数理解析研究所講究録
1183巻 2001年 120-127

A GEOMETRIC CRITERION FOR GELFAND PAIRS ASSOCIATED WITH NILPOTENT LIE GROUPS

京大・理　西原 直 (NAO NISHIHARA)

Department of Mathematics
Faculty of Science
Kyoto University

§1. 序

局所コンパクトな位相群Gとその中のコンパクト部分群Kが与えられたとき, 両側K-不変なG上の可積分函数からなる函数空間$L^1(K\backslash G/K)$が convolution に関して可換になるとき, 対(G,K)は Gelfand pair であるという. リーマン対称対は Gelfand pair であり, よく研究もされているが, この他の場合はあまりよく分かっていない. ここでは, Nを連結かつ単連結な冪零リー群, KをNに自己同型で作用しているコンパクト・リー群とし, 半直積群$G=K\ltimes N$を考える. この場合, (G,K)が Gelfand pair であると言うかわりに, (K,N)が Gelfand pair であると言い, それを冪零リー群Nに付随した Gelfand pair と呼ぶ. [2] によれば, (K,N)が Gelfand pair となるのはNが高々2-stepのときに限るので, 以後Nは高々2-stepとして話を進める. 同じ論文 [2] では, Heisenberg group の付随する Gelfand pair が multiplicity free な作用と密接に関わっていることが分かり注目を浴びた. 一般の2-step 冪零リー群に付随した Gelfand pair の研究により, Heisenberg group に対する今までの結果を様々な意味でより深く掘り下げることができるのではないかと期待している. 本講演の主結果を簡単に述べておこう. [1] の中で, Benson, Jenkins, Lipsman, Ratcliff は Orbit Condition という coadjoint orbit に関する条件によって Heisenberg group に付随する Gelfand pair を特徴づけた. 一般の2-step 冪零リー群に付随する Gelfand pair に対しては, [3] において Orbit Condition の必要性のみ証明が与えられたが, 十分性は予想のまま残されていた. この予想に証明を与えることができたというのが, 今回の主結果である. なお, この内容はプレプリントとしてもまとめられている [7].

記号を準備して Orbit Condition を正確に述べよう. G,N,Kのリー環をそれぞれ$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$とし, $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{k}^*$でそれらの双対ベクトル空間をあらわす. $\xi\in\mathfrak{g}^*$を通る

coadjoint orbit を O_ξ^G と書こう. $\mathfrak{g}^*$ における $\mathfrak{k}$ の annihilator を $\mathfrak{k}^\perp$ とする. 前述の Orbit Condition (OC) とは, 次の条件のことである.

(OC): 任意の $\xi \in \mathfrak{k}^\perp$ に対して, $O_\xi^G \cap \mathfrak{k}^\perp$ がひとつの $\mathrm{Ad}_G^*(K)$-orbit となる.

よく知られているように, (K,N) が Galfand pair であることは, $G = K \ltimes N$ の既約ユニタリ表現を K に制限したときにそこに現れる K の trivial 表現の multiplicity が高々 1 であるという条件によって特徴づけられる. この表現論的な条件を Orbit method 風に coadjoint orbit の言葉で書き直したものが (OC) である. ただ, 半直積群 $G = K \ltimes N$ に対する Orbit method は [6] などで研究されているもののまだ充分に確立されていないため, (OC) が (K,N) が Gelfand pair となるための必要充分条件であると直ちに言い切ることはできないのである.

本講演の主結果は次の通りである.

定理. (K,N) が Orbit Condition をみたすことは, (K,N) が Gelfand pair になるための充分条件でもある.

更に, (K,N) が Gelfand pair になるための必要充分条件を (OC) をもう少し簡単に書き下した形で与えている (定理 5.1 & 定理 5.2). 具体的に与えられた対が Gelfand pair になるかどうか判定する際, これらの定理は非常に有効であると思われる. 実際, [7] ではこの定理を使ってふたつの例を判定している.

