数理解析研究所講究録 1209 巻 2001 年 73-80

Porous Media 中の一次元圧縮性流の漸近挙動について

早稲田大理工 西川雅堂 (MASATAKA NISHIKAWA)
WASEDA UNIVERSITY

1. Introduction.

本論文は西原健二教授 (早稲田大政経) との共同研究 [7] に基づいています. Porous Media 中の一次元圧縮性流の Lagrange 座標で書かれた方程式系は

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, & (t,x) \in R_+ \times R, \\ u_t + p(v,s)_x = -\alpha u, \\ \left\{e(v,s) + \frac{1}{2}u^2\right\}_t + (pu)_x = -\alpha u^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

で記述される. ここに, v: 比体積, u: 速度, s: エントロピーであり, p: 圧力は滑らかで $p(v,s) > 0, p_v(v,s) < 0(v > 0)$ を満たすものする. pの典型例は$p(v,s) = (\gamma-1)v^{-\gamma}e^s$ ($\gamma > 1$: 断熱定数) である. また, αは正定数であり, $e(v,s)$ は, 内部エネルギーで熱力学の第二法則から $e_s \neq 0, e_v + p = 0$ を満たす. このことから滑らかな解に対しては

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, & (t,x) \in R_+ \times R, \\ u_t + p(v,s)_x = -\alpha u, \\ s_t = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

と同値であることがわかる. $v_\pm > 0, u_\pm, s_\pm$ を与えられた定数とし, $t = 0$ で初期値

$$(v,u,s)(0,x) = (v_0,u_0,s_0)(x) \to (v_\pm,u_\pm,s_\pm), \quad \text{as} \quad x \to \pm\infty \tag{1.3}$$

を満たす初期値問題の解の漸近挙動について考察する.

この方面の関連した結果を述べよう. Hsiao-Liu[1] により等エントロピー即ち $s(t,x) \equiv$ 定数であるとき, (1.2), (1.3) の解 $(v,u)(t,x)$ は Darcy's Law から得られる放物型方程式

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \tilde{u}_x = 0, & (t,x) \in R_+ \times R, \\ p(\tilde{v})_x = -\alpha\tilde{u}, \end{cases} \tag{1.4}$$

の解 $(\tilde{v},\tilde{u})(t,x)$ に漸近することを示された. $v_+ \neq v_-$ならば (1.4) は自己相似解$\tilde{v}(t,x) = v^*(\frac{x+x_0}{\sqrt{t+1}})$ を持つ. 但し, x_0はシフトである. (1.2) の第二式から $u(t,x) \to u_\pm(x \to \pm\infty)$ が期待されるが今 $\tilde{u}(t,x) \to 0(x \to \pm\infty)$ であるため gap が生じてくる. そこで Hsiao-Liu[1] は x_0の決め方も含め次の補助関数 $(\hat{v},\hat{u})$ を導入することで定式化している.

$$\begin{cases} \hat{v}_t - \hat{u}_x & = 0, & (t,x) \in R_+ \times R, \\ \hat{u}_t & = -\alpha\hat{u}, \\ (\hat{v},\hat{u})(t,\pm\infty) & = (0, e^{-\alpha t}u_\pm), \end{cases} \tag{1.5}$$

$$(\hat{v}, \hat{u})(t,x) = \left\{ \frac{u_+ - u_-}{-\alpha} e^{-\alpha t} m_0(x), e^{-\alpha t} \left(u_- + (u_+ - u_-) \int_{-\infty}^{x} m_0(y) dy \right) \right\}, \tag{1.6}$$

（但し，$m_0(x)$ は support compact な台を持ち，$\int_R m_0(x)dx = 1$ を満たす滑らかな関数とする.）とおくと，(1.2), (1.4), (1.5) から，

$$\left\{ \begin{array}{l} (v - \tilde{v} - \hat{v})_t - (u - \tilde{u} - \hat{u})_x = 0, \\ (u - \tilde{u} - \hat{u})_t + \{p(v) - p(\tilde{v})\}_x = -\alpha(u - \tilde{u} - \hat{u}) - \hat{u}_t, \end{array} \right. \tag{1.7}$$

が得られる．第一式の保存則の性質から

$$\int_R (v - \tilde{v} - \hat{v})(t,x)dx = \int_R (v_0(x) - v^*(x + x_0) - \hat{v}(0,x))dx, \tag{1.8}$$

がわかる．そこで x_0を

$$\int_R (v_0(x) - v^*(x + x_0))dx = -\frac{u_+ - u_-}{-\alpha}, \tag{1.9}$$

を満たすように定義し，Perturbation(V, z) を

$$(V, z)(t,x) = \left(\int_{-\infty}^{x} (v - \tilde{v} - \hat{v})(t,y)dy, (u - \tilde{u} - \hat{u})(t,x) \right), \tag{1.10}$$

