数理解析研究所講究録
1190 巻 2001 年 22-34

交代群のqアナローグについて

藤沢高等職業技術校　三橋秀生 (Hideo Mitsuhashi)

Fujisawa Advanced Vocational Skill Training School

神奈川県藤沢市川名 290-2

1 概要

対称群の既約表現をその部分群である交代群に制限した場合の分岐則は古くから知られており、その分岐則の記述は対称群の既約表現類をパラメトライズするヤング図形を用いて述べることが出来る。A 型ヘッケ代数$\mathcal{H}_n(q)$は対称群のq-アナローグとして考えることが出来、その既約表現類は対称群のときと同様、ヤング図形を用いてパラメトライズされることが知られている。そこで$\mathcal{H}_n(q)$の中に、対称群と交代群の間に生じる分岐則と同様の現象が成り立つ部分代数（交代群のq-アナローグ）を具体的に構成し、その生成元と基本関係式を具体的に求めることを試みた。また、$\mathcal{H}_n(q)$の自己同型から、生成元によらない形で交代群のq-アナローグを定義することも出来るので、その説明を行う。最後に、ヘッケ代数と今回構成した部分代数との間の分岐則についての説明を行う。

2 対称群と交代群の間の表現の分岐則

まず初めに、対称群と交代群の生成元と基本関係式について解説し、本研究の動機となった対称群と交代群の間の既約表現に関する分岐則について述べる。

$\mathfrak{S}_n$をn次対称群とする。$\mathfrak{S}_n$は以下のような生成元と基本関係式を持つ。

生成元　$s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$

基本関係式

(1) $s_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$

(2) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$

(3) $s_i s_j = s_j s_i \qquad (|i-j| > 1)$

$n > 1$ に対し、n 次の交代群 $\mathfrak{A}_n$ は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群で、$\mathfrak{S}_n$ の元のうち、生成元の偶数個の積からなるものの全体である。$x_i = s_1 s_{i+1}$ とおくと、$x_i (i = 1, 2, \ldots, n-2)$ は $\mathfrak{A}_n$ の生成元となり、$\mathfrak{A}_n (n > 2)$ は以下のような生成元と基本関係式を持つことが知られている（[16]）。

生成元　$x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$

基本関係式

(1) $x_1^3 = x_2^2 = \ldots = x_{n-2}^2 = 1$

(2) $(x_{i-1} x_i)^3 = 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-2)$

(3) $(x_i x_j)^2 = 1 \qquad (|i-j| > 1)$

$\mathfrak{A}_2$ は単位元のみからなる群である。また、$|\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{S}_n|/2$ であることにも注意しておく。

Λ_n を n 次のヤング図形全体のなす集合とするとき、$\mathfrak{S}_n$ の複素既約表現の同値類全体と Λ_n とは 1 対 1 に対応することはよく知られている。$\lambda \in \Lambda_n$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の表現を π_λ とするとき、π_λ の n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ への制限に関する分岐則は以下のとおりである。

まず、${}^t\lambda$ を λ と共役なヤング図形とする。${}^t\lambda = \lambda$ のとき、λ は自己共役であるという。π_λ の $\mathfrak{A}_n$ への制限を $\tilde{\pi}_\lambda$ と書くことにすれば、$\tilde{\pi}_\lambda$ の既約性は λ が自己共役かそうでないかによって異なり、場合分けすると以下のようになる。

(1) λ が自己共役でない場合、$\tilde{\pi}_\lambda$ は $\mathfrak{A}_n$ の既約表現であり、$\tilde{\pi}_\lambda \cong \tilde{\pi}_{{}^t\lambda}$ である。

(2) λ が自己共役である場合、$\tilde{\pi}_\lambda$ の次数は偶数であり、$\tilde{\pi}_\lambda$ は次数が $\tilde{\pi}_\lambda$ の半分である互いに非同値な 2 つの既約表現 $\tilde{\pi}_\lambda^+$ と $\tilde{\pi}_\lambda^-$ に既約分解する。