§2. 準備

まずはじめに 2-step 冪零リー環の構造を詳しく見ていこう. 本稿を通し N を連結かつ単連結な 2-step の冪零リー群とする. N のリー環を $\mathfrak{n}$ で表わし, $\mathfrak{n}$ の中心を $\mathfrak{z}$ で表わす. $\mathfrak{n}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をひとつ固定し, 中心 $\mathfrak{z}$ の直交補空間を V とすると, 直和分解 $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus V$ を得る. $\mathfrak{n}$ が 2-step であることに注意すると, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}$ である. 各 $z \in \mathfrak{z}$ に対し, 次の式で V 上の線型作用素 J_z を定義する：

(2.1) $$\langle J_z v, w \rangle = \langle z, [v,w] \rangle \qquad (v, w \in V).$$

この作用素の族 $\{ J_z \,;\, z \in \mathfrak{z} \}$ が 2-step 冪零リー環 $\mathfrak{n}$ の構造を決めているといってもよいだろう. ここで V における $\mathrm{Ker}\, J_z$ の直交補空間を V_z とすると, $V = \mathrm{Ker}\, J_z \oplus V_z$ という分解を得る. 作用素 J_z が V 上 skew symmetric であることに注意すると, 次の補題が得られる.

補題 2.1. 各 $z \in \mathfrak{z}$ に対して $\mathrm{Range}\ J_z = V_z$. また, $J_z|_{V_z} : V_z \to V_z$ は全単射.

次に, K をコンパクト・リー群とし, 連続な準同型 $\sigma : K \to \mathrm{Aut}(N)$ が与えられているとする. 本稿で考察する問題においては, 必要なら $\sigma(K)$ を考えることで K は $\mathrm{Aut}(N)$ のコンパクトな部分群とみなしてもよい. さて, $\mathfrak{n}$ の内積として K-不変なものをとっておくことにしよう. K は自己同型で $\mathfrak{n}$ に作用しているので中心 $\mathfrak{z}$ を保ち, それゆえ直交分解 $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus V$ も保つ. このことに注意して簡単な計算を行なうと,

(2.2) $$K \subset \{ (\phi, T) \in \mathrm{O}(\mathfrak{z}) \times \mathrm{O}(V) \,;\, TJ_zT^{-1} = J_{\phi z} \text{ for all } z \in \mathfrak{z} \}$$

であることが分かる. 従って K のリー環を $\mathfrak{k}$ とすれば,

(2.3) $$\mathfrak{k} \subset \{ (A, B) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{z}) \oplus \mathfrak{so}(V) \,;\, BJ_z - J_zB = J_{Az} \text{ for all } z \in \mathfrak{z} \}$$

となる. ここで $\mathrm{O}(\mathfrak{z})$, $\mathrm{O}(V)$ はそれぞれ $\mathfrak{z}$, V 上の直交変換群, $\mathfrak{so}(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{so}(V)$ はそれらのリー環を表わしている. 各点 $z \in \mathfrak{z}$ における K の固定部分群を K_z, そのリー環を $\mathfrak{k}_z$ とすると, (2.2) から直ちに K_z の V への作用が J_z と可換になることが分かる. また, (2.3) より $\mathfrak{k}_z$ の V への作用も J_z と可換になる.

補題 2.2. K_z の V への作用, $\mathfrak{k}_z$ の V への作用は共に直交分解 $V = \mathrm{Ker}\, J_z \oplus V_z$ を保つ.

最初に紹介した作用素 J_z を用いて $O_\xi^G \cap \mathfrak{k}^\perp$ を計算し, (OC) をより explicit に記述しよう. $\mathfrak{n}$ の元 $(z, u) \in \mathfrak{z} \oplus V$ に内積を通して対応する $\mathfrak{n}^*$ の元を $(\tilde{z}, \tilde{u}) \in \mathfrak{z}^* \oplus V^*$ と書くことする. 以後, $\mathfrak{k}^\perp \subset \mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{n}^*$ により $\mathfrak{k}^\perp$ を $\mathfrak{n}^*$ と自然に同一視する. ここで, $z \in \mathfrak{z}$, $u \in V$ が与えられたとき, V の部分集合 $\mathcal{V}_{z,u}$ を次のように定義しておこう. ある $y \in \mathfrak{z}$ が存在し, すべての $(A, B) \in \mathfrak{k}$ に対して $\langle z, Ay \rangle + \langle u - \frac{1}{2}J_zv, Bv \rangle = 0$ となるような $v \in V$ の全体を $\mathcal{V}_{z,u}$ で表わす. [3, Lemma 3.1] の計算を作用素 J_z を用いて更に進めた結果, 次の補題が得られる. 計算の詳細は, [7, Lemma 2.3] にある.

