数理解析研究所講究録
1191 巻 2001 年 72-73

A chaotic traveling pulse in discrete dissipative systems

上山大信 (広島大学・理)、西浦廉政 (北海道大学・電子研)、柳田達雄 (北海道大学・電子研)

次に示す P-model (1) は自己複製パターンを生ずる簡潔なモデルとして提案され、1次元および2次元において自己複製パターンを生ずる事が知られている [1]。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = & D_u \nabla^2 u + u(u - v^2 - \alpha) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = & D_v \nabla^2 v + ku - v. \end{cases} \tag{1}$$

今回我々は、次のような P-model を離散化した系 (2) を考えた。

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} = & u_i(u_i - v_i^2 - \alpha) + d(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \ldots, n \\ \dfrac{dv_i}{dt} = & ku_i - v_i + d\beta(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}), \end{cases} \tag{2}$$

境界条件は周期境界条件、すなわち、

$$u_{n+1} = u_1, \quad u_0 = u_n$$
$$v_{n+1} = u_1, \quad v_0 = v_n,$$

とする。この系は (1) の粗い離散化により得られる常微分方程式と考える事もできるが、ここではあえて PDE モデルである P-model の近似離散化方程式としてではなく、P-model のカイネティクス部分を拡散的な相互作用により結合したコンパートメントモデルとして扱う。このような離散版 P-model においては、元の連続版 P-model に見られるような進行波解や自己複製解も見られるが、連続版 P-model には見られないようなカオティックな挙動を示すパルス解が発見されたので、ここに報告する。これは、散逸的な系における局在化した構造が時間とともにカオティックな運動を示す新たなパターンと考えられる。

離散版 P-model でパラメータをそれぞれ $n = 8, \alpha = 0.301, \beta = 4$ とし、d を変化させた場合のシミュレーション結果を図1に示す。d、すなわち結合の強さを分岐パラメーターとして、値を大から小へと変化させた場合、肩ふり周期解 (Shaking pulse) から周期倍分岐を経てカオティックパルス解となることが分かった (図2)。また、d の値を小から大へと動かした場合のカオティックパルス解は突如として現れる。肩ふり周期解の数値分岐追跡により肩ふり周期解のサドル・ノード分岐点が存在する事が分かり、分岐点とカオスの出現点が完全に一致することも分かった。結果、そのサドル・ノード分岐に伴う "Type-I Intermittency" タイプのカオスであると考えられる。

離散版 P-model のシミュレーションにおいて、局所化したパルス解がカオティックな運動を示す場合があることが発見された。連続モデルにおいて、進行波解が存在する系は多くあるが、それらの離散化モデルにおいても、同様なカオティックパルス解が存在するか否か興味深い。また、カオティックな運動を伴うパルス間同士の相互作用も多様であり、今後詳細に調べる予定である。さらには、2次元格子上の離散版 P-model では、スポット状の局在構造が時間と共に移動する "Traveling spot" が確認されている。

$n = 8$ 程度であれば周期解であってもある程度数値的に大域的な分岐構造を調べる事ができる。実際、大域的分岐解析により、カオティックなパルスの出自が明らかとなり、さらに離散方程式系全体のダイナミクスに対して、単なるシミュレーションからは得られないより深い数理的構造の解明へのヒントが得られる。

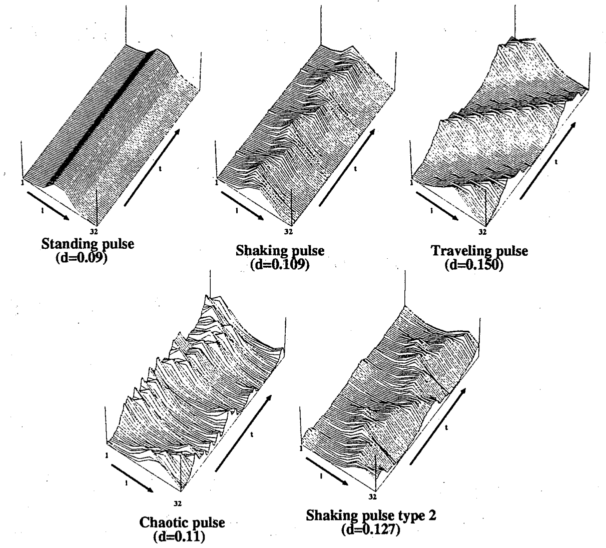

図 1: 離散版 P-model のシミュレーション結果

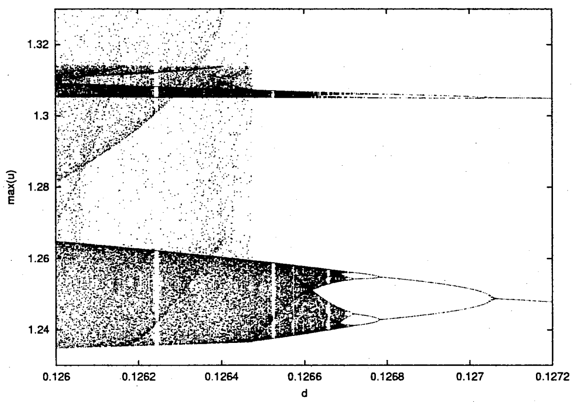

図 2: 周期倍分岐の構造

参考文献

[1] Yasumasa Nishiura and Daishin Ueyama, *A skeleton structure of self-replicating dynamics*, Physica D, 130(1999)73-104.