数理解析研究所講究録
1182 巻 2001 年 1-8

D_{2p}-, $\mathfrak{A}_4$-, $\mathfrak{S}_4$-被覆の構成について

徳永浩雄
東京都立大学理学研究科

イントロダクション

本稿の目的は Galois 被覆の具体的構成法に関する最近の結果を報告することにある. 代数多様体の Galois 分岐被覆の構成問題を考えるにあたり, 次の問題は基本的である.

問題 Y は非特異射影多様体, B は Y 上の被約な因子とする. 有限群 G が与えられた時, G を Galois 群として持ち, B 上で分岐する Galois 分岐被覆が存在するか否かを決定し. もし存在する場合はそれを具体的に構成する方法をあたえよ.

筆者は論文 [1]. [2] において,

D_{2p}: 位数 $2p$ (p は奇素数) の正二面体群,

$\mathfrak{A}_4$: 四次交代群 (正四面体群),

$\mathfrak{S}_4$ 四次交代群 (正八面体群),

といった場合に上記の問題を扱った (正二十面体群も当然考えるべきなのであるが, いまのところ手も足もでない状況である). そこの手法は全て Galois 理論 (具体的には代数方程式の解の公式) を因子とその間の線形同値といった条件で書き下したものであり, 各場合に応じた ad-hoc な方法といった観が否めない. ここでは D_{2p} の一般化である位数 pq (q は素数, p は奇素数で $q < p$) の非可換群を含めてこれらをある意味で統一的に取り扱う試みを解説したい.

§1 Glaois 被覆に関する準備

Y は非特異射影多様体, X は正規代数多様体とする. Y への有限射 $\pi : X \to Y$ を被覆と呼ぶ. X の関数体 $\mathbf{C}(X)$ は Y のそれ, $\mathbf{C}(Y)$ の $\deg \pi$ の代数拡大となる. $\mathbf{C}(X)$ が $\mathbf{C}(Y)$ の Galois 拡大となるとき, X を Y の Galois 被覆と呼ぶ. $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}(Y)) = G$ の時は, 単に, G-被覆と呼ぶ. 以下 G-被覆について知られている事実, 及びこの稿を通して使う記号についてこの節でまとめておこう.

1. G-被覆 $\pi : X \to Y$ が与えられると, $\mathbf{C}(X)$ が $\mathbf{C}(Y)$ の G-拡大になっていることは定義から従うが, 逆に, $\mathbf{C}(Y)$ の G-拡大 K が与えられると Y の K-正規化 X

と正規化写像 $X \to Y$ は G-被覆を与える. さらに, 正規化の一意性から X は K の $\mathbf{C}(Y)$ 上の同型類のみから決まることに注意しよう.

2. $\pi : X \to Y$ が Y 上の被覆が与えられたとき,

$$\Delta_\pi = \{y \in Y | \pi \text{ は } y \text{ 上局所同型ではない}\}$$

とおくと, Δ_π は Y の余次元 1 の代数的集合である ([4]). この事実は Y が特異だと成り立たない. Δ_π を π の分岐集合という (Y が非特異であるときは分岐因子ということが多い). X, Y を強調したいときは Δ_π は $\Delta(X/Y)$ と表す.

3. G-被覆 $\pi : X \to Y$ の Galois 群 G は X の Y 上の自己同型群を与える. これから, $X \setminus \pi^{-1}(\Delta_\pi) \to Y \setminus \Delta_\pi$ は普通の不分岐 Galois 被覆である.

4. y は Δ_π の非特異点とする. $x \in \pi^{-1}(y)$ として, x, y の近傍で π は $(x_1, ..., x_n) \mapsto (y_1, ..., y_n)$ と表せるとき, π は y のまわりで, Δ_π に沿って, 分岐指数 e で分岐するという. $\Delta_\pi = B_1 + \cdots + B_r$ は既約分解とする. 各既約成分の非特異部分に沿っての分岐指数が e_i であるとき, π は $e_1 B_1 + \cdots + e_r B_r$ で分岐する G-被覆と呼ぶ.

§2 設定と問題

この節ではイントロダクションで述べた G-被覆を攻略するにあたって, まずどのような設定のもとで考えるかを解説する. G はイントロダクションで述べたような非可換有限群とする.