補題 2.3. 各 $\nu = (\tilde{z}, \tilde{u}) \in \mathfrak{n}^*$ に対し,

$$O_\nu^G \cap \mathfrak{k}^\perp = \{ k \cdot (\tilde{z}, (u - J_zv)^\sim) \,;\, k \in K,\, v \in \mathcal{V}_{z,u} \}.$$

この補題により, (OC) は次のように述べることができる：

命題 2.4. (OC) は次と同値：
任意の $z \in \mathfrak{z}$, $u \in V$, $v \in \mathcal{V}_{z,u}$ に対して, $Tu = u - J_zv$ をみたす $(\phi, T) \in K_z$ が存在する.

§3. Localization

この章では, 与えられた対 (K,N) が Gelfand pair になるかどうかという問題を Heisenberg group の場合に帰着する"Localization"と呼ばれる手続きを紹介する. まず, $\mathfrak{n}$ の部分空間 $\mathfrak{n}_z := \mathbb{R}z \oplus V_z$ に次のようにして bracket $[\cdot,\cdot]_z$ を定義する:

$$[t_1 z + v_1,\ t_2 z + v_2]_z := Q_z[v_1, v_2] \qquad (t_j \in \mathbb{R},\ v_j \in V_z\,;\ j = 1, 2). \tag{3.1}$$

ここで, Q_z は $\mathfrak{z}$ から $\mathbb{R}z$ の上への直交射影である. 明らかに, $\mathfrak{n}_z$ は高々2-step の冪零リー環になる. $\mathfrak{n}_z$ をリー環にもつ連結かつ単連結な冪零リー群を N_z とする. この N_z は, $J_z \neq 0$ のとき Heisenberg group に同型, $J_z = 0$ のとき Aberian group に同型になることが分かる. 次に K の部分群 $K_{z,w}$ を定義しよう.

定義 3.1. 各 $z \in \mathfrak{z}$, $w \in V$ に対し,

$$K_{z,w} := \{\, (\phi, T) \in K\,;\ \phi z = z,\ TP_z w = P_z w \,\}$$

とする. ここで P_z で V から $\operatorname{Ker} J_z$ の上への直交射影を表わす.

この部分群 $K_{z,w}$ は実は, $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathfrak{n}^*$ を通る coadjoint orbit を保つような K の元全体である. 以上の準備の下, [3, Lemma 2.4 & Remark 2.5] にある"Localization lemma"は次の形で述べることができる.

定理 3.2. (K,N) が Gelfand pair になることと, すべての $z \in \mathfrak{z}$, $w \in V$ に対して $(K_{z,w}, N_z)$ が Gelfand pair になることは同値.

補題2.2に注意すれば, $K_{z,w} \subset K_z$ より, $K_{z,w}$ は $\mathfrak{n}_z = \mathbb{R}z \oplus V_z$ に自然に自己同型で作用している. 上の定理では $K_{z,w}$ の N_z への自然な作用を考えている.

§4. Geometric Criterion

Heisenberg group の場合, Orbit Condition が Gelfand pair になるための必要充分条件であることがすでに知られている ([1] & [3, Theorem 4.2]). この結果と定理3.2を使うと, 次のことが直ちに分かる.

命題 4.1. (K,N) が Gelfand pair になることと, すべての $z \in \mathfrak{z}$, $w \in V$ に対して $(K_{z,w}, N_z)$ が (OC) をみたすことは同値.

この命題の中の条件を, 本稿では (LOC) と呼ぶことにする. (LOC) と (OC) の同値性を示すことが目標である. そのために, (OC) を書き下したときと同様にして (LOC) を書き下しておく.