これらの表現は互いに非同値であり、$\mathfrak{A}_n$ の既約表現すべてをわたることが知られている。

すなわち、以下の定理が成り立つ。

定理 2.1 ([15]). Λ_n の要素のうち、自己共役でないものを $\lambda_1, {}^t\lambda_1, \lambda_2, {}^t\lambda_2, \ldots, \lambda_p, {}^t\lambda_p$ とし、自己共役なものを $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{p+q}$ とする。このとき、$p+2q$ 個の $\mathfrak{A}_n$ の既約表現 $\tilde{\pi}_{\lambda_1}, \tilde{\pi}_{\lambda_2}, \ldots, \tilde{\pi}_{\lambda_p}, \tilde{\pi}^+_{\lambda_{p+1}}, \tilde{\pi}^-_{\lambda_{p+1}}, \tilde{\pi}^+_{\lambda_{p+2}}, \tilde{\pi}^-_{\lambda_{p+2}}, \ldots, \tilde{\pi}^+_{\lambda_{p+q}}, \tilde{\pi}^-_{\lambda_{p+q}}$ は互いに非同値で、これらは $\mathfrak{A}_n$ の既約表現の完全代表系をなす。

3 交代群の q アナローグ $\mathfrak{A}_n(q)$ の構成

我々の目標は、A 型ヘッケ代数 $\mathcal{H}_n(q)$ が対称群の q-アナローグであることを考えて、$\mathcal{H}_n(q)$ に対称群と交代群の間に成り立つ分岐則を満足するような、次元が半分の部分代数を具体的に構成することである。

q を複素数とする。A 型ヘッケ代数 $\mathcal{H}_n(q)$ を、以下の生成元と基本関係式を持つ $\mathbb{C}$ 上の代数として話を進める。

生成元 $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$

基本関係式

(1) $g_i^2 = (q-1)g_i + q \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$

(2) $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$

(3) $g_i g_j = g_j g_i \qquad (|i-j| > 1)$

また、$\mathcal{H}_n(q)$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として考えたとき、$\mathcal{H}_n(q)$ の次元について以下のことが知られている。

まず、$\mathcal{H}_n(q)$ の元から成る次のような集合を考える。

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{1, g_1\} \\
S_2 &= \{1, g_2, g_2 g_1\} \\
&\vdots \\
S_i &= \{1, g_i, g_i g_{i-1}, \ldots, g_i g_{i-1} \ldots g_2 g_1\} \\
&\vdots \\
S_{n-1} &= \{1, g_{n-1}, g_{n-1} g_{n-2}, \ldots, g_{n-1} g_{n-2} \ldots g_2 g_1\}
\end{aligned}
$$

このとき、$\mathcal{H}_n(q)$ に関して次のことが成り立つ。

命題 3.1 ([9]).

$$\{U_1 U_2 \ldots U_{n-1} \mid U_i \in S_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)\}$$

は $\mathcal{H}_n(q)$ を生成する。従って、$\mathcal{H}_n(q)$ の次元は高々$n!$ である。

後出の $\mathcal{H}_n(q)$ の既約表現に関する定理 4.1 と組み合わせることにより、q を $q^k \neq 1 (k = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす 0 ではない複素数とするとき、命題 3.1 の集合が $\mathcal{H}_n(q)$ の複素ベクトル空間としての基底を張ることがわかる。

命題 3.1 の集合の中で g_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の偶数個の積のものは $n!/2$ 個あることに注意しておく。

交代群のアナロジーを考え、$\mathcal{H}_n(q)$ の中に生成元の偶数個の積から生成される、次元が $\mathcal{H}_n(q)$ の半分の $\mathbb{C}$ 部分代数を構成したいが、単純に g_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の偶数個の積から生成される部分代数を考えようとすると、g_i に関する基本関係式 (1) のために表示の仕方によっては奇数個の積の項が現われ、ベクトル空間としての次元が $\mathcal{H}_n(q)$ の半分を超えてしまう恐れが生じ、具合が悪い。

そこで、$\mathcal{H}_n(q)$ の別の生成元を考える。

$q \neq -1$ とし、$f_i = (q+1)^{-1}\{2g_i - (q-1)\}$ によって $f_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を定義し、f_i を生成元としたときの $\mathcal{H}_n(q)$ の生成元と基本関係式を求めると次のようになる。

生成元　$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$

基本関係式

(1) $f_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$

(2) $f_i f_{i+1} f_i = f_{i+1} f_i f_{i+1} - \left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 (f_i - f_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$

