数理解析研究所講究録
1189 巻 2001 年 43-51

Rosenblum-Kleinecke の定理について

東北大学　木村文彦 (Fumihiko Kimura)
Mathematical Institute,
Tohoku Univ.

概要

In this talk, we shall partly calculate the approximate point spectrum and the approximate defect spectrum of an analytic elementary operator on $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ and give an elementary proof of Rosenblum-Kleinecke's result about the spectrum of generalized derivations(or elementary multiplications.) Moreover, we shall study the structure of several types of elementary opeartors on $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

1　導入

$\mathcal{A}$ を unital な複素バナッハ環とする. $\{a_1, \cdots, a_n\}$, $\{b_1, \cdots, b_n\}$ が各々 $\mathcal{A}$ の中の commuting n-tuple であるとき,

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x b_j \quad (x \in \mathcal{A})$$

で定義される写像 Φ を $\mathcal{A}$ 上の elementary operator という. Φ は $\mathcal{A}$ 上の有界線型作用素である. (i.e. $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$.)

Example 1.1.

$a, b \in \mathcal{A}$ を固定したとき,

(i) $\delta_{a,b}(x) = ax - xb \quad (x \in \mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ 上の generalized derivation とよばれる.

(ii) $\chi_{a,b}(x) = axb \quad (x \in \mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ 上の elementary multiplication とよばれる.

これらの作用素族は元来, バナッハ空間（あるいはヒルベルト空間）上の作用素方程式を解く目的で導入されたものであり, その観点から elementary operator の $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ におけるスペクトル $\sigma(\Phi)$ に関する考察が昔から盛んに行なわれてきた.

Rosenblum [7] による次の定理は, それらの研究の端緒ともいうべきものである.

Theorem 1.2. (Rosenblum [7])

$a, b \in \mathcal{A}$ とする.

(i) $\omega \notin \sigma(a) - \sigma(b)$ $\left(= \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \sigma(a), \beta \in \sigma(b)\}\right)$ ならば, $\omega \notin \sigma(\delta_{a,b})$. さらに任意の $x \in \mathcal{A}$ に対して,

$$(\delta_{a,b} - \omega)^{-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} [a - (\omega + z)]^{-1} x (z - b)^{-1} dz.$$

（D は $\sigma(b) \subset D$, $\sigma(a - \omega) \cap \overline{D} = \emptyset$ であるような Cauchy domain, ∂D はその境界.）

(ii) $\sigma(\delta_{a,b}) \subseteq \sigma(a) - \sigma(b)$.

さらに Kleinecke は, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{E})$（$\mathcal{E}$ はバナッハ空間） ならば, 上定理の (ii) で等号が成立することも証明した.（この辺りの経緯は [6],[7] などに詳しいが, Kleinecke 自身はその証明を公にしていないようである.）後年, その Kleinecke の主張は拡張された形で肯定的に解決され, 完全な証明も付けられた. Lumer-Rosenblum [6] によるその結果を紹介する前に, analytic elementary operator の定義を述べる.

Definition 1.3. (analytic elementary operator)

$a, b \in \mathcal{A}$, $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset \mathrm{Analy}(\sigma(a))$, $\{g_1, \cdots, g_n\} \subset \mathrm{Analy}(\sigma(b))$ とするとき,

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(a) x g_j(b) \quad (x \in \mathcal{A})$$

で定義される $\mathcal{A}$ 上の elementary operator Ψ を analytic elementary operator という.（ここで, $x \in \mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Analy}(\sigma(x))$ は, x のスペクトル $\sigma(x)$ の近傍 U_f 上の正則（解析的）関数 $f = f(\lambda)$ の全体を表し, $f(x)$ は x の f による解析関数カルキュラスである.）

Theorem 1.4. (Lumer-Rosenblum [6])

$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ とするとき, analytic elementary operator

$$\Psi(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j(A) X g_j(B) \quad (X \in \mathcal{L}(\mathcal{E}))$$

のスペクトルは

$$\sigma(\Psi) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha) g_j(\beta) \;\middle|\; \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B) \right\}$$

であたえられる.

この定理は, $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ における analytic elementary operator のスペクトルを完全に決定したもので, Rosenblum-Kleinecke の結果の大幅な拡張になっている. 実際, Ψ に $\delta_{A,B}$ あるいは $\chi_{A,B}$ を代入することで直ちに次の系が得られる.

Corollary 1.5.