命題 4.2. (LOC) は次と同値：
任意に $z \in \mathfrak{z}$, $w \in V$, $t \in \mathbb{R}$ が与えられたとき,

$$\langle u - \tfrac{1}{2}J_{tz}v,\ \mathfrak{k}_{z,w} \cdot v\rangle = 0 \tag{4.1}$$

をみたす $u, v \in V_z$ に対して, $Tu = u - J_{tz}v$ となる $(\phi, T) \in K_{z,w}$ が存在する.

以上の準備のもと主定理の証明に入ろう.

定理 4.3. (OC) と (LOC) は同値. つまり, (K, N) が Gelfand pair になることと (K, N) が (OC) をみたすことは同値.

証明. まず最初に (OC)⇒(LOC) を示そう. $z \in \mathfrak{z}$, $w \in V$, $t \in \mathbb{R}$, $u, v \in V_z$ が(4.1) をみたしているとしよう. 目標は, $Tu = u - J_{tz}v$ をみたす $(\phi, T) \in K_{z,w}$ を見つけることである. $t = 0$ の場合は明らかなので, $t \neq 0$ としておこう.

Step 1: $\langle (u+P_z w) - \frac{1}{2}J_{tz}(v+v'),\ \mathfrak{k}_z \cdot (v+v')\rangle = 0$ をみたす $v' \in \operatorname{Ker} J_z$ が存在する.

実際, 補題 2.2 を使うと, $(A, B) \in \mathfrak{k}_z$ なら $Bv \in V_z$ であり, また $v' \in \operatorname{Ker} J_z$ に対しては $Bv' \in \operatorname{Ker} J_z$ であるので,

$$\langle (u + P_z w) - \tfrac{1}{2}J_{tz}(v + v'), B(v + v')\rangle = \langle u - \tfrac{1}{2}J_{tz}v, Bv\rangle + \langle P_z w, Bv'\rangle$$

となる. 従って, $\operatorname{Ker} J_z$ の元 v' で, すべての $(A, B) \in \mathfrak{k}_z$ に対して

$$\langle BP_z w, v'\rangle = \langle u - \tfrac{1}{2}J_{tz}v, Bv\rangle$$

となるものを見つければよい. そのために, $\mathfrak{k}_z$ 上の線型形式 f_1 を次式で定義する：

$$f_1(A, B) := \langle u - \tfrac{1}{2}J_{tz}v, Bv\rangle.$$

いま(4.1) がみたされていたので, f_1 を $\mathfrak{k}_z/\mathfrak{k}_{z,w}$ 上の線型形式とみなすことができる. ここで, orbit map $(A, B) \mapsto BP_z w$ によって線型同型 $\tilde{\Phi}_1 : \mathfrak{k}_z/\mathfrak{k}_{z,w} \simeq \mathfrak{k}_z \cdot (P_z w)$ が引き起こされることに注意しよう. $\Psi_1 := f_1 \circ (\tilde{\Phi}_1)^{-1}$ は $\mathfrak{k}_z \cdot (P_z w)$ 上の線型形式であるから, ある $v' \in \mathfrak{k}_z \cdot (P_z w)$ が存在して, $\Psi_1 = \langle \cdot, v'\rangle$ と書ける. それゆえ, すべての $(A, B) \in \mathfrak{k}_z$ に対して

$$\langle BP_z w, v'\rangle = \Psi_1(BP_z w) = (f_1 \circ (\tilde{\Phi}_1)^{-1})(BP_z w) = \langle u - \tfrac{1}{2}J_{tz}v, Bv\rangle.$$

最後に $P_z w \in \operatorname{Ker} J_z$ であるから, 補題 2.2 により $v' \in \operatorname{Ker} J_z$ である. 従って, Step 1 が示された.

Step 2: ある $y \in \mathfrak{z}$ が存在して, すべての $(A, B) \in \mathfrak{k}$ に対して

$$\langle tz, Ay\rangle + \langle (u + P_z w) - \tfrac{1}{2}J_{tz}(v + v'), B(v + v')\rangle = 0.$$

A が skew symmetric であるから,

$$\langle tAz, y\rangle = \langle (u + P_z w) - \tfrac{1}{2}J_{tz}(v + v'), B(v + v')\rangle$$

をみたす $y \in \mathfrak{z}$ を見つければよいのだが, Step 1 と同様の議論で見つけることができる. まず, $\mathfrak{k}$ 上の線型形式 $(A, B) \mapsto \langle (u + P_z w) - \frac{1}{2}J_{tz}(v + v'), B(v + v')\rangle$ を考え, Step 1 の結果からこれは $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_z$ 上の線型形式とみなすことができる. これを線型同型 $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_z \simeq \mathfrak{k} \cdot z \subset \mathfrak{z}$ で引き戻して得られる $\mathfrak{k} \cdot z$ 上の線型形式を内積で表示すればよい.