(3) $f_i f_j = f_j f_i \qquad (|i-j| > 1)$

この関係式をみると、$f_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の偶数個の積で表された元は、基本関係式を用いて他の表し方をしても、やはり偶数個の積の線型結合であることがわかる。

また、$\mathcal{H}_n(q)$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として考えたとき、f_i について g_i のときと同様のことが成り立つ。すなわち、$\mathcal{H}_n(q)$ の元から成る次のような集合を考える。

$$T_1 = \{1, f_1\}$$

$$T_2 = \{1, f_2, f_2 f_1\}$$

$$\vdots$$

$$T_i = \{1, f_i, f_i f_{i-1}, \ldots, f_i f_{i-1} \ldots f_2 f_1\}$$

$$\vdots$$

$$T_{n-1} = \{1, f_{n-1}, f_{n-1} f_{n-2}, \ldots, f_{n-1} f_{n-2} \ldots f_2 f_1\}$$

このとき、$\mathcal{H}_n(q)$ の基底に関して次のことが成り立つ。

命題 3.2.

$$\{U_1 U_2 \ldots U_{n-1} \mid U_i \in T_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)\}$$

は $\mathcal{H}_n(q)$ を生成する。

再び、上記の集合の中で f_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の偶数個の積のものは $n!/2$ 個あることに注意しておく。

交代群のときのアナロジーをもちいて、$f_1 f_{i+1} (i = 1, 2, \ldots, n-2)$ で生成される $\mathcal{H}_n(q)$ の $\mathbb{C}$ 部分代数 $\mathfrak{A}_n(q)$ を考える。

定義 3.3. $n>2$ とし、$q\neq -1$ とする。このとき、$\mathfrak{A}_n(q)$ を $f_1f_{i+1}(i=1,2,\dots,n-2)$ で生成される $\mathcal{H}_n(q)$ の $\mathbb{C}$ 部分代数として定義する。$n=2$ に対しては、$\mathfrak{A}_2(q)$ は単位元のみから生成される $\mathcal{H}_n(q)$ の $\mathbb{C}$ 部分代数とする。

$\mathfrak{A}_n(q)$ の定義と上で述べたことから、次の命題が従う。

命題 3.4. $\mathfrak{A}_n(q)$ は $f_i(i=1,2,\dots,n-1)$ の偶数個の積の線型結合全体からなる $\mathcal{H}_n(q)$ の $\mathbb{C}$ 部分代数に一致し、ベクトル空間としての次元は高々$n!/2$ である。

証明の概略. $f_1f_{i+1}(i=1,2,\dots,n-2)$ の積が $f_i(i=1,2,\dots,n-1)$ の偶数個の積の線型結合になることは $f_i(i=1,2,\dots,n-1)$ の基本関係式からあきらかなので、あとは $f_jf_k(1\leq j,k\leq n-1\quad j\neq k)$ が $f_1f_{i+1}(i=,2,\dots,n-2)$ によって生成されることを確かめれば良い。

$j=1,k>1$ または $j>2,k=1$ のときは、f_jf_k そのものが生成元である。

$j>2,k>2$ のときは、$f_jf_k=f_1f_jf_1f_k$ である。

$j=2$ のときは、

$$f_2f_k=(f_1f_2)^2f_1f_k-\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2(f_1f_k-f_1f_2f_1f_k)$$

ベクトル空間としての次元が高々$n!/2$ であることは、集合

$$\{U_1U_2\dots U_{n-1}\mid U_i\in T_i(i=1,2,\dots,n-1)\}$$

のなかで、偶数個の $f_i(i=1,2,\dots,n-1)$ の積から成るものが $n!/2$ 個であることから従う。 □

$f_1f_{i+1}(i=1,2,\dots,n-2)$ を生成元とする $\mathcal{H}_n(q)$ の $\mathbb{C}$ 部分代数が定義できたので、次に生成元の基本関係式を求めると以下のようなる。

定理 3.5. $y_i=f_1f_{i+1}(i=1,2,\dots,n-2)$ と置いたとき、y_i に関する基本関係式は以下のとおりである。

(1) $y_1^3 = -\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2 (y_1^2 - y_1) + 1$

(2) $y_i^2 = 1 \qquad (i > 1)$

(3) $(y_{i-1}y_i)^3 = -\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2 \left\{(y_{i-1}y_i)^2 - y_{i-1}y_i\right\} + 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-2)$

