数理解析研究所講究録 1203 巻 2001 年 51-56

微分拡大体の Lie 閉包

慶応義塾大学環境情報学部 西岡啓二 (Keiji Nishioka)

Faculty of Environmental Information

SFC, Keio University

1 Riccati equation

K を標数 0 の常微分体とし、微分を「'」で表す。K の定数体 $C_K=\{c\in K\ ;\ c'=0\}$ は簡単のため複素数体 $\mathbf{C}$ とする。y を K 上の Riccati 方程式

$$y'=y^2+a, \qquad a\in K$$

の一般解とし、y は K 上超越的であり、K 上の微分拡大体 $R=K\langle y\rangle$ の定数体は $\mathbf{C}$ であると仮定する。

形式的な定数変数 ϵ, $\epsilon'=0$ に関する y の Variation を

$$y(\epsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i\frac{\epsilon^i}{i!}, \qquad y_0=y$$

によって定義する。$y(\epsilon)$ は上述の Riccati 方程式を満たすものとする。この要請によって

$$y_1' = 2yy_1$$

$$y_2' = 2y_1^2 + 2yy_2$$

$$y_3' = 6y_1y_2 + 2yy_3$$

などの関係式を得る。これらは次のようにして求めることができる。まず、y に関する Riccati 方程式の微分をとれば、

$$dy' = 2ydy$$

を得るが、この式で dy を y_1 で置き換える。つぎに y, y_1 に関する方程式 $y_1' = 2yy_1$ の微分

$$dy_1' = 2y_1dy + 2ydy_1$$

において dy, dy_1 を y_1, y_2 に置き換える。以下同様。

Riccati 方程式の一般解は 2 階線形微分方程式の基本解によって表示されることは良く知られているが、これは、Variation の立場からもみられる。

まず、$R_i = K\langle y_0, \ldots, y_i\rangle$ と置く。ただし、y_j は R_i の定数体が $\mathbf{C}$ に一致するように選択されねばならない。また、$y_1 \neq 0$ を仮定する。このような選択が可能であることは微分代数の基本的な定理によって保証されている。さて、

$$u = \frac{y_2}{2y_1}$$

と置こう。すると、$u' = (y_2'y_1 - y_2y_1')/2y_1^2 = y_1$ であり、

$$y_i \in \mathbf{C}[u]y_1$$

を得る。実際、帰納法によって

$$y_i' = 2f_i(y_1, \ldots, y_{i-1}) + 2yy_i \qquad (i \geq 2)$$

を得る。ここで、f_i は2次の斉次多項式である。$u_i = y_i/2y_1$ と置けば、

$$u_i' = y_1 f_i(1, u_2, \ldots, u_{i-1}) = f_i(1, u_2, \ldots, u_{i-1}) u'$$

を得、これを積分すれば、$u_i \in \mathbf{C}[u]]$ となる。

この結果 $R_2 = K\langle y, y_1, y_2\rangle$ は K 上 Picard-Vessiot 拡大となる。すなわち、それは、線形方程式の基本解 z_1, z_2 によって生成される。

$$y_1 = z_1^{-2}, \quad u = \frac{z_1}{z_2}, \quad z_i'' + az_i = 0, \quad z_2' z_1 - z_2 z_1' = 1$$

$$y' = -\frac{z_1'}{z_1}, \quad y_1 = \frac{1}{z_1^2}, \quad y_2 = \frac{2z_2}{z_1^3}$$

ここで、一般解 y は3つの特殊解 w_1, w_2, w_3 , $w_i' = w_i^2 + a$ によって表示でき、1個の任意定数に有理的に依存していることを思い起こそう。

上述の性質は、この性質に本質的に関わっている。

定義　微分拡大体 R/K が任意定数に有理的に依存しているとは、つぎのような微分拡大体 E/K が存在するときにいう。

i) E/K は代数的に自由である。$trans.deg_K R = trans.deg_E ER$

ii) $ER = EC_{ER}$、すなわち ER/E は定数によって生成される。

定義　微分拡大体 N/K が強正規であるとは、$C_N = \mathbf{C}$ であり、N からの任意の K 上微分同型 σ が

$$\sigma N \subset NC_{N\sigma N}, \quad N \subset \sigma NC_{N\sigma N}$$

を満足するときにいう。N/K の微分自己同型全体は $\mathbf{C}$ 上の代数群になる。

定理　K を代数閉体、R/K は任意定数に有理的に依存し、$C_R = \mathbf{C}$ と仮定する。このとき、強正規拡大 N/K で R を含むものが存在する。

この定理から、任意定数に有理的に依存する微分拡大体 R/K の K 上微分全体 $\mathrm{Der}(R/K)$ は K 上有限次元線形部分空間 V で、$RV = \mathrm{Der}(R/K)$ かつ $[\,',V] \subset V$ を満たすものの存在が証明される。Riccati 方程式 $y' = y^2 + a$ の場合、

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_1 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

とすれば、

$$[\,',X_0] = -2X_1, \quad [\,',X_1] = aX_0 - X_2, \quad [\,',X_2] = -2aX_1$$

2 Lie closure

前節で、Riccati 方程式の一般解の Variation の係数から、Picard-Vessiot 拡大を構成することができることを示した。この方法を任意定数に有理的に依存する微分拡大体に一般化しよう。

$\Omega(R/K)$ によって R の K 上 differentials 全体からなる R-module とする。微分「'」から Lie 微分 D がつぎの特徴によって定義される。

$$D(adb) = a'db + adb' \qquad (a, b \in R)$$

すると、$\omega_1, \ldots, \omega_n$ を $\Omega(R/K)$ の R-basis とすれば、

$$D\omega_i = \sum a_{ij}\omega_j \qquad (a_{ij} \in R)$$

線形微分方程式の基本解を

$$\Phi' = (a_{ij})\Phi$$

なるものとし、Picard-Vessiot 拡大 $R^1 = R\langle\Phi\rangle$ をつくり、以下同様に $R^i = (R^{i-1})^1$ を構成する。これらの微分体としての構造は途中の differentials の basis の取り方や、基本解の取り方に依存しない。

定義　微分拡大体 R/K は、$R^1 = R$ を満たすとき Lie closed とよばれる。

この定義における条件は $\Omega(R/K)$ の basis $\omega_1, \ldots, \omega_n$ で $D\omega_i = 0$ を満たす、という条件に同値である。

定義　S/K を Lie closed な微分拡大体とし、R は、中間微分体とする。このとき、$R^i \subset S$ とできるが、

$$R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subset S$$

を R の S における Lie closure という。

たとえば、強正規拡大 N/K は Lie closed である。

定理　N/K を強正規拡大、K は N において代数的に閉じていると仮定する。もし、中間微分体 R が K 上 Lie closed ならば、R/K は強正規拡大である。

この定理を用いて、本節の問題のひとつの回答を得る。

定理　R を 代数的閉体 K 上任意定数に有理的に依存する微分拡大体とする。また、

Der (R/K) の R-basis $X_1, \ldots, X_n$ で

$$[\,', X_i] = \sum a_{ij} X_j, \qquad a_{ij} \in K$$

を満たすものが存在するとする。もし、Φ を線形微分方程式 $\Phi' = (a_{ij})\Phi$ の基本解とするならば、$R(\Phi)/K$ は Lie closed であり、$R(\Phi)/R$ は Picard-Vessiot 拡大であり、R の $R(\Phi)$ における Lie closure R^∞ は K 上強正規拡大である。