \text{in} \ \mathbf{R}\times\Omega \\ u\,|_{\mathbf{R}\times\partial\Omega} = g \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbf{R}_x^3$ ： 外部領域。

ここで Ω は弾性体を表わす。 Ωについては次を仮定する。
(H.1) $\partial\Omega$ は解析的である。
(H.2) $\mathbf{R}^3\backslash\Omega$ は strictly convexである。

表面波の伝播を記述するために、いくつかの記号を準備する。

<u>記号</u>.
$N = \mathbf{R}\times\partial\Omega$, $\triangle_{\partial\Omega}$: $\partial\Omega$ 上のLaplacian。
$\sigma(\triangle_{\partial\Omega})$: $\triangle_{\partial\Omega}$ の主表象。
$q_n \in C^\infty(T^*N, \mathbf{R})$: $q_n(\tau,\beta) = -\tau^2 - c_n^2\sigma(\triangle_{\partial\Omega})(\beta)$, $n = 1, 2$,
$\tau \in \mathbf{R}$, $\beta \in T^*(\partial\Omega)$ により定義される関数。
π : T^*N からN への射影。
$\rho \in T^*N\backslash 0$: $q_1(\rho) = 0$, $\pi(\rho) = (0, z)$, $z \in \partial\Omega$ を満たす固定された点。
γ : $\gamma(s) = \exp sH_{q_1}(\rho)$ により定義されるT^*N 内の曲線（零陪特性帯）。
$\partial/\partial n$: $\partial\Omega$ の法線方向に沿った微分。
m : $1 \leqq m < 3$を満たす固定された実数。
$WF_A(*)$: 解析的波面集合。
$WF_G^k(*)$: Gevrey k 級波面集合。

定理 1．*(H.1)* と *(H.2)* が成り立つと仮定する。 $0 < s_0 < s_1$ ， s_1 は十分小、$\omega \subset T^*N\backslash 0$ ， $\rho \in \omega$ ， ω は十分小、 $\omega \cap \gamma([s_0\,,\,s_1]) = \phi$， $WF_A(g) \subset \omega$， u は *(1)* の *outgoing* 解とする。 このとき、次の *(i)* , *(ii)* が成り立つ。

(i) $\gamma([s_0\,,\,s_1]) \cap WF_G^3((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$.

(ii) $\gamma([s_0\,,\,s_1]) \cap WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N) = \phi$ または
$\gamma([s_0\,,\,s_1]) \subset WF_G^m((\partial u/\partial n)\,|_N)$ が成り立つ。

さらに、unilateral 作用素を用いて表面波の偏りを定式化することにより結論が得られる。

表面波の伝播の記述について、要点をまとめておく。 $q_n \in C^\infty(T^*N\,,\,\mathbf{R})$ の符号に応じて、 $T^*N\backslash 0$ は次のように分割される。

定義 2．$T^*N\backslash 0$ において、 $\{q_1 < 0\}$， $\{q_1 = 0\}$， $\{q_1 > 0\}$ により定まる集合をそれぞれ$P-$双曲型領域、 $P-$*Glancing* 領域、$P-$楕円型領域とよぶ。また、$\{q_2 < 0\}$， $\{q_2 = 0\}$， $\{q_2 > 0\}$ により定まる集合をそれぞれ$S-$双曲型領域、$S-$*Glancing* 領域、$S-$楕円型領域とよぶ。

定義により $T^*N\backslash 0 = \{P-$ 双曲型領域$\} \cup \{P-$ Glancing 領域$\} \cup \{P-$ 楕円型領域$\} = \{S-$ 双曲型領域$\} \cup \{S-$ Glancing 領域$\} \cup \{S-$ 楕円型領域$\}$ が成り立つ。これらは、それぞれが disjoint union になっている。 表面波の伝播を、$P-$Glancing 領域における (1) の outgoing 解の Gevrey 級特異性伝播として記述したのが定理 1 - (ii) である。 また、定理 1 - (i) は、(1) の outgoing 解は$P-$Glancing 領域において 常に Gevrey 3 級の滑らかさを持っていることを示している。 これは、現象としては、入射波の Energy の大部分は障害物の境界から 弾性体の内部に向かって去ってしまう事実に対応している。 定義 2 において、P波及び S波に応じて $T^*N\backslash 0$ を それぞれ 3 つの集合に分割したが、ここで $\{P-$ Glancing 領域$\} \subset \{S-$ 双曲型領域$\}$ が 成り立っていることが重要である。このことから、S波の古典軌道は $T^*(\mathbf{R} \times \Omega)\backslash 0$ から $P-$Glancing 領域に入れること、また、 $P-$Glancing 領域から $T^*(\mathbf{R} \times \Omega)\backslash 0$ に向かって S波の古典軌道が現れることがわかる。 このことは、現象としては、S波がある角度から斜めに入射すると P波の回折が起こること、及びP波の回折によりMode の変換が起こ って、障害物の境界から弾性体の内部に向かって伝播するS波が現れることに対応している。