(4) $(y_i y_j)^2 = 1 \qquad (|i-j| > 1)$

さらに、上記の生成元 $y_i (i = 1, 2, \ldots, n-2)$ と基本関係式は $\mathfrak{A}_n(q)$ の表示を与える。

以上が、交代群の生成元と基本関係式による定義であるが、$\mathfrak{A}_n(q)$ を $\mathcal{H}_n(q)$ の自己同型によって定義する方法もあるので、それを解説する。

$\mathcal{H}_n(q)$ には、Goldman's involution と呼ばれる次のような自己同型があることが知られている。[5][11]

$$\wedge : \quad \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow \mathcal{H}_n(q)$$

$$g_i{}^\wedge = (q-1) - g_i \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$\wedge$ は $\wedge^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_n(q)}$ を満たしており、さらに $f_i{}^\wedge = -f_i \ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ である。よって、命題 3.2 から、$\mathfrak{A}_n(q)$ は $\wedge$ の固有値 1 の固有空間、即ち

$$\mathfrak{A}_n(q) = \{g \in \mathcal{H}_n(q) \mid g^\wedge = g\}$$

として定義できることが分かる。

4 A 型ヘッケ代数 $\mathcal{H}_n(q)$ の直交形式による既約表現

ここでは次章において、$\mathcal{H}_n(q)$ と $\mathfrak{A}_n(q)$ の間の既約表現の分岐則を調べる準備のため、H.Wenzl[14] による $\mathcal{H}_n(q)$ の直交形式による既約表現の構成について説明する。

$\lambda \in \Lambda_n$ に対し、形が λ である標準盤の集合を $\mathrm{STab}(\lambda)$ とする。V_λ を $\{v_T \mid T \in \mathrm{STab}(\lambda)\}$ を基底とする $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする。$g_i \in \mathcal{H}_n(q)$ に対し V_λ 上の線型変換 $\pi_\lambda(g_i)$ を以下のように定める (対称群の既約表現と同じ記号を使い、以降は π_λ は $\mathcal{H}_n(q)$ の作用として考える)。

(1) T 上、i と $i+1$ が同じ行に現れる場合、$\pi_\lambda(g_i)v_T = qv_T$

(2) T 上、i と $i+1$ が同じ列に現れる場合、$\pi_\lambda(g_i)v_T = -v_T$

(3) それ以外の場合、T において、i と $i+1$ を入れ替えたものは標準盤でありそれを $\bar{T}$ とおく。このとき、$\pi_\lambda(g_i)$ は V_λ の部分空間 $\mathbb{C}v_T \oplus \mathbb{C}v_{\bar{T}}$ に対して以下のように作用する。

$$\pi_\lambda(g_i)(v_T, v_{\bar{T}}) = (v_T, v_{\bar{T}})M(d_i)$$

ここで、$M(d_i)$ は以下で定義される 2×2 行列である。

$$M(d_i) = \frac{1}{1-q^{d_i}} \begin{bmatrix} q^{d_i}(1-q) & \sqrt{q(1-q^{d_i-1})(1-q^{d_i+1})} \\ \sqrt{q(1-q^{d_i-1})(1-q^{d_i+1})} & -(1-q) \end{bmatrix}$$

d_i は T における i から $i+1$ への軸性距離（axial distance）であり、i が r 行 c 列にあり、$i+1$ が r' 行 c' 列にあるとき、$c'-r'-c+r$ で定義される整数である。

$q \neq 0$ で $q^k \neq 1(k=1,2,\ldots,n-1)$ であるとき、上の行列は well-defined である。

定理 4.1 ([14]). q を $q^k \neq 1(k=1,2,\ldots,n)$ を満たす 0 ではない複素数とする。このとき、上で定義した π_λ は $\mathcal{H}_n(q)$ の複素既約表現となる。さらに、$\lambda,\mu \in \Lambda_n$ に対して、$\lambda \neq \mu$ ならば π_λ と π_μ は非同値であり、$\{\pi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ は $\mathcal{H}_n(q)$ の複素既約表現の完全代表系をなす。

