Conditional Expectations と Sampling Functions を巡る函数解析

東京工業大学名譽教授 梅垣壽春 (HISAHARU UMEGAKI)

表記の Conditional Expectations という概念は、本来は確率論に 於ける基本的な部分を形成している.この概念を 1953 年以来、 非可換解析を念頭に置いて展開してきたが、今回遡ってその構成 の一端を振り返りながら、新たな構成に論を進めたいと思う.

§1. 確率空間上の Conditional Expectations

 $\Omega = (\Omega, \mathcal{L}_{\Omega}, P)$ を確率空間とし、 \mathcal{B} を \mathcal{L}_{Ω} 上の σ -部分集合体とする。先ず、 \mathcal{B} を制限し、有限な部分集合体とし、その'atoms'全体を

$$\mathcal{B}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$$

とし

$$P(A/\mathcal{B}_0) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{B \in \mathcal{B}_0} 1_B \cdot P(A \cap B) / P(B)$$
 (1.1)

と置き,これを $A \in \mathcal{L}_{\Omega}$ の条件付確率 (relative to \mathcal{B}_{0}) という.茲で 1_{B} は B の定義函数である.

更に(複素数値)確率変数 f に対して

$$E(f/\mathcal{B}_0) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{B \in \mathcal{B}_0} (1_B(\cdot)/P(B)) \int_B f(\omega)P(d\omega)$$

と置き、これを 'conditional expectation' of f relative to \mathcal{B}_0 という. 特に $f=1_A$ とおくと

$$E(f/\mathcal{B}_0) = P(A/\mathcal{B}_0)$$

となる.

Conditional Expectation $E(f/\mathcal{B})$ に関する基本式は、 $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\int_{B} E(f/\mathcal{B})(\omega)P(d\omega) = \int_{B} f(\omega)P(d\omega) \tag{1.2}$$

であり、この等式 (1.2) が conditional expectation の特性方程式なのである. 一般に、 \mathcal{B} を \mathcal{L}_{Ω} の一つの σ -部分集合体とする. このとき、 $\forall f \in L^1(\Omega)$ に対して、

等式 (1.2) を満たす \mathcal{B} -可測な確率変数 $E(f/\mathcal{B})$ が一意に存在する (これの証明は Radon-Nikodym 定理を用いて行う).

Conditional Expectation に関する基本的性質は次の定理によって与えられる.

定理 1.1. 函数空間 $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{L}_{\Omega}, P)$ $(1 \leq p < +\infty)$ とし, σ -部分集合体 $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}_{\Omega}$ を与える $\Rightarrow \exists_1 E(f/\mathcal{B}) \in L^p$; 等式 (1.2) を満たす.

定理 1.2. 変換 $f \to E(f/\mathcal{B})$ は $L^p(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ である射影変換で

- 1°. $||E(f/\mathcal{B})||_p \le ||f||_p$,
- 2° . $E(\bar{f}/\mathcal{B}) = \overline{E(f/\mathcal{B})}, \ E(1/\mathcal{B}) = 1,$
- 3°. $E(fq/\mathcal{B}) = E(f/\mathcal{B}) \cdot g \quad (g \in L^{\infty}(\Omega)),$
- 4°. $E(\alpha f + \beta g/\mathcal{B}) = \alpha E(f/\mathcal{B}) + \beta E(g/\mathcal{B}).$

特に、この定理に於いて、p=1 or 2 の場合が重要で、数学的興味が引かれる.

§2. Banach 空間値確率変数

確率空間 $(\Omega, \mathcal{L}_{\Omega}, \mu)$ 上で定義され、Banach 空間 \boldsymbol{B} に値をとる確率変数 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \dots$ を考える。 Ω の有限可測分割 $\{A_j\}(\subset \mathcal{L}_{\Omega})$ と \boldsymbol{B} の元の有限列 $\{\xi_j\}(\subset \boldsymbol{B})$ に対して Ω 上の函数 $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{f}(\omega) = \sum 1_{A_j}(\omega)\xi_j$ (a.e. $\omega \in \Omega$) を simple random variable という。 更に、この様な函数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ によって

$$\|\boldsymbol{f}_n(\omega) - \boldsymbol{f}(\omega)\| \to 0 \quad (a.e. \ \omega \in \Omega)$$

である函数 f を strong random variable という.

注. strong convergence の代わりに weak convergence を採用しても同様に定義され (weak random variable), *B* が可分の場合, 両者 (両可測性) は一致する.