Step 3: $Tu = u - J_z v$ をみたす $(\phi, T) \in K_{z,w}$ が存在する.

実際, Step 2 から $v + v' \in \mathcal{V}_{tz, u+P_z w}$ である. いま (OC) を仮定していたので, 命題 2.4 を使うと $(\phi, T) \in K_z$ が存在して,

$$T(u + P_z w) = (u + P_z w) - J_{tz}(v + v') = (u + P_z w) - J_{tz}v$$

をみたしていることが分かる. 補題 2.2 より作用素 T は $\mathrm{Ker}\, J_z$ と V_z を保つので, $Tu = u - J_{tz}v$ と $TP_z w = P_z w$ を得る. それゆえ, この (ϕ, T) は $K_{z,w}$ の元であることが分かり, Step 3 が示されたことになる. 最後に, 命題 4.2 を使うことで (LOC) が得られる.

逆にあたる (LOC) $\Rightarrow$ (OC) の証明は, すでに [3] にあるので省略する. 我々の言葉 (J_z を用いた議論) によるより簡明な証明は [7, Theorem 4.3] にある. □

§5. 応用

定理 4.3 によって, 冪零リー群に付随する Gelfand pair を Orbit Condition によって特徴づけることができたわけだが, 具体的に与えられた対を判定するには, このままの形では使いにくい. そこで, (OC) を書き下した命題 2.4 に対して定理 4.3 の Step 1 の議論を使うことにより, 次の特徴づけを得る.

定理 5.1. (K, N) が Gelfand pair になることは次と同値：
任意に $z \in \mathfrak{z}$ が与えられたとき, $\langle u - \frac{1}{2}J_z v, \mathfrak{k}_z \cdot v\rangle = 0$ をみたす $u, v \in V$ に対し, $Tu = u - J_z v$ となる $(\phi, T) \in K_z$ が存在する.

対称性を表に出した形に書くと, これは次のようにも書ける.

定理 5.2. (K, N) が Gelfand pair になることは次と同値：
任意に $z \in \mathfrak{z}$ が与えられたとき, $\langle u, \mathfrak{k}_z \cdot v \rangle = 0$ をみたす $u, v \in V$ に対し, $u + J_z v$ と $u - J_z v$ は同じ K_z-orbit 上にある.

この定理から, (K, N) が Gelfand pair であるとき, $\langle u, \mathfrak{k}_z \cdot v \rangle = 0$ をみたす $u, v \in V$ に対し $|u + J_z v| = |u - J_z v|$ となることに注意すると次の系が得られる.

系 5.3. (K, N) が Gelfand pair であるとき, すべての $z \in \mathfrak{z}$, $v \in V$ に対し $J_z v \in \mathfrak{k}_z \cdot v$ である.

この結果を $K = \mathrm{Aut}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{n})$ の場合に適用し [4, Theorem 2.10] と見比べることで, 次の定理も得られる.

定理 5.4. 連結かつ単連結な Riemannian 2-step nilmanifold が commutative space ならば, Riemannian g.o. space でもある.

ここで, 一般にリーマン等質空間 M が commutative space であるとは, 等長変換群の単位元連結成分の作用で不変な M 上の微分作用素環が可換になるときをいう. また, M が Riemannian g.o. space であるとは, M 上のすべての測地線が等長変換群の one-parameter subgroup による軌道になるときをいう.

§6. 具体例

この章では, Lauret が [5] のおいて考察したあるクラスの 2-step 冪零リー群から例を紹介する. 実際の計算は [7] にある.