$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ とするとき,

(i) $\sigma(\delta_{A,B}) = \sigma(A) - \sigma(B) \ \Big(= \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}\Big)$,

(ii) $\sigma(\chi_{A,B}) = \sigma(A)\sigma(B) \ \Big(= \{\alpha\beta \mid \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}\Big)$.

なお, 一般のバナッハ環 $\mathcal{A}$ について Theorem 1.4.（あるいは Corollary 1.5.）に相当することが成立するかどうかは知られていないようである. Theorem 1.4. はバナッハ空間上の作用素方程式に対して, その解の存在や一意性の問題を考察するための強力な道具となるが, 方程式やその解の性質をさらに詳しく究明する上で, elementary operator の全スペクトルの構造のみではなく, その色々な部分集合（例えば点スペクトル, 連続スペクトルなど）の構造がわかっていると都合のよいことが多い.

本講演では "Integral Equations and Operator Theory" に投稿中（2000 年 12 月 20 日現在）の論文 [5] の内容に関する報告をおこなう. 筆者は, [5] において $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ における analytic elementary operator の近似点スペクトルなど 2 種類のスペクトルを部分的に計算し, さらにその結果を用いて Corollary 1.5. に従来のものとは異なる証明をあたえるなど, 幾つかの副次的な結果を得ることができた.

2 Davis-Rosenthal の結果とその拡張

Definition 2.1.

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ に対して,

$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ is not bounded below}\}$

$\sigma_{ad}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ is not surjective}\}$

と定め, 各々 T の approximate point spectrum, approximate defect spectrum という. ($\lambda - T$ が bounded below であるとは $c > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathcal{E}$ に対して $\|(\lambda - T)x\| \geq c\,\|x\|$ が成立することである. 従って, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ とは, 単位ベクトルの列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすものが存在することと同等である.)

$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{ad}(T)$ が成立する. また$\sigma_{ap}(T)$ が $\mathbb{C}$ のコンパクト集合であることや, $\sigma(T)$ の境界が $\sigma_{ap}(T)$ に包含されることなどはよく知られている結果である. 次の補題については例えば Rudin [8], Chapter 4 などを参照されたい.

Lemma 2.2.

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ の Banach space adjoint を $T^{\dagger} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}')$ とする ($\mathcal{E}'$ は $\mathcal{E}$ の双対空間.) このとき $\sigma_{ap}(T^{\dagger}) = \sigma_{ad}(T)$ かつ $\sigma_{ad}(T^{\dagger}) = \sigma_{ap}(T)$.

Corollary 2.3.

任意の $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ に対して$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{ad}(T)$. ($\partial\sigma(T)$ は $\sigma(T)$ の境界.)

Corollary 2.3. により, $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{ad}(T)$ の右辺は disjoint union にはならないことがわかる.

さらにヒルベルト空間上の有界線型作用素については, 次が成立する.(Conway [2].)

Lemma 2.4.

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ とするとき, $\sigma_{ap}(T) = \sigma_l(T)$ かつ $\sigma_{ad}(T) = \sigma_r(T)$.

(ここで, $\sigma_l(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ is not left invertible}\}$, $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ is not right invertible}\}$.)

一般のバナッハ空間上の有界線型作用素については Lemma 2.4. は成り立たないことが知られている.

1974 年に, Davis と Rosenthal が $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 上の generalized derivation $\delta_{A,B}$ について, $\sigma_{ap}(\delta_{A,B})$ と $\sigma_{ad}(\delta_{A,B})$ の具体的な form をあたえた ([3]). 筆者は [5] で, 彼らの手法を修正することによって, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 上の analytic elementary operator Ψ について $\sigma_{ap}(\Psi)$ と $\sigma_{ad}(\Psi)$ を（部分的にではあるが）求めることができた. この節ではそれらを解説する.

Theorem 2.5. (Davis-Rosenthal [3])

$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ とするとき,

(i) $\sigma_{ap}(\delta_{A,B}) = \sigma_{ap}(A) - \sigma_{ad}(B)$,

(ii) $\sigma_{ad}(\delta_{A,B}) \supseteq \sigma_{ad}(A) - \sigma_{ap}(B)$.

$\mathcal{E}$ がヒルベルト空間ならば, (ii) も等号が成立する.（一般のバナッハ空間の場合には, 等号が成立しない例を構成できることが知られている.）

筆者はこの Theorem 2.5. に着目し, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 上の analytic elementary operator Ψ について次が成立すると予想した.