上記の事柄をbase にして strong random variables f, g, \ldots の構成する L^p -空間 $(1 \le p < \infty)$ が定義される:

$$\|oldsymbol{f}\|_p \stackrel{\triangle}{=} \left(\int_{\Omega} \|oldsymbol{f}(\omega)\|^p \mu(d\omega)
ight)^{1/p} < +\infty$$

とし,

$$L^p(\Omega; \boldsymbol{B}) = L^p(\Omega, \mathcal{L}_{\Omega}, \mu; \boldsymbol{B})$$

とおくと、 $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ はBanach空間となり $(p = \infty \, \text{の場合は}, \| \|_{\infty} = \text{esssup} \| \mathbf{f}(\omega) \| < \infty$)、次の Tensor 積構成によって表される:

有限列の対 $\{x_i\} \subset L^p(\Omega)$ と $\{\xi_i\} \subset \mathbf{B}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \odot \xi_j \stackrel{\triangle}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j(\omega) \xi_j \pmod{\mu}$$

とおく、これは $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ の要素であり、この形の函数の全体を $L^p(\Omega)$ \odot \mathbf{B} で表す、これは Banach 空間の対 $L^p(\Omega)$ \succeq \mathbf{B} の間の pre-Tensor 積であり、またそれは $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ の dense 部分空間であり、且つ $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ のノルム $\|\cdot\|_p$ は cross-norm になり:

$$\left[\!\!\left[\,x\odot\xi\,\right]\!\!\right]_p=\|x\|_p\cdot\|\xi\|,\;x\in L^p(\Omega),\;\xi\in \boldsymbol{B}\quad (\text{cf. Schatten [6]}).$$

これより $L^p(\Omega) \odot {\bf B}$ のノルム $\|\cdot\|_p$ に関する完備化が $L^p(\Omega)$ と ${\bf B}$ 間の Tensor Product Banach 空間 $L^p(\omega) \otimes {\bf B}$ である.従って $1 \leq p < +\infty$ のとき

$$L^p(\Omega, \boldsymbol{B}) = L^p(\Omega) \otimes \boldsymbol{B}$$

であり、 $\forall f \in L^p(\Omega; \mathbf{B})$ は Bochner 可積分である,i.e.,積分値 $\int f(\omega)P(d\omega)$ が \mathbf{B} の要素として一意に存在する.また,indentify $\xi = 1 \odot \xi$ ($\xi \in \mathbf{B}, 1 = 1_{\Omega}$) によって空間 \mathbf{B} は $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ の閉部分空間と見なされ,写像

$$m{f}
ightarrow \int m{f}(\omega) P(d\Omega)$$

は norm-one projection $L^p(\Omega, \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ (onto) となる.

本論で特に必要且つ有用なのは空間 $L^1(\Omega; \mathbf{B})$ と $L^\infty(\Omega; \mathbf{B})$ である.これらに於ける norm は Schatten Tensor 積,ノルムの対 N_γ, N_λ の記号によって表される:

$$N_{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} \odot \xi_{i}\right) = \inf \sum_{j=1}^{m} \|y_{j}\| \cdot \|\eta_{j}\|$$

$$N_{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i} \odot \xi_{i}\right) = \sup \sum_{i=1}^{n} \langle x_{i}, x^{*} \rangle \langle \xi_{i}, \xi^{*} \rangle$$

茲に、inf は $\Big\{ \forall y_j \in L^1(\Omega), \forall \eta_j \in \boldsymbol{B}; \sum_{i=1}^n x_i \odot \xi_i = \sum_{j=1}^m y_j \odot \eta_j \Big\}$ 、sup は $\Big\{ \forall x^* \in L^{\infty}(\Omega), \forall \xi^* \in \boldsymbol{B} \; (\|x^*\|_{\infty} \leq 1, \|\xi^*\| \leq 1) \Big\}$ についてとる。

 N_{γ}, N_{λ} はノルム $\|\cdot\|_{p}$ $(p=1 \text{ or } \infty)$ と一致する:

$$L^1(\Omega; \boldsymbol{B}) = L^1(\Omega) \otimes_{\gamma} \boldsymbol{B}$$

$$L^{\infty}(\Omega) \otimes_{\lambda} B \subset L^{\infty}(\Omega; \boldsymbol{B})$$

§3. Conditional Expectations of Strong Random Variables $f,g \in L^1(\Omega,B)$

前§の記号をそのまま用いる. Strong random variable $f, g, ... \in L^1(\Omega, \mathbf{B})$, σ -subfield \mathcal{B} ($\subset \mathcal{L}_{\Omega}$) とし,f の \mathcal{B} に関する \mathbf{B} -valued conditional expectation $\mathcal{E}(f/\mathcal{B})$ は次の様に定義される:

(i) $\mathcal{E}(f/\mathcal{B})$ は \mathcal{B} に関して強可測で、且つ可積分である、i.e., $\mathcal{E}(f/\mathcal{B}) \in L^1(\Omega, \boldsymbol{B})$.

