数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 199-205

BANACH空間の狭義凸性と非拡大写像に関する収束定理の関係

新潟大学・大学院自然科学研究科 鈴木 智成 (Tomonari Suzuki)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

1. 序

Banach 空間 E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $x, y \in E, \|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ ならば

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$$

が成立することである. $1 < p < \infty$ のとき, L^p は狭義凸であり, L^1, L^∞ は狭義凸ではない.

T を Banach 空間 E の閉凸集合 C 上の写像とする. 写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成立することである.

1953 年に Mann [8] は次のような iteration について考察した.

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} y_j, \qquad y_{n+1} = T(x_n)$$

ここで, T はある写像, $\{\beta_{nj}\}$ は 2 重数列で, $\beta_{nj} \geq 0$, $\beta_{nj} = 0 (j > n)$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} = 1$ を満たすものとする. 特に, 2 重数列 $\{\beta_{nj}\}$ が $\beta_{n+1,j} = (1 - \beta_{n+1,n+1})\beta_{nj} (j \leq n)$ を満たすとき, iteration は

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n \tag{1}$$

と表現できる. ここで, $\alpha_n = \beta_{n+1,n+1}$ である. この iteration に関連して, Outlaw [9], Reich [10] は次の定理を証明している.

定理 1 (Outlaw [9]). C を狭義凸な Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} T x_n + \frac{1}{2} x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

定理 2 (Reich [10]). E を一様凸でかつ Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とする. C を E の閉凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, 不動点を持つと仮定する. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$

を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき, (1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

Mann による iteration に関連して, 様々な条件下, 様々な写像に関する考察がなされている. 例えば, 次の定理が証明されている.

定理 3 (Atsushiba and Takahashi [1]). E を一様凸な Banach 空間で, Fréchet 微分可能なノルムを持つ, もしくは Opial 条件を満たす Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, S と T を C 上の可換でかつ共通不動点を持つ非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $\liminf_n \alpha_n > 0$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j x_n + (1-\alpha_n) x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ弱収束する.

Mann による iteration に関連しない収束定理についても紹介したい. 以下の定理は非拡大写像に関する最初のエルゴード定理である.

定理 4 (Baillon [3]). C を Hilbert 空間 E の有界閉凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, $x \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_n = \frac{x + Tx + T^2 x + \cdots + T^{n-1} x}{n}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

Bruck [4] はこの定理を拡張し, 一様凸で Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間という条件下で成立することを証明した.

本稿の目的は非拡大写像に関する収束定理において, Banach 空間の狭義凸性は本質的に必要な条件かどうかを論じることにある. 第 2 節では狭義凸性を必要としない収束定理を述べ, 第 3 節では逆に狭義凸性を本質的に必要としている収束定理を述べる. また, 本稿で定義されていない概念については, [13] を参照のこと.

2. 収束定理

Ishikawa [6] は定理 1 を次のように拡張した.

定理 5 (Ishikawa [6]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

Ishikawa はさらに次の定理を証明している.

定理 6 (Ishikawa [7]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ を C 上の非拡大写像の可換な族とする. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in (0,1)$ を定数とし, $x \in C, i = 1, 2, \ldots, k$ に対して, $S_i x = \alpha_i T_i x + (1 - \alpha_i)x$ と置く. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = [\prod_{n_{k-1}=1}^{n} [S_k \prod_{n_{k-2}-1}^{n_{k-1}} [S_{k-1} \cdots [S_3 \prod_{n_1=1}^{n_2} [S_2 \prod_{n_0=1}^{n_1} S_1]] \cdots]]]x_1$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ の共通不動点へ強収束する.

定理 6 は非常に興味深い定理であるが, 少し複雑である. 例えば, $k = 4$ のとき, この iteration は以下のようになる:

$$\begin{aligned}
x_2 =& S_4S_3S_2S_1x_1 \\
x_3 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_2 \\
x_4 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_3 \\
x_5 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1 \\
& S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_4
\end{aligned}$$

定理 3 の iteration を用いて, Suzuki [11] は次の定理を得た.