Conjecture 2.6.

$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ とするとき, analytic elementary operator

$$\Psi(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j(A) X g_j(B) \quad (X \in \mathcal{L}(\mathcal{E}))$$

に対して,

(i) $\sigma_{ap}(\Psi) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha) g_j(\beta) \mid \alpha \in \sigma_{ap}(A), \beta \in \sigma_{ad}(B) \right\}$,

(ii) $\sigma_{ad}(\Psi) \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha) g_j(\beta) \mid \alpha \in \sigma_{ad}(A), \beta \in \sigma_{ap}(B) \right\}$.

さらに, $\mathcal{E}$ がヒルベルト空間であれば, (ii) についても等号が成立すると予想した.

筆者は, この予想の一部分に当たる次の定理を証明した.（証明の鍵となるのは Lemma 2.2. である.）

Theorem 2.7. (Kimura [5])

(i) $\sigma_{ap}(\Psi) \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha)g_j(\beta) \;\middle|\; \alpha \in \sigma_{ap}(A), \beta \in \sigma_{ad}(B) \right\}$,

(ii) $\sigma_{ad}(\Psi) \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha)g_j(\beta) \;\middle|\; \alpha \in \sigma_{ad}(A), \beta \in \sigma_{ap}(B) \right\}$.

なお, (i) で等号が成立するかどうか, および $\mathcal{E}$ がヒルベルト空間の場合に (ii) で等号が成立するかどうかは, いまのところ証明できていない.

しかし, elementary multiplication $\chi_{A,B}$ に関しては, Theorem 2.5. と類似の結果が成立することを証明できた.

Theorem 2.8. (Kimura [5])

$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ とするとき,

(i) $\sigma_{ap}(\chi_{A,B}) = \sigma_{ap}(A)\sigma_{ad}(B)$,

(ii) $\sigma_{ad}(\chi_{A,B}) \supseteq \sigma_{ad}(A)\sigma_{ap}(B)$.

$\mathcal{E}$ がヒルベルト空間ならば, (ii) も等号が成立する（一般のバナッハ空間の場合には, 等号の成立しない例が構成できる.）

3 Rosenblum-Kleinecke の結果の別証明

筆者は, 2 節の Theorems 2.5.,2.7.,2.8. が 1 節における Lumer-Rosenblum の定理 (Theorem 1.4.) とは独立に証明できたことに着目し, 2 節の一連の結果を用いて Theorem 1.4. に [6] とは別の証明をあたえることができるのではないかと考えた（実際, Herrero は [4] において, $\mathcal{E}$ がヒルベルト空間の場合, Theorem 2.5. から直ちに Rosenblum-Kleinecke の結果が導かれると示唆しているのだが, その証明は述べられていない.） そこでまず $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ における $\delta_{A,B}$ と $\chi_{A,B}$ というふたつの簡単な場合について考察してみた結果, Theorem 1.4. の系である Corollary 1.5. に従来のものとは異なる証明を付けることができた ([5]). それにより, Herrero のいう「$\mathcal{E}$ がヒルベルト空間であること」は本質的でないこともわかった.

まず, 次の補題が証明される. 鍵となるのは Corollary 2.3. である.

Lemma 3.1. (Kimura [5])

任意の $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ に対して,

(i) $\sigma(A) - \sigma(B) = \{\sigma_{ap}(A) - \sigma_{ad}(B)\} \cup \{\sigma_{ad}(A) - \sigma_{ap}(B)\}$,

(ii) $\sigma(A)\sigma(B) = \{\sigma_{ap}(A)\sigma_{ad}(B)\} \cup \{\sigma_{ad}(A)\sigma_{ap}(B)\}$.

Theorems 2.5.,2.8., 並びに Lemma 3.1. により, 次が導かれる.

$$\sigma(\delta_{A,B}) \supseteq \sigma(A) - \sigma(B),$$

$$\sigma(\chi_{A,B}) \supseteq \sigma(A)\sigma(B).$$

さらに, $\mathcal{E}$ がヒルベルト空間であるときには ($\supseteq$) を ($=$) に置き換えてよいから, これで Corollary 1.5. の証明が完成したことになる. Lumer-Rosenblum [6] による従来の証明では, 作用素環の Gelfand spectral theory, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ における topological zero divisor の分類など, 幾つかの technique を用いているが, 上記の証明はそれらを用いていない.