(ii)
$$\int_{B} \mathcal{E}(\mathbf{f}/\mathcal{B})(\omega)\mu(d\omega) = \int_{B} \mathbf{f}(\omega)\mu(d\omega)$$
 for $\forall B \in \mathcal{B}$.

ただし、(ii) の積分は Bochner-Integral である。この vector valued f の Conditional Expectation の存在と構成法が問題となる.

これは次の様に示される.

$$\mathcal{E}(f \odot \xi/\mathcal{B}) = E(f/\mathcal{B}) \odot \xi, \quad f \in L^1(\Omega), \ \xi \in \mathbf{B},$$

つまり、 $f = f \odot \xi$ の場合に (i), (ii) を適用、これを linear-hull に拡大し、更に Schatten ノルム N_{γ} の性質を用いて、一般の $f \in L^{1}(\Omega, \mathbf{B})$ に対して Conditional Expectation $\mathcal{E}(f/\mathcal{B})$ が構成される.

以上のように、B-valued f に対して通常の Radon-Nikodym 定理と Tensor 積を組み合わせることによって、vector-valued x conditional expectation $\mathcal{E}(\cdot/\cdot)$ が構成される.

B-valued Conditional Expectation が定義されると、strong Random variables が構成する Martingale 解析が展開される。Martingales は Conditional Expectations の有向系によって構成され、これの収束定理がB-valued σ -additive 測度に対する Radon-Nikodym 定理の特性化に発展する。

§4. Sampling Functions S_{λ} と空間 BL_{λ}

表記の函数 S_{λ} は Entropy 論と共に Shannon 情報理論の支柱と云われる. Fix された実数 $\lambda > 0$ に対して、函数

$$S_{\lambda}(t) = \left\{ egin{array}{ll} 2\lambda rac{\sin 2\pi \lambda t}{2\pi \lambda t} & (t
eq 0, \ -\infty < t < \infty) \\ 2\lambda & (t = 0) \end{array}
ight.$$

が Sampling Function である. これの Fourier 変換 は

$$\hat{S}_{\lambda}(\omega) = 1_{[-\lambda,\lambda]}(\omega)$$
 (= 区間 $[-\lambda,\lambda]$ の定義函数)
$$\hat{S}_{\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} S_{\lambda}(t) dt$$

このSampling function は様々な、数学的に興味ある性質をもっている。例えば

$$S_{\lambda} * S_{\lambda}(t) = \int S_{\lambda}(t-s)S_{\lambda}(s)ds = S_{\lambda}(t) = S_{\lambda}(-t) = S_{\lambda}^{*}(t),$$
$$\varphi_{n}(t) \stackrel{\triangle}{=} (2\lambda)^{-1}S_{\lambda}(t-n(2\lambda)^{-1})$$

 $\{\varphi_n\}=\{\varphi_n(\cdot); n=0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$ は Sampling 函数系という。Hilbert 空間 $BL_{\lambda}(=\{f\in L^2(-\infty,\infty); \hat{f}(\omega)=0\ (|\omega|>\lambda)\})$ に於いて, $\{\varphi_n\}$ は CONS(完全正規直交系)となる.この CONS $\{\varphi_n\}$ を用いて Fourier 展開すると,Shannon の Sampling 展開定理が得られる.

§5. Sampling Functions & 9 Conditional Expectation \(\simegappa \)

 $\forall \lambda > 0$ に対して、Hilbert 空間 $L^2(R)$ との射影作用素 P_{λ} が対応する:

$$P_{\lambda}f = S_{\lambda} * f \quad (\lambda > 0).$$

これを用い、 $\forall A \in \mathfrak{A}(L^2)$ ($L^2 \perp \mathcal{O}$ bounded operators の全体) に対し

$$A^{P_{\lambda}} \stackrel{\triangle}{=} E[A/P_{\lambda}] \stackrel{\triangle}{=} P_{\lambda}AP_{\lambda} + (1 - P_{\lambda})A(1 - P_{\lambda})$$

$$\mathfrak{A}_{\lambda} \stackrel{\triangle}{=} \{A^{P_{\lambda}}; A \in \mathfrak{A}\}$$