定理 7 ([11]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. S と T を C 上の可換な非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$$

を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j x_n + (1 - \alpha_n)x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ強収束する.

この定理を証明するにあたり, Suzuki は次の 3 つの補助定理を用いている.

補助定理 1. $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ を Banach 空間 E の元よりなる点列とする. $\{\alpha_n\}$ は $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. そして以下を仮定する: $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n)z_n$ である; $\liminf_j \|w_j - z_j\| < \infty$ である; 任意の自然数 k に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\|w_n - w_{n+k}\| - \|z_n - z_{n+k}\|\right) \leq 0$$

が成立する. このとき,

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \|w_{n+k} - z_n\| - (1 + \alpha_n + \cdots + \alpha_{n+k-1}) \cdot \liminf_{j\to\infty} \|w_j - z_j\| \right| = 0$$

がすべての自然数 k で成立する.

補助定理 2. $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ を Banach 空間 E の元よりなる有界な点列とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \le \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. そして以下を仮定する: $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1-\alpha_n) z_n$ である; 任意の自然数 k に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\|w_n - w_{n+k}\| - \|z_n - z_{n+k}\|\right) \le 0$$

が成立する. このとき, $\liminf_n \|w_n - z_n\| = 0$ が成立する.

補助定理 3. C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, S と T を C 上の可換な非拡大写像とする. このとき,

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j z - z \right\| = 0$$

を満たす $z \in C$ は S と T の共通不動点である.

3. 狭義凸性の特徴付け

Edelstein [5] および Bruck [4] に関連し, Atsushiba と Takahashi [2] は以下の定理を証明した.

定理 8 (Atsushiba and Takahashi [2]). C を狭義凸 Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, $x \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_n = \frac{x + Tx + T^2 x + \cdots + T^{n-1} x}{n} \tag{2}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

定理 8 において, 狭義凸性という条件は本質的である.

定理 9 ([12]). Banach 空間 E は以下の条件を満たすと仮定する: すべての E のコンパクト凸部分集合 C, すべての C 上の非拡大写像 T, 任意の $x \in C$ に対して, (2) で定義される点列が T の不動点へ強収束する. このとき, E は狭義凸である.

証明. E は狭義凸でないと仮定する. このとき, E の元 u と v で, $u + v \ne 0$, $\|u\| = \|v\| = \|u - v\|/2 = 1$ を満たすものが取れる. コンパクト凸集合 C および C 上の非拡大写像 T を次のように定義する:

$$C = \{\alpha u + \beta v : \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \beta \le 1\},$$

$$T(\alpha u + \beta v) = \max\{\beta - \alpha, 0\} u + \max\{\alpha - \beta, 0\} v.$$

T が非拡大であることを示す. C の元 $x=\alpha u+\beta v$ と $y=\lambda u+\mu v$ を固定する.

$$\begin{aligned}\|x-2v\| &= \|\alpha u-(2-\beta)v\| \\ &= (2+\alpha-\beta)\left\|\frac{\alpha}{2+\alpha-\beta}u-\frac{2-\beta}{2+\alpha-\beta}v\right\| \\ &= 2+\alpha-\beta\end{aligned}$$

より

$$\|x-y\| \geq |\,\|x-2v\|-\|y-2v\|\,| = |\alpha-\beta-\lambda+\mu|$$

が言えることに注意する. $\alpha\geq\beta$ かつ $\lambda\geq\mu$ の場合,

$$\|Tx-Ty\| = \|(\alpha-\beta)v-(\lambda-\mu)v\| = |\alpha-\beta-\lambda+\mu| \leq \|x-y\|$$

である. $\alpha\geq\beta$ かつ $\lambda<\mu$ の場合,

$$\begin{aligned}\|Tx-Ty\| &= \|(\alpha-\beta)v-(\mu-\lambda)u\| \\ &= (\alpha-\beta-\lambda+\mu)\left\|\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta-\lambda+\mu}v-\frac{\mu-\lambda}{\alpha-\beta-\lambda+\mu}u\right\| \\ &= \alpha-\beta-\lambda+\mu \\ &\leq \|x-y\|.\end{aligned}$$