とおくと，(1.7) は第一式を一回積分することにより次に書きかえることができる:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t - z = 0, \\ z_t + \{p(V_x + \tilde{v} + \hat{v}) - p(\tilde{v})\}_x + \alpha z = -\tilde{u}_t, \end{array} \right. \tag{1.11}$$

即ち，Damping の付いた 2 階準線型波動方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{tt} + \{p(V_x + \tilde{v} + \hat{v}) - p(\tilde{v})\}_x + \alpha V_t = -\tilde{u}_t, \\ (V, V_t)(0,x) = (V_0, z_0)(x) := \left(\int_{-\infty}^{x} \{v_0(y) - \tilde{v}(0,y)\}dy, u_0(x) - \tilde{u}(0,x) \right), \end{array} \right. \tag{1.12}$$

と同値になる．つまり $(\hat{v}, \hat{u})(t,x) \to 0$ $(t \to \infty)$ は明らかだから $(v - \tilde{v}, u - \tilde{u})(t,x) \to 0$ $(t \to \infty)$ を示すことは $(V_x, z)(t,x) \to 0$ $(t \to \infty)$ を示すことと同値である．Hsiao-Liu[1] は Initial perturbation が $\|(V_0, z_0)\|_{H^3 \times H^2} \ll 1$ の意味で十分小さく，さらに $|(v_+ - v_-, u_+ - u_-)| \ll 1$ であれば $(V_x, z)(t,x) \to 0$ $(t \to \infty)$(=安定性) であることを示し，さらにその漸近の rate $\|(V_x, z)\|_{L^\infty \cap L^2} = O(t^{-\frac{1}{4}}, t^{-\frac{1}{2}})$ を得ている．解が $t \to \infty$ の時放物型の性質を持つことから上のような rate では不十分であると思われるのだがこの点については Nishihara[2] により解決されている．

等エントロピーでない場合も同様に定式化することができる．今 (1.6) で定義される関数は指数的に減衰する良い関数なので始めから $u_+ = u_- = 0$ として簡単化すると，(1.12) の代わりに

$$\begin{cases} V_{tt} + \{p(V_x + \tilde{v}, s_0) - p(\tilde{v}, s_0)\}_x + \alpha V_t = -\tilde{u}_t, \\ (V, V_t)(0, x) = (V_0, z_0)(x) := \left(\int_{-\infty}^{x} \{v_0(y) - \tilde{v}(0, y)\} dy, u_0(x) - \tilde{u}(0, x)\right), \end{cases} \tag{1.13}$$

となる．但し，この場合 $(\tilde{v}, \tilde{u})(t, x)$ はエントロピーの影響があるため

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \tilde{u}_x = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ p(\tilde{v}, s_0)_x = -\alpha \tilde{u}, \\ \tilde{v}(0, x) = \tilde{v}_0(x) \to v_\pm, \end{cases} \tag{1.14}$$

つまり

$$\begin{cases} \tilde{v}_t + p(\tilde{v}, s_0)_{xx} = 0, & (t, x) \in R_+ \times R, \\ \tilde{v}(0, x) = \tilde{v}_0(x) \to v_\pm \\ \tilde{u} = -\frac{1}{\alpha} p(\tilde{v}, s_0)_x, \end{cases} \tag{1.15}$$

の解である．安定性については，$s_+ = s_-, v_+ = v_-$ の時は Hsiao-Serre[3],[4] により，$s_+ = s_-, v_+ \neq v_-$ の時は Hsiao-Luo[5] により得られている．しかし漸近の rate についてはまだ得られていなかった．本論文では特に $s_+ = s_-, v_+ = v_-$ の時の rate について考察する．なお，$s_+ = s_-, v_+ \neq v_-$ の場合は最近 Marcati-Pan[6] により考察され，さらにその中で $s_+ \neq s_-$ の場合についても $p(v_+, s_+) = p(v_-, s_-)$ という仮定の下で考察されている．

Hsiao-Serre[3] で示されているように $s_+ = s_-, v_+ = v_-$ の時，放物型方程式 (1.15) の解は等エントロピーの場合と異なり自己相似解ではなく，

$$p(\bar{v}(x), s_0(x)) = p(\underline{v}, \underline{s}), \tag{1.16}$$

で定義される定常解 $(\bar{v}(x), 0)$ を持つ．典型例では $\bar{v}(x) = e^{\frac{1}{\gamma}(s_0(x) - \underline{s})} \underline{v}$ で与えられる．(1.15) の解は $(\bar{v}(x), 0)$ からの Initial parturbation が十分小さければ安定であることが言えるため結果として (1.2), (1.3) の解は (1.15) の非定常解を経由して，

$$(v, u)(t, x) \to (\tilde{v}, \tilde{u})(t, x) \to (\bar{v}(x), 0) \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

となることがわかる．そこで漸近の rate を Parabolic part $(\tilde{v}, \tilde{u})(t, x) \to (\bar{v}(x), 0)$ $(t \to \infty)$ と Hyperbolic part $(v, u)(t, x) \to (\tilde{v}, \tilde{u})$ $(t \to \infty)$ に分けそれぞれについて求めることにより得たいと思う．

2. Parabolic part. この章では，$\tilde{v}(t, x)$ が $t \to \infty$ の時 $\bar{v}(x)$ に漸近することを示そう．結果を先に述べる．

Proposition 1 (Asymptotic property of $\tilde{v}$).