作用素のスペクトルを approximate point spectrum, approximate defect spectrum という 2 種類に分離して考察することにより, ヒルベルト空間の場合の証明が非常に簡潔かつ初等的になるということは興味深い.

一般のバナッハ空間の場合にも, ($\supseteq$) の証明が上記のように済む点が従来より簡潔になっていると思う. (この場合の ($\subseteq$) の証明は, 作用素環の Gelfand spectral theory を用いる [6] の手法が一番妥当であると考える.)

また, 一般の analytic elementary operator Ψ に関しては, Lemma 3.1. に相当する部分が証明できておらず, 従って Theorem 1.4. 本体に別証明をあたえることには成功していない.

4 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の elementary operator への応用

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して, $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ をその Hilbert space adjoint とする.

Definition 4.1.

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ とする.

(i) T が dominant 作用素であるとは, $\mathrm{ran}(\lambda - T) \subseteq \mathrm{ran}(\lambda - T)^*$ がすべての $\lambda \in \sigma(T)$ に対して成立する場合をいう.

(ii) T が p-hyponormal 作用素 $(0 < p < \infty)$ であるとは, $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ が成立する場合をいう.

(iii) T が log-hyponormal 作用素であるとは, T が invertible かつ $\log(T^*T) \geq \log(TT^*)$ が成立する場合をいう.

Lemma 4.2. (Kimura [5])

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が dominant, p-hyponormal $(0 < p < \infty)$, log-hyponormal のいずれかであれば,

$$\sigma(T) = \sigma_{ad}(T).$$

証明の概略：

T^* と $T^\dagger$ が共役ユニタリー同値であることと, Lemma 2.2. に注意すると,

$$\sigma_{ap}(T^*) = \overline{\sigma_{ad}(T)},\ \sigma_{ad}(T^*) = \overline{\sigma_{ap}(T)}$$

であることがわかる（ここで, $E \subseteq \mathbb{C}$ に対して, $\overline{E} = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in E\}$.）

そこで, T の normal approximate point spectrum $\sigma_{na}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists$ unit vectors $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0,\ \|(\lambda - T)^* x_n\| \to 0\ (n \to \infty)\}$ を考えると, $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{na}(T)$ であることが $\sigma(T) = \sigma_{ad}(T)$ であるための十分条件をあたえることが示せる.

Dominant 作用素, p-hyponormal 作用素, log-hyponormal 作用素は各々, Chō-Huruya [1], Stampli-Wadhwa [9], Tanahashi[11] により, $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{na}(T)$ を満たすことが証明されているので, 求める主張を得る.

□

Lemma 4.2. と Theorems 1.4.,2.7. より直ちに次の定理が得られる.

Theorem 4.3. (Kimura [5])

$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ とするとき, analytic elementary operator

$$\Psi(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j(A) X g_j(B)$$

について A, B^* がともに {dominant, p-hyponormal, log-hyponormal} に属せば

$$\sigma(\Psi) = \sigma_{ad}(\Psi).$$

A^*, B がともに {dominant, p-hyponormal, log-hyponormal} に属せば

$$\sigma(\Psi) = \sigma_{ap}(\Psi).$$

参考文献

[1] M. Chō and T. Huruya, *p-hyponormal operators for* $0 < p < 1/2$, Comment. Math. **33** (1993), pp. 23–29.

[2] J. B. Conway, *Subnormal operators*, Res. Notes in Math. **51** (1983).

[3] C. Davis and P. Rosenthal, *Solving linear operator equations*, Can. J. Math. **26** (1974), pp. 1384–1389.

[4] D. A. Herrero, *Approximation of Hilbert space operators*, vol.1, Second edition, Res. Notes in Math. **224** (1989).

[5] F. Kimura, *The simple proof of Rosenblum-Kleinecke's result and its applications*, preprint.

[6] G. Lumer and M. Rosenblum, *Linear operator equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), pp. 32–41.

[7] M. Rosenblum, *On the operator equation* $BX - XA = Q$, Duke. Math. J. **23** (1956), pp. 263–269.

[8] W. Rudin, *Functional analysis*, McGrow-Hill series in higher mathematics (1973).

[9] J. G. Stampfli and B. L. Wadhwa, *On dominant operators*, Mh. Math. **84** (1977), pp. 143–153.

[10] K. Tanahashi, *On log-hyponormal operators*, Integr. equ. oper. theory. **34** (1999), pp. 364–372.

[11] K. Tanahashi, *Putnam's inequality for log-hyponormal operators*, preprint.