この定理の「完全代表系をなす」の部分は先の命題 3.1 の結果（$\mathcal{H}_n(q)$ の次元が高々 $n!$）と実際に既約表現の次数を調べることにより導かれる。この結果から、$\mathcal{H}_n(q)$ の次元が $n!$ であることと半単純性が示される。

上で定義した $\mathcal{H}_n(q)$ の既約表現を f_i に関して表した場合を考える。分岐則（特に、$\tilde{\pi}_\lambda \cong \tilde{\pi}_{t\lambda}$）を確かめることが目的なので、$\pi_\lambda$ の V_λ への作用と $\pi_{t\lambda}$ の $V_{t\lambda}$ への作用を同時に表し比較する。

命題 4.2. $\lambda \in \Lambda_n$ に対し、π_λ の V_λ への作用と $\pi_{t\lambda}$ の $V_{t\lambda}$ への作用は以下のようになる。

(1) T 上、i と $i+1$ が同じ行に現れる場合、$\pi_\lambda(f_i)v_T = v_T$、$\pi_{{}^t\lambda}(f_i)v_{{}^tT} = -v_{{}^tT}$

(2) T 上、i と $i+1$ が同じ列に現れる場合、$\pi_\lambda(f_i)v_T = -v_T$、$\pi_{{}^t\lambda}(f_i)v_{{}^tT} = v_{{}^tT}$

(3) それ以外の場合、T において、i と $i+1$ を入れ替えたものは標準盤でありそれを $\bar{T}$ とおく。このとき、$\pi_\lambda(f_i)$ は V_λ の部分空間 $\mathbb{C}v_T \oplus \mathbb{C}v_{\bar{T}}$ に対して以下のように作用する。

$$\pi_\lambda(f_i)(v_T, v_{\bar{T}}) = (v_T, v_{\bar{T}})M'(d_i)$$

また、$\pi_{{}^t\lambda}(f_i)$ は $V_{{}^t\lambda}$ の部分空間 $\mathbb{C}v_{{}^tT} \oplus \mathbb{C}v_{{}^t\bar{T}}$ に対して以下のように作用する。

$$\pi_{{}^t\lambda}(f_i)(v_{{}^tT}, v_{{}^t\bar{T}}) = (v_{{}^tT}, v_{{}^t\bar{T}})\{-M'(d_i)\}$$

ここで、$M'(d_i)$ は以下で定義される 2×2 行列である。

$$M'(d_i) = \frac{1}{(1+q)(1-q^{d_i})}\begin{bmatrix} (1-q)(1+q^{d_i}) & 2\sqrt{q(1-q^{d_i-1})(1-q^{d_i+1})} \\ 2\sqrt{q(1-q^{d_i-1})(1-q^{d_i+1})} & -(1-q)(1+q^{d_i}) \end{bmatrix}$$

d_i は T における i から $i+1$ への軸性距離（*axial distance*）である。

$q \neq 0$ で $q^k \neq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ であるとき、上の行列は *well-defined* である。

5 $\mathcal{H}_n(q)$ と $\mathfrak{A}_n(q)$ の間の分岐則と $\mathfrak{A}_n(q)$ の半単純性

q は π_λ の定義できるところ、すなわち $q^k \neq 1 (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ を満たす 0 でない複素数とする。3 章及び 4 章の結果を用いれば、対称群と交代群の間の既約表現に関する分岐則が $\mathcal{H}_n(q)$ と $\mathfrak{A}_n(q)$ の間にも成り立つことが示される。交代群の場合と同様の記法を使って、π_λ の $\mathfrak{A}_n(q)$ への制限を $\tilde{\pi}_\lambda$ と表し、以降は $\mathfrak{A}_n(q)$ の表現として扱う。

$g \in \mathfrak{A}_n(q)$ と形が λ の標準盤 T に対し、$\tilde{\pi}_\lambda(g)v_T$ を以下のように表す。

$$\tilde{\pi}_\lambda(g)v_T = \sum_{T' \in \mathrm{STab}(\lambda)} g^\lambda_{T,T'} v_{T'}$$

ただし、$g^\lambda_{T,T'}$ は複素数である。

補題 5.1. $g \in \mathfrak{A}_n(q)$ に対し、次の等式が成り立つ。

$$g^{{}^t\lambda}_{{}^tT,{}^tT'} = g^{\lambda}_{T,T'}$$

証明の概略. 命題 4.2 から従う。 □

この補題から直ちに次の命題が従う。

命題 5.2. $\lambda \in \Lambda_n$ に対し、$\tilde{\pi}_\lambda$ と $\tilde{\pi}_{{}^t\lambda}$ は同値。

