

Index ratio sets for minimal equivalence
relations - subrelations

山形大学理学部数理科学科 佐野隆志 (Takashi Sano)
Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science, Yamagata University

本講演では, ショーンズの指数理論で展開された, ergodic equivalence relations - subrelations の分類結果の C*-環バージョンについて言及する: C. Sutherland と T. Hamachi により エルゴード的同値関係の組についてはよく分っている。(See [H].) そこで choice functions により定まる index cocycle から index ratio sets なる有限群の組を得て, それら群の作用で同値関係の標準的な分解を与えている。ここでは, minimal な equivalence relation - subrelation に対して ある種の index cocycle が与えられた時, 同様の議論が行えることについて述べる。

X をコンパクト距離空間とし, X 上離散群 G が作用しているとする。(X 上の同相写像の全体を $\text{Homeo}(X)$ とかける。 $G \subseteq \text{Homeo}(X)$.) G による同値関係

$\mathcal{R} = \mathcal{R}_G := \{ (gx, x) \mid x \in X, g \in G \}$
を考える。

G (or \mathcal{R}_G) が minimal であるとは, 以下の(同値

た) 条件(のどれか)を満たすとき, をいう:

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in X \text{ に対し } Gx (= \mathcal{R}(x) = \text{Orb}_G x) \underset{\text{dense}}{\subseteq} X.$$

$$\textcircled{2} \quad E (\subseteq X) \text{ closed, } gE = E (\forall g) \Rightarrow E = \emptyset \text{ or } X.$$

$$\textcircled{3} \quad \forall U (\neq \emptyset) \text{ open に対し, } X = \bigcup_{g \in G} gU.$$

よく知られた事実として G が "minimal" となるとき

$gY = Y (\forall g \in G), G|_Y$: minimal
なる 閉集合 $Y (\subseteq X)$ が存在する。

さて, $\mathcal{R} := \mathcal{R}_G \cong \mathcal{S}$ は minimal equivalence
relation-subrelation とし, 次の 2 つの設定を加える:

$$\textcircled{1} \quad X \ni x \mapsto \#\{ \mathcal{S}(y) \mid y \sim_{\mathcal{R}} x \} : \text{constant } (=: N)$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma : \mathcal{R} \ni (y, x) \mapsto \sigma(y, x) \in \mathbb{S}_N$$

homomorphism, X 上 continuous,

$$\mathcal{S} \cong \ker \sigma := \{ (y, x) \in \mathcal{R} \mid \sigma(y, x) = e \}$$

なる写像 σ が与えられる。

choice functions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ ($\varphi_1 = \text{id}$) が存在
するときは, $\sigma(y, x)(i) = j \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi_i(x) \sim_{\mathcal{S}} \varphi_j(y)$ と定義
すれば, $\textcircled{2}$ (連続性以外) は成立する。

$$[\mathcal{R}] := \{ \varphi \in \text{Homeo}(X) \mid \varphi x \in \mathcal{R}(x), \forall x \}$$

$$[\mathcal{R}]_* := \left\{ \varphi : \text{Dom } \varphi (\text{open}) \rightarrow \text{Im } \varphi \text{ homeo, } \varphi x \in \mathcal{R}(x) \forall x \in \text{Dom } \varphi \right\}$$

とし,

$$\varepsilon_0(\mathcal{S}) := \left\{ \theta \in \mathbb{S}_N \mid \begin{array}{l} \forall \mathcal{U} : \text{open} (\subseteq X) \\ \forall x_0, y_0 \in \mathcal{U} \\ \exists \varphi, \psi \in [\mathcal{S}]_* \quad \text{s.t.} \\ \text{Dom } \varphi (\ni x_0), \text{Im } \varphi \subseteq \mathcal{U} \\ \text{Dom } \psi (\ni y_0), \text{Im } \psi \subseteq \mathcal{U} \\ \& \\ \sigma(\varphi x, x) = \theta \quad \forall x \in \text{Dom } \varphi \\ \sigma(\psi y, y) = \theta^{-1} \quad \forall y \in \text{Dom } \psi \end{array} \right\}$$

とおけば", $\varepsilon_0(\mathcal{S})$ は群になる。また

$$\mathcal{Q} := \{ (y, x) \in \mathcal{S} \mid \sigma(y, x) \in \varepsilon_0(\mathcal{S}) \}$$

とおくと $\#\{\text{ker } \sigma\text{-minimal 成分}\} < +\infty$

であることが、 $\text{ker } \sigma\text{-minimal 成分} = \mathcal{Q}\text{-minimal 成分}$ であることから示される。これより $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\text{ker } \sigma\text{-minimal 成分}$ よりなる X の有限分割 ($\#\Lambda < \infty$) とする。

各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$\varepsilon_\lambda(\mathcal{S}) := \text{"上 } \varepsilon_0(\mathcal{S}) \text{ の定義で、 } \mathcal{U} \subseteq \underline{A_\lambda} \text{ に制限したものを"}$$

$$\varepsilon_\lambda(\mathcal{R}) := \text{"上 } \varepsilon_\lambda(\mathcal{S}) \text{ の定義で、 } \varphi, \psi \in [\mathcal{R}]_* \text{ と置き換えたものを"}$$

と定義すると,

$$r_\lambda(\mathcal{R}) \cong r_\lambda(\mathcal{S}) \quad \sim \quad r_{\lambda_0}(\mathcal{R}) \cong r_{\lambda_0}(\mathcal{S})$$

conjugate

!! !!

G H

となることも分る。

あとは、 G の free な作用 α_g を作り、 $\mathcal{P}(\subseteq \mathcal{S})$ という subrelation を定義して

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \times_{\alpha} G \cong \mathcal{S} = \mathcal{P} \times_{\alpha} H$$

と表せることなど、論文 [H] と同様に議論
 することができる。(説明を省いた記号・定義等
 については [H] を参照.)

Reference

[H] : T. Hamachi, Canonical subrelations of
 ergodic equivalence relations - Subrelations
 J. Operator Theory 43 (2000) 3-34.