例 6.1. $(\mathrm{SO}(n), N(\mathfrak{so}(n), \mathbb{R}^n))$
$\mathrm{SO}(n)$ の行列表現を $(\pi, \mathbb{R}^n)$ と書こう. $\mathrm{SO}(n)$ は, $\mathfrak{n} := \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n$ に (Ad, π) で作用している. この作用で不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathfrak{n}$ に入れておく. この内積と微分表現 π から, 次のようにして $\mathfrak{n} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathbb{R}^n$ に bracket を定義する：

$$\begin{cases} [\mathfrak{so}(n), \mathfrak{n}] := 0, \qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{so}(n), \\ \langle \pi(z)u, v \rangle := \langle z, [u, v] \rangle \quad (z \in \mathfrak{so}(n),\ u, v \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

$\mathfrak{n}$ が 2-step の冪零リー環になることは明らかであろう. 中心が $\mathfrak{so}(n)$ と一致し, 2 章で述べた作用素 J_z が $\pi(z)$ と一致することも分かる. また, $\mathrm{SO}(n)$ の $\mathfrak{n}$ への作用が自己同型であることも簡単な計算から分かる. このリー環 $\mathfrak{n}$ に対応する連結かつ単連結な冪零リー群を $N(\mathfrak{so}(n), \mathbb{R}^n)$ と書く. 対 $(\mathrm{SO}(n), N(\mathfrak{so}(n), \mathbb{R}^n))$ が Gelfand pair に

なることは [2, Theorem 5.12] においてすでに示されているが, 定理 5.1 を使うことでより簡単に示すこともできる.

例 6.2. $(SO(3) \times SO(2), N(\mathfrak{so}(3), \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3))$
この例では, すべての $z \in \mathfrak{z}$ に対して (K_z, N_z) は Gelfand pair になるにもかかわらず, (K, N) は Gelfand pair にならない (定理 3.2 と見比べてみるとよい). まず SO(3) の行列表現 $(\pi, \mathbb{R}^3)$ の直和を考える. SO(3) は, $\mathfrak{n} := \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^6$ に $(\mathrm{Ad}, \pi \oplus \pi)$ を通して作用している. この作用で不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathfrak{n}$ に入れておく. この内積と微分表現から, 次のようにして $\mathfrak{n} = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^6$ に bracket を定義する：

$$\begin{cases} [\mathfrak{so}(3), \mathfrak{n}] := 0, \qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{so}(3), \\ \langle (\pi(z) \oplus \pi(z))u,\, v \rangle := \langle z, [u, v] \rangle \quad (z \in \mathfrak{so}(3),\, u, v \in \mathbb{R}^6). \end{cases}$$

中心は $\mathfrak{so}(3)$ と一致し, 2 章で述べた作用素 J_z は $\pi(z) \oplus \pi(z)$ と一致する. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}) \cap O(\mathfrak{n})$ の単位元連結成分は, $SO(3) \times SO(2)$ と同型になることが分かる. SO(2) は, $(\pi \oplus \pi, \mathbb{R}^6)$ の絡作用素として現れる. 対 $(SO(3) \times SO(2), N(\mathfrak{so}(3), \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3))$ は, コンパクト群の作用をいわば極大にとったにもかかわらず Gelfand pair にならないことが, 定理 5.1 を使うことで分かる.

参考文献

[1] C. Benson, J. Jenkins, R. L. Lipsman, and G. Ratcliff, *A geometric criterion for Gelfand pairs associated with the Heisenberg group*, Pacific J. Math. **178** (1997), 1–36.

[2] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff, *On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 85–116.

[3] ———, *The orbit method and Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups*, J. Geom. Anal. **9** (1999), 569–582.

[4] C. S. Gordon, *Homogeneous riemannian manifolds whose geodesics are orbits*, Topics in geometry, 155–174, Birkhuzer Boston, Boston, MA, 1996.

[5] J. Lauret, *Homogeneous nilmanifolds attached to representations of compact Lie groups*, Manuscripta Math. **99** (1999), 287–309.

[6] R. Lipsman, *Orbit method and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical*, J. Math. Pures Appl. **59** (1980), 337–374.

[7] N. Nishihara, *A geometric criterion for Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups*, preprint (2000).