$\pi : X \to Y$ は G-被覆, H は G の正規部分群 $\overline{G} = G/H$ とおく. $\mathbf{C}(X)^H$ は H-不変体とする.

$$D(X/Y, H) := Y \text{ の } \mathbf{C}(X)^H\text{-正規化}$$

とすると, $D(X/Y, H)$ は $\overline{G}$-被覆であり, また, X は $D(X/Y, H)$ の H-被覆である. 各々の被覆写像を $\beta_1(\pi, H) : D(X/Y, H) \to Y$, $\beta_2(\pi, H) : X \to D(X/Y, H)$ とおく. 考えている π, H が明らかなときは単に β_i と表す. $\pi = \beta_1 \circ \beta_2$ である.

我々の G-被覆を $D(X/Y, H)$ を通して捉える. つまり, $\overline{G}$-被覆, $D(X/Y, H)$ をまず考え, その上に H-被覆をうまく構成して, 合成が G-被覆となるようにするにはどうすればよいかを考えるのである. このような戦略は二十面体群 ($\mathfrak{A}_5$) に対しては全く無力である. $\mathfrak{A}_5$-被覆を考える為には根本的に戦略を改めなければならない.

さて, $D(X/Y, H)$ は一般には特異点を持っている. 底空間が特異点を持っている場合は分岐集合が因子にならない等, 色々と不都合が生じる. 然し乍ら, $\dim Y = 2$ の場合はこの煩わしさを避けることができる.

以下, 次元は全て 2 とする.

$\mu : Z \to D(X/Y, H)$ は最小特異点除去とする. 最小特異点除去の一意性から, $\overline{G}$ は Z の Y 上の自己同型群となる. また, $\mathbf{C}(Z) \cong \mathbf{C}(D(X/Y, H))$ である. Z の $\mathbf{C}(X)$-正規化 $\tilde{X}$ は次の性質を満たす.

1. $\tilde{X}$ は Z の H-被覆,
2. $\tilde{X} \to Y$ の Stein 分解は X に一致する.

これを考慮すると, 次元が 2 のときは $D(X/Y, H)$ が特異であるか, 非特異であるかを余り気にすることなく, 次のように問題を定式化できる.

問題 2.1. 次元は全て 2 とする. $f' : Z' \to Y$ は $\overline{G}$-被覆とし, $\mu : Z \to Z'$ は最小特異点除去とする. $f = f' \circ \mu$ とおく. Z 上の H-被覆 $g : \tilde{X} \to Z$ を以下の 2 条件を満たすように構成出来る為の条件を求めよ.

1. $\mathbf{C}(\tilde{X})$ は $\mathbf{C}(Y)$ の G-拡大,
2. Y の $\mathbf{C}(\tilde{X})$-正規化 X は $D(X/Y, H) = Z'$ を満たす Y の G-被覆である.

次節では上記の問題を G がイントロダクションで述べた場合について扱う.

§3 構成法

記号は §2 で述べた通りで, 次元は常に 2 とする. 更に, Z に関して次の仮定をする.

仮定 3.1. Z の Néron-Severi 群, $\mathrm{NS}(Z)$ は torsion-free

仮定 3.1 の下. $\mathrm{NS}(Z)$ は交点形式に関して格子となる. $D_1, ..., D_r$ は Z 上の既約な曲線とし. T はこれらの曲線で生成された $\mathrm{NS}(Z)$ の部分群とする. T は次の条件を満たすと仮定する:

仮定 3.2. (i) T は階数 r の部分格子で, $D_1, ..., D_r$ はその基底をなす.
(ii) T は $\overline{G}$-不変

仮定 3.2 (ii) の下, $\mathrm{NS}(Z)/T$ には $\overline{G}$ が自然に作用する. 特に, $(\mathrm{NS}(Z)/T)_{tor}$ に $\overline{G}$ が作用することに注意しよう. これ以下, 次の状況のもとで考える:
$\overline{G}$ は $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ (q 素数) または $\mathfrak{S}_3$ とする.
$(\mathrm{NS}(Z)/T)_{tor}$ が $\overline{G}$-不変な位数 p の巡回群 H を含む時,

$$\rho : \overline{G} \to Aut(L)$$

が自然に定まり. これから, 半直積 $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \overline{G}$ が定まる.