である. よって T が非拡大であることが分かる. さて $x=u$ とする. このとき $T^{2n}x=u$ かつ $T^{2n+1}x=v$ である. ところで,

$$\left\|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}T^kx\right)-\frac{u+v}{2}\right\| \leq \left\|\frac{u-v}{2n}\right\| = \frac{1}{n}$$

および $T((u+v)/2)=0$ であるから, C の点列 $\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-1}T^kx\right)/n\right\}$ は不動点でない元 $(u+v)/2$ に収束している. これは仮定に矛盾する. □

Takahashi と Tamura [14] は次の強収束定理を証明している.

定理 10 (Takahashi and Tamura [14]). C を狭義凸 Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, S と T を C 上の非拡大写像で共通不動点を持つものとする. $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を

$$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leq\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1 \quad と \quad 0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\leq\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$$

を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x\in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1}=\alpha_nS\big(\beta_nTx_n+(1-\beta_n)x_n\big)+(1-\alpha_n)x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ強収束する.

定理 10 において, 狭義凸性という条件は本質的である.

定理 11 ([12]). Banach 空間 E は以下の条件を満たすと仮定する: すべての E のコンパクト凸部分集合で 0 を含む集合 C, すべての C 上の affine かつ非拡大な写像で 0 を不動点に持つ写像 S と T, 任意の $x_1 \in C$ に対して,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}S\left(\frac{1}{2}Tx_n + \frac{1}{2}x_n\right) + \frac{1}{2}x_n$$

で定義される点列が S と T の共通不動点へ強収束する. このとき, E は狭義凸である.

証明. E は狭義凸でないと仮定する. このとき, E の元 u と v で, $\|u\| = \|v\| = \|u+v\|/2 = 1$ と $u \neq v$ を満たすものが取れる. コンパクト凸集合 C および C 上の写像 S, T を次のように定義する:

$$C = \{\alpha u + \beta v : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1\},$$

$$S(\alpha u + \beta v) = (\alpha + \beta)u, \qquad T(\alpha u + \beta v) = (\alpha + \beta)v.$$

$S0 = T0 = 0$ かつ S と T が affine なのは明かである. $\alpha + \beta \leq 1$ and $\gamma + \delta \leq 1$ を満たすすべての $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \|S(\alpha u + \beta v) - S(\gamma u + \delta v)\| &= \|(\alpha + \beta)u - (\gamma + \delta)u\| \\ &= |(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)| \\ &= \big| \|\alpha u + \beta v\| - \|\gamma u + \delta v\| \big| \\ &\leq \|(\alpha u + \beta v) - (\gamma u + \delta v)\| \end{aligned}$$

が成立する. よって S は非拡大である. 同様に T が非拡大であることも分かる. さて, $x_1 = u$ とする. このとき, すべての自然数 n に対して, $x_n = u$ である. しかし u は T の不動点ではない. これは仮定に矛盾する. □

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Bull. Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains"*, Math. Japon., **52** (2000), 183–195.

[3] J. B. Baillon, *"Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert"*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, **280** (1975), 1511–1514.

[4] R. E. Bruck, *"A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces"*, Israel J. Math., **32** (1979), 107–116.

[5] M. Edelstein, *"On non-expansive mappings of Banach spaces"*, Proc. Comb. Phil. Soc., **60** (1964), 439–447.

[6] S. Ishikawa, *"Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space"*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 65–71.

[7] S. Ishikawa, *"Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings"*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.
[8] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.
[9] C. L. Outlaw, *"Mean value iteration of nonexpansive mappings in a Banach space"*, Pacific J. Math., **30** (1969), 747–750.
[10] S. Reich, *"Weak convergence theorems for nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.
[11] T. Suzuki, *"On strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, submitted.
[12] T. Suzuki and W. Takahashi, *"Weak and strong convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces"*, to appear in Nonlinear Anal.
[13] 高橋渉: "凸解析と不動点近似", 横浜図書 (2000).
[14] W. Takahashi and T. Tamura, *"Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings"*, J. Convex Anal., **5** (1998), 45–56.