次にサイズが 2 以上の自己共役なヤング図形 λ に対応する表現 $\tilde{\pi}_\lambda$ が次数が等しい二つの表現に分解することを示す。

n を 2 以上の自然数とし、$\lambda \in \Lambda_n$ とする。$\mathrm{STab}(\lambda)$ の部分集合 $\mathrm{STab}(\lambda)^+$ と $\mathrm{STab}(\lambda)^-$ を以下のように定める。

$$\mathrm{STab}(\lambda)^+ = \{T \in \mathrm{STab}(\lambda) \mid 1\text{ 行 }2\text{ 列が }2\}$$

$$\mathrm{STab}(\lambda)^- = \{T \in \mathrm{STab}(\lambda) \mid 2\text{ 行 }1\text{ 列が }2\}$$

この時、次の二つが成り立つ。

(1) $\mathrm{STab}(\lambda) = \mathrm{STab}(\lambda)^+ \cup \mathrm{STab}(\lambda)^-$(disjoint union)

(2) λ が自己共役ならば、$T \in \mathrm{STab}(\lambda)^+ \Longleftrightarrow {}^tT \in \mathrm{STab}(\lambda)^-$ であり、写像 $T \longrightarrow {}^tT$ により、$\mathrm{STab}(\lambda)^+$ と $\mathrm{STab}(\lambda)^-$ は 1 対 1 に対応する。

$\lambda \in \Lambda_n$ が自己共役であるとし、$\tilde{V}_\lambda$ を $\tilde{\pi}_\lambda$ の表現空間とする。$\tilde{V}_\lambda$ の複素ベクトル空間としての直和分解、

$$\tilde{V}_\lambda = \tilde{V}_\lambda^+ \oplus \tilde{V}_\lambda^-$$

$$\tilde{V}_\lambda^+ = \bigoplus_{T \in \mathrm{STab}(\lambda)^+} \mathbb{C}(v_T + v_{{}^tT})$$

$$\tilde{V}_\lambda^- = \bigoplus_{T \in \mathrm{STab}(\lambda)^+} \mathbb{C}(v_T - v_{{}^tT})$$

を考える。

命題 5.3. $\lambda \in \Lambda_n$ が自己共役であるとき、

$$\tilde{V}_\lambda = \tilde{V}_\lambda^+ \oplus \tilde{V}_\lambda^-$$

は $\mathfrak{A}_n(q)$ の表現空間としての直和分解になる。

証明の概略. λ が自己共役であるとして、$g \in \mathfrak{A}_n(q)$ に対して補題5.1を用いて、

$$\tilde{\pi}_\lambda(g)(v_T + v_{{}^tT}) = \sum_{T' \in \mathrm{STab}(\lambda)^+} (g^\lambda_{TT'} + g^\lambda_{T{}^tT'})(v_{T'} + v_{{}^tT'})$$

$$\tilde{\pi}_\lambda(g)(v_T - v_{{}^tT}) = \sum_{T' \in \mathrm{STab}(\lambda)^+} (g^\lambda_{TT'} - g^\lambda_{T{}^tT'})(v_{T'} - v_{{}^tT'})$$

を導く。 □

$\tilde{V}_\lambda^+$ と $\tilde{V}_\lambda^-$ の次数が等しいことは明らかなので、自己共役なヤング図形 λ に対して、$\tilde{\pi}_\lambda$ は次数の等しい二つの部分表現に分解することがわかった。$\tilde{V}_\lambda^+$ と $\tilde{V}_\lambda^-$ に対応する $\mathfrak{A}_n(q)$ の表現をそれぞれ $\tilde{\pi}_\lambda^+$、$\tilde{\pi}_\lambda^-$ と表す。