まず, $\overline{G} = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ のときを考える. $\overline{G} = \langle\sigma\rangle$ とおく. ρ は単射となるから, $q|p-1$ である. 従って, $k^q \equiv 1 \bmod p$, $0 < k < p$ を満たす整数 k が存在する. $k^q = pu + 1$ とおく. H の生成元を与えるような $\mathrm{NS}(Z)$ の元を一つ選んで, それを L とおく. $pL \in T$ であるから,

$$pL \approx a_1 D_1 + \cdots + a_r D_r \qquad (*)$$

を表せる. a_i を $a_i - p[a_i/p]$ で, L を $L - \sum_i [a_i/p] D_i$ で置き換えて, $(*)$ の右辺の a_i ははじめから, $0 \le a_i < p$ を満たしているとしてよい. また, L が H の非自明な元を与えることから, a_i がすべて 0 になることはない. さらに, L を代数的に 0 に同値な元で調整して, $(*)$ が線形同値であるようにしておく. L が 2 つの effective な因子 D', D'' の差 $D' - D''$ で与えられることに注意すれば, $\mathbf{C}(Z)$ の元 φ を

$$(\varphi) = a_1 D_1 + \cdots + a_r D_r - p(D' - D'')$$

を満たすようにとることができる. ここでさらにつぎの仮定をする.

仮定 3.3. 因子

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{r} k^{i-1} a_j \left(\sigma^i\right)^* D_j$$

に対し, $\mathfrak{D} = pD'''$ を満たす D''' は存在しない. ただし, k は 上記の条件を満たすものとする.

これの仮定のもと, つぎの定理が成り立つ.

定理 3.4. $\overline{G} = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ とするとき, 以下の条件を満たす Z の H- 被覆 $g : \tilde{X} \to Z$ が存在する.

1. $f \circ g$ の Stein 分解 X は Y の G-被覆である.
2. $D(X/Y.H) = Z$。
3. $\Delta_g \subset \cup_{\sigma \in \overline{G}} (\sigma^*(\cup_i^r D_i))$.

同様に, $(\mathrm{NS}(Z)/T)_{tor}$ が $\overline{G}$-不変な位数 4 の群 $H \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を含む時, 半直積 $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rtimes \overline{G}$ に関してつぎの定理が成立する. 面白い点は仮定 3.3 のようなものが必要でない点である.

定理 3.5. $\overline{G} = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_3$, ρ は単射とするとき, 以下の条件を満たす Z の H- 被覆 $g : \tilde{X} \to Z$ が存在する.

1. $f \circ g$ の Stein 分解 X は Y の G-被覆である.

2. $D(X/Y, H) = Z$。
3. $\Delta_g \subset \cup_{\sigma\in\overline{G}}(\sigma^*(\cup_i^r D_i))$.

定理 3.4, 3.5 で見たように, $\mathrm{NS}(Z)/T$ の $\overline{G}$-不変な部分群への $\overline{G}$ の作用をみて新しい被覆を構成するという視点は今までの ad-hoc な構成法に統一的な視点を与えていると考えられる. これがこの報告で主張したい視点である. 以下定理 3.4 の証明の概略を述べよう (定理 3.5 については [3] を参照されたい).

補題 3.6. φ は上で選んだものとする. $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_i = \varphi_{i-1}^{\sigma}$, $i = 2, ..., q$ とおくと, これらは全て合異なる有理関数である.