実際、$P-$Glancing 領域において (1) の 漸近解を構成するときに、P波及び S波に応じて 相関数が2つ 必要になる（川下 [9]、 Stefanov - Vodev [24], 森岡 [19]）。 波動方程式に対して定理1が成り立つことは Lebeau [16] によって 証明された。 定理1は、弾性方程式の Dirichlet 問題を波動方程式の Dirichlet 問題に 帰着するStefanov - Vodev [24] の手法とLebeau [16] を組み合わせること により証明される（森岡 [19])。

波の偏りについては、Dencker [3] において擬微分作用素による定式化がなされた。 今回考察している表面波については、 擬微分作用素を unilateral 作用素 (Lebeau [16, §4]) に置きかえたうえで、[3] に従って定式化を行う。

References

1. C. Bardos - G. Lebeau - J. Rauch, *Scattering frequence and Gevrey 3 singularities*, Invent. Math. **90** (1987), 77–114.
2. C. Bardos - T. Masrour - F. Tatout, *Observation and control of elastic waves*, (J. Rauch - M. Taylor eds.) Singularities and Oscillation, IMA volumes in Math. and its Appl. **91** (1997), 1–16.
3. N. Dencker, *On the propagation of polarization sets for systems of real principal type*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 351–372.
4. G. Eskin, *General initial boundary problems for second order hyperbolic equations*, D. Reidel. Co. Dordrecht, London (1981), 19–54.
5. F.G. Friedlander - R. B. Melrose, *The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays.* II, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **81** (1977), 97–120.
6. C. Gérard, *Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de système d'équations aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sci. Paris **297** (1983), 409–412.
7. L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* I-IV, Springer.
8. M. Iwashita - Y. Shibata, *On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems*, Glasnik Mate. **23** (1988), 291-313.
9. M. Kawashita, Master thesis (1988).
10. O. Lafitte, *The kernel of the Neumann operator for a strictly diffractive analytic problem*, Comm. P.D.E. **20** (1995), 419–483.

11. O. Lafitte, *Second term of the asymptotic expansion of the diffracted wave in the shadow*, Asymptotic Analysis **13** (1996), 329–359.
12. O. Lafitte, *Diffraction for a Neumann boundary condition*, Comm. P.D.E. **22** (1997), 319–359.
13. B. Lascar - R. Lascar, *Propagation des singularités Gevrey pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **16** (1991), 547–584.
14. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation à croissance*, Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz (1982–1983).
15. G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **35** (1985), 145–216.
16. G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. P.D.E. **9** (1984), 1437–1494.
17. G. Lebeau, *Propagation de singularité Gevrey pour le problème de Dirichlet*, Advanced in microlocal analysis, NATO A.S.I. published by Reidel (Garnir ed.) (1986), 203–223.
18. R.B. Melrose, *Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems*, Duke. Math. J. **42** (1975), 605–635.
19. T. Morioka, *Régularité des ondes élastiques dans la région Glancing des ondes P*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **35, No. 4**, 599–619.
20. Y. Okada, *Second microlocal singularities of tempered and Gevrey classes*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. **39** (1992), 475–505.
21. M. Sato - K. Kashiwara - T. Kawai, *Hyperfunctions and pseudo differential equations*, Lect. Notes Math. 287, Springer (1973).
22. J. Sjöstrand, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems*, Comm. P.D.E. **5** (1980), 41–94.
23. J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).
24. P. Stefanov - G. Vodev, *Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a strictly convex body*, Duke Math. J. **78** (1995), 677–714.
25. M.E. Taylor, *Grazing rays and reflection of singulaities of solution to wave equation*, Comm. Pure. Appl. Math. **29** (1976), 1–38.
26. K. Yamamoto, *Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations*, Japan J. Math. **14** (1988), 119–163.