次に示す定理が我々の主要結果である。

定理 5.4. q を $q^k \neq 1 (k = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす0ではない複素数とする。Λ_n の要素のうち、自己共役でないものを $\lambda_1, {}^t\lambda_1, \lambda_2, {}^t\lambda_2, \ldots, \lambda_p, {}^t\lambda_p$ とし、自己共役なものを $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{p+q}$ とする。このとき、$p + 2q$ 個の $\mathfrak{A}_n(q)$ の表現 $\tilde{\pi}_{\lambda_1}, \tilde{\pi}_{\lambda_2}, \ldots, \tilde{\pi}_{\lambda_p}, \tilde{\pi}^+_{\lambda_{p+1}}, \tilde{\pi}^-_{\lambda_{p+1}}, \tilde{\pi}^+_{\lambda_{p+2}}, \tilde{\pi}^-_{\lambda_{p+2}}, \ldots, \tilde{\pi}^+_{\lambda_{p+q}}, \tilde{\pi}^-_{\lambda_{p+q}}$ は互いに非同値な既約表現であり、これらは $\mathfrak{A}_n(q)$ の既約表現の完全代表系をなす。

この定理の「完全代表系をなす」の部分は先の命題3.4の結果 ($\mathfrak{A}_n(q)$ の次元が高々$n!/2$) と実際に既約表現の次数を調べることにより導かれる。この結果から、$\mathfrak{A}_n(q)$ の次元が $n!/2$ であることと半単純性が示される。

以上により $\mathcal{H}_n(q)$ と $\mathfrak{A}_n(q)$ の間に対称群と交代群の間の分岐則と同様の現象が成り立つことがわかった。最後に $\mathfrak{A}_n(q)$ の既約表現 $\tilde{\pi}$ から得られる $\mathcal{H}_n(q)$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_n(q)}^{\mathcal{H}_n(q)}(\tilde{\pi})$ における $\mathcal{H}_n(q)$ の既約表現の重複度について以下の結果も得られたのでここに示す。

命題 5.5. qは定理*5.4*の通りとする。この時、以下の事が成り立つ。

λが非自己共役の場合

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_n(q)}^{\mathcal{H}_n(q)}(\tilde{\pi}_\lambda) \cong \pi_\lambda \oplus \pi_{{}^t\lambda}$$

λが自己共役の場合

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_n(q)}^{\mathcal{H}_n(q)}(\tilde{\pi}_\lambda^+) \cong \mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_n(q)}^{\mathcal{H}_n(q)}(\tilde{\pi}_\lambda^-) \cong \pi_\lambda$$

References

[1] D. J. Benson, "Representations and cohomology" Vol.1, Cambridge University Press, 1995.

[2] H. Boerner, "Representations of Groups," Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1970.

[3] C. W. Curtis and I. Reiner, "Methods of Representation Theory," Vol.1, John Wily & Sons, 1981.

[4] C. W. Curtis and I. Reiner, "Methods of Representation Theory," Vol.2, John Wily & Sons, 1987.

[5] R. Dipper and G. D. James, The q-Schur algebra, *Proc. London Math. Soc.* **59** (1989), 23–50.

[6] W. Fulton and J. Harris, "Representation Theory,", Springer-Verlag, 1991.

[7] F. M. Goodman, P. de la Harpe and V. F. R. Jones, "Coxeter Graphs and Towers of Algebras," Springer-Verlag, 1989.

[8] A. Gyoja and K. Uno, On the semisimplicity of Hecke algebras, *J. Math. Soc. Japan.* Vol. 41, No. 1 (1989), 75–79.

[9] P. de la Harpe, M. Kervaire and C. Weber, On the Jones polynomial, *l'Enseignement Math.* **32** (1986), 271–335.

[10] P. N. Hoefsmit, Representation of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type, *Thesis* (1974), University of British Columbia.

[11] N. Iwahori, On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.*, **10** (1964), 215–236.

[12] R. C. King and B. G. Wybourne, Representations and traces of the Hecke algebras $H_n(q)$ of type A_{n-1}, *J. Math. Phys.* **33** (1) (1992), 4–14.

[13] A. Ram, A Frobenius formula for the characters of the Hecke algebras, *Invent. Math.* **106** (1991), 461–488.

[14] H. Wenzl, Hecke algebras of type A_n and subfactors, *Invent. Math.* **92** (1988), 349–383.

[15] 岩堀 長慶, 対称群と一般線型群の表現論（岩波講座　基礎数学）, 岩波書店, (1978)

[16] 近藤　武, 群論 II（岩波講座　基礎数学）, 岩波書店, (1976)