証明. $\varphi_1 \neq \varphi_l$ $(l = 2, ..., q)$ を示せば十分である. $\varphi_1 = \varphi_l$ とする. このとき, 定義より $\varphi = \varphi^{\sigma(l-1)}$ である. q は素数であり, $0 < l-1 < q$ であるから, $s_1(l-1) + s_2 q = 1$ を満たす整数が存在する. これから

$$\varphi^{\sigma} = \varphi^{\sigma^{s_1(l-1)+s_2q}} = \varphi^{\sigma^{s_1(l-1)}} = \varphi$$

をえる. これから,

$$a_1 D_1 + \cdots + a_r D_r - p(D' - D'')$$

と

$$a_1\sigma^* D_1 + \cdots + a_r\sigma^* D_r - p\sigma^*(D' - D'')$$

は因子として等しい. 係数を比較すれば, これが成立するためには, $a_1D_1 + \cdots + a_rD_r$ と $a_1\sigma^*D_1 + \cdots + a_r\sigma^*D_r$ が因子として等しくなければならないことがわかる. ゆえに, $pL \approx pL^{\sigma}$ を得る. $\mathrm{NS}(Z)$ は torsion-free と仮定したから, $L \sim L^{\sigma}$ である. L は H の生成元を与えるようにとってあるから, これは, $\overline{G}$ が H に非自明に作用するという仮定に矛盾する. 故に補題が従う.

補題 3.7. $\psi = \varphi_1\varphi_2^{k}\cdots\varphi_q^{k^{q-1}}$ とおく. θ は 方程式 $X^p - \psi = 0$ の解の一つとする. このとき

1. $X^p - \psi$ は $\mathbf{C}(Z)[X]$ で既約である.
2. $K = \mathbf{C}(Z)(\theta)$ は $\mathbf{C}(\Sigma)$ の Galois 拡大で, その Galois 群は G に等しい.

証明. $X^p - \psi$ が $\mathbf{C}(Z)[X]$ で可約であると仮定する. 体論のスタンダードな議論により, $\theta \in \mathbf{C}(Z)$ となるので, θ は $\theta^p = \psi$ を満たす $\mathbf{C}(Z)$ の元である. 両辺の因子を比較して,

$$p(\theta) = \mathfrak{D} - p\sum_{i=1}^{q} k^{i-1}\left(\sigma^i\right)^*(D' - D'')$$

を得る. これは仮定 3.3 に反する. 故に, $X^p - \psi$ は $\mathbf{C}(Z)[X]$ で既約である.

次に K が Galois 拡大であることを示そう. σ の作用を K まで上手くのばせることをいえばよい. これをいう為に, ψ^σ を見てみると:

$$\begin{aligned}\psi^\sigma &= \varphi_2\varphi_3^k\cdots\varphi_q^{k^{q-2}}\varphi_1^{k^{q-1}} \\ &= \frac{\varphi_2^{k^q}}{\varphi_2^{k^q-1}} \times \frac{\varphi_3^{k^{q+1}}}{\varphi_2^{k^{q+1}-k}} \times \cdots \times \frac{\varphi_q^{k^{2q+1}}}{\varphi_2^{k^{q+1}-k}} \times \varphi_1^{k^q-1} \\ &= \frac{\psi^{k^q-1}}{\left(\varphi_2^u\varphi_3^{ku}\cdots\varphi_q^{k^{q-1}u}\right)^p}\end{aligned}$$

従って, σ の作用を

$$\theta^\sigma = \frac{\theta^{k^q-1}}{\left(\varphi_2^u\varphi_3^{ku}\cdots\varphi_q^{k^q u}\right)^p}$$

とおくと, θ の共役元はすべて K に含まれる. 故に, K は Galois 拡大である. 位数 pq の非可換群は G に同型なので, $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{C}(\Sigma)) \cong G$ である.

定理 3.4 の証明. 補題 3.6 と 3.7 から, Z の K- 正規化 $\tilde{X}$ をとると, ψ の取り方から, $\Delta(\tilde{X}/Z)$ は条件 3 を満たし, $\tilde{X} \to Y$ の Stein 分解 X は条件 1, 2 を満たす G-被覆である.

この節を終えるにあたって, $G = D_{2p}$ のときは, 仮定 3.3 が常に満たされていることを示そう.

$G = D_{2p}$ のときは, $q = 2$ であり, $k = p-1$ である. 故に,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \sum_{i=1}^{r} a_i\{D_i + (p-1)\sigma^* D_i\} \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i\{D_i - \sigma * D_i\} + p\sum_{i=1}^{r} a_i\sigma^* D_i\end{aligned}$$

となる. 従って仮定 3.3 は満たされている. 故に, [2], Proposition 1.1 が従う.