とおくと, operation $A \to A^{P_{\lambda}}$, i.e.

$$A \in \mathfrak{A}(L^2) \to A^{P_{\lambda}} \in \mathfrak{A}_{\lambda}$$

が得られるが、これに関して次の関係式が成立する:

$$(A^{P_{\lambda}}B)^{P_{\lambda}} = P_{\lambda}(A^{P_{\lambda}}B)P_{\lambda} + (1 - P_{\lambda})(A^{P_{\lambda}}B)(1 - P_{\lambda})$$

$$= P_{\lambda}(P_{\lambda}AP_{\lambda}B)P_{\lambda} + P_{\lambda}(1 - P_{\lambda})A(1 - P_{\lambda})BP_{\lambda}$$

$$+ (1 - P_{\lambda})(P_{\lambda}AP_{\lambda} + (1 - P_{\lambda})A(1 - P_{\lambda})B(1 - P_{\lambda})$$

$$= P_{\lambda}AP_{\lambda}BP_{\lambda} + 0 + 0 + (1 - P_{\lambda})A(1 - P_{\lambda})B(1 - P_{\lambda})$$

$$A^{P_{\lambda}}B^{P_{\lambda}} = (P_{\lambda}AP_{\lambda} + (1 - P_{\lambda})A(1 - P_{\lambda}))(P_{\lambda}BP_{\lambda} + (1 - P_{\lambda})B(1 - P_{\lambda}))$$

$$= P_{\lambda}AP_{\lambda}BP_{\lambda} + (1 - P_{\lambda})A(1 - P_{\lambda})B(1 - P_{\lambda})$$

$$\therefore (A^{P_{\lambda}}B)^{P_{\lambda}} = A^{P_{\lambda}}B^{P_{\lambda}} = (AB^{P_{\lambda}})^{P_{\lambda}}$$

$$(A^{*})^{P_{\lambda}} = (A^{P_{\lambda}})^{*}, \quad (\alpha A + \beta B)^{P_{\lambda}} = \alpha A^{P_{\lambda}} + \beta B^{P_{\lambda}}$$

が成立する. 実は、これはvon Neumann Algebras に於ける conditional expectation の典型的な model である、i.e.,

$$A^{P_{\lambda}} = E[A/P_{\lambda}] = E[A/\mathfrak{A}_{\lambda}]$$

である.

付記

von Neumman algebras 上の Conditional Expectations の一般的構成は論文 [11] の I で導入したが、2 つの New-Concept を発展して [11] の II, III, IV などと共に、非可換確率や、von Neumann 観測理論・情報理論などを目標とした展開がなされている。Reference に列記した論文は何れもそれに関わるものである.

これにより、作用素系 $\{A^{P_{\lambda}}; \lambda \in R, \lambda > 0\}$ の martingale の論述に関与していくテーマが予想される.

References

- [1] S. D. Chatterji, Martingale convergence and the Radom-Nikodym Theorem in Banach Spaces, Math. Scand. 23 (1968), 21-41.
- [2] J. L. Doob, Stochastic Processes, New York, 1954.
- [3] Mieko Hirahara, On the generalized Randon-Nikodym Theorem and Riesz's Representation Theorems, Thesis (1972), 230p.
- [4] M. Hirahara and H. Umegaki, Conditional expectation and channel operators, 京都大 学数理解析研究所講求録 **290** (1977), 42-56.
- [5] S-T C. Moy, Characterization of conditional expectation as a transformation function spaces, Pacific J. Math. 4 (1954), 47-65.
- [6] M. Nakamura and T. Turumaru, Expectations in an operator algebra, Tohoku Math. J. 6 (1954), 182-188.
- [7] M. Nakamura and H. Umegaki, On von Neumann theory of measurements in quantum statistics, Math. Japan. 7 (1962), 151-157.
- [8] R. Schatten, A Theory of Cross Spaces, Math. Studies 26 (1956).
- [9] I. E. Segal, Non-commutative extension of abstract integration, Ann. Math. 57 (1953), 401-457.
- [10] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27 (1948).
- [11] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, TMJ. 6 (1954), 177-181;
 II, ibid 8 (1956), 86-100; III Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959); IV ibid 14 (1962),
 59-85.
- [12] H. Umegaki and A. T. Barucha-Reid, Banach space-valued randon variables and tensor product of Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 31 (1970), 49-67.
- [13] 梅垣壽春, 情報数理の基礎, サイエンス社, 1995年.
- [14] 梅垣壽春, Sampling functions の Fourier Spectral 解析, 京都大学数理解析研究所, 1999 年 6 月