§4 例

この節では, $\mathbf{P}^2$ の D_6-, $\mathfrak{S}_4$-, $\mathfrak{A}_4$- 被覆の例をいくつか紹介する. 記号はこれまでのものを踏襲する. 前節で見たように, $\mathrm{NS}(Z)/T$ の torsion-part が大切な役割をはたしている. そこで, まずつぎの補題が成立することに注意しよう.

補題 4.1. T は前節で述べた通りとし, $T^\vee$ はその dual lattice とする. 交点形式を用いて, T を $T^\vee$ に埋め込んで $T^\vee$ の部分群とみなし, $G_T = T^\vee/T$ とおく. G_T の p-

length を l_p. Z の第 2 Betti 数を $b_2(Z)$ とおく．もし，$l_p + \operatorname{rank} T > b_2(Z)$ ならば，$\mathrm{NS}(Z)/T$ は p-torsion をもつ．

証明については，[2] §3 を参照のこと．

以下の例では T は $\mathbf{P}^2$ の line の引き戻しと $\mu : Z \to Z'$ の例外因子の既約成分を生成元とするものとする．この T が §3 の仮定を満たすのは明らかであろう．

例 4.2. B は特異点集合として $6a_2 + 4a_1$ を持つ平面 6 次曲線とする．

1. B に沿って分岐指数 2 で分岐する D_6- 被覆が存在する．

$f' : Z' \to PP^2$ を B で分岐する 2 次被覆，$\mu : Z \to Z'$ をその標準特異点解消とし，T を上記のようにとると，$l_3 = 6$, $\operatorname{rank} T = 17$ である．Z は $K3$ 曲面なので，$b_2(Z) = 22$. 故に，補題 4.1 から $\mathrm{NS}(Z)/T$ は3- torsion を持つ．2 次被覆の involution σ から定まる $\mathrm{NS}(Z)/T$ の自己同型はこの 3- torsion に非自明に作用し，かつ σ-不変である．ゆえに定理 3.4 から 主張が従う．

2. B に沿って分岐指数 2 で分岐する $\mathfrak{S}_4$- 被覆が存在する．

1 で得られる D_6- 被覆を Z' とおく．Z' は A_1 型特異点を 12 個もつ．$\mu : Z \to Z'$ をその特異点解消とし，T を上でのべたように選ぶ．Z は再び $K3$ 曲面となるから，$b_2(Z) = 22$ であり，$l_2 = 13$, $\operatorname{rank} T = 13$ である．故に，$\mathrm{NS}(Z)/T$ は 2-torsion をもつ．さらにこの 2-torsion への D_6 の作用を見ると，$\mathrm{NS}(Z)/T$ が D_6-不変かつ $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ に同型な部分群を含むことが分かる．さらに，D_6 の作用を詳しくみると，定理 3.5 の仮定が成立することがわかる．故に主張が従う．詳しくは [3] 参照．

3. B に沿って分岐指数 3 で分岐すつ $\mathfrak{A}_4$- 被覆が存在する．

$f' : Z' \to \mathbf{P}^2$ を B に沿って分岐する $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$-被覆とする．Z' の特異点は $6D_4 + 4A_2$ である．$\mu : Z \to Z'$ を Z' の特異点解消とし，T をこれまでと同様に選べば，$b_2(Z) = 43$, $l_2 = 13$, $\operatorname{rank} T = 33$ が分かる．故に補題 4.1 から $\mathrm{NS}(Z)/T$ には位数 2 の torsion が存在することが分かる．この 2-torsion への $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ の作用をみると，定理 3.5 の仮定が満たされることが分かる．詳しくは省略する．

参考文献

[1] H. Tokunaga: On dihedral Galois coverings, Canadian J. of Math., **46** (1994), 1299-1317.

[2] H. Tokunaga: Dihedral coverings of algebraic surfaces and its application, to appear in Trans. AMS.

[3] H. Tokunaga: Galois covers for $\mathfrak{S}_4$ and $\mathfrak{A}_4$ and their applications, preprint 2000

[4] O. Zariski: On the purity of the branch locus of alebraic functinons, Proc. Nat. Aca. USa **44**(1957) 791-796