$p(v,s)$ は滑らかな関数で $p>0, p_v<0$ $(v>0)$ を満たすものとする．もし，$(\tilde{v}_0-\bar{v}, s_0-\underline{s})\in H^6(R)\times H^6(R)$ で十分小さければ (1.15) の大域解が存在し，次を満たす．

$$\partial_t^i(\tilde{v}-\bar{v})\in C([0,\infty);H^{6-2i}(R)), \partial_t^j q_x\in C([0,\infty);H^{5-2j}(R)),$$
$$q_{tttx}\in L^2(0,\infty;L^2(R)),$$

但し，$q=p(\bar{v},s)-p(\tilde{v},s)$，$i=0,1,2,3$，$j=0,1,2$ とする．さらに，$(\tilde{v}_0-\bar{v}, s_0-\underline{s})\in L^1(R)\times L^1(R)$ であれば，

$$\begin{cases} \|\tilde{v}(t,\cdot)-(\bar{v}(\cdot)+\bar{\theta}_0(t,\cdot))\|_{L^\infty}\le C(1+t)^{-1}, \\ \|(\tilde{v}-\bar{\theta}_0)_t(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le C(1+t)^{-2}, \\ \|(\tilde{v}-\bar{\theta}_0)_{tt}(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le C(1+t)^{-\frac{11}{4}}, \\ \|\tilde{v}(t,\cdot)-(\bar{v}(\cdot)+\bar{\theta}_0(t,\cdot))\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}, \\ \|(\tilde{v}-\bar{\theta}_0)_t(t,\cdot)\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{7}{4}}, \\ \|(\tilde{v}-\bar{\theta}_0)_{tt}(t,\cdot)\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{5}{2}}, \end{cases} \tag{2.1}$$

を満たす．ここに，$\bar{\theta}_0$ は *asymptotic profile* で

$$\bar{\theta}_0(t,x)=\frac{-p_v(\underline{v},\underline{s})}{-p_v(\bar{v},s)}\int_R G(t,x-y)\{\tilde{v}_0(y)-\bar{v}(y)\}dy, \tag{2.2}$$

$$G(t,x): v_t+p_v(\underline{v},\underline{s})v_{xx}=0 \text{ の } \textit{Green function},$$

と定義する．

Proposition 1 を使えば $\tilde{u}\to 0$ $(t\to\infty)$ も言える．

$$\tilde{u}-0=-p(\tilde{v},s_0)_x=q_x \tag{2.3}$$

より，

Proposition 2.

Proposition 1 と同じ仮定の下，次が成立する．

$$\begin{cases} \|(\tilde{u}-\bar{q}_{0x})(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le C(1+t)^{-\frac{3}{2}}\log(2+t), \\ \|(\tilde{u}-\bar{q}_{0x})(t,\cdot)\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}}. \end{cases} \tag{2.4}$$

但し，$\bar{q}_0$ は次で定義される．

$$\bar{q}_0(t,x)=-p_v(\underline{v},\underline{s})\int_R G(t,x-y)\{\tilde{v}_0(y)-\bar{v}(y)\}dy. \tag{2.5}$$

証明の概要を述べよう．perturbation θを

$$\theta(t,x):=\tilde{v}(t,x)-\bar{v}(x) \tag{2.6}$$

とおくと，(1.15) は

$$\begin{cases} \theta_t = q(\theta, x)_{xx} \\ \theta(0,x) = \theta_0(x) \equiv \tilde{v}_0(x) - \bar{v}(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

但し，$q(\theta, x) \equiv p(\bar{v}(x), s(x)) - p(\theta + \bar{v}(x), s(x))$ と書きなおすことができる．(2.7) の大域解の存在は解空間

$$X(0,T) = \left\{ \theta \,\middle|\, \begin{array}{l} \partial_t^i \in C^0([0,T]; H^{6-2i}(R))(i = 0,1,2,3), \\ \partial_t^j q_x \in L^2(0,T; H^{5-2j}(R))(j = 0,1,2), \\ q_{tttx} \in L^2(0,T; L^2(R)) \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

での局所解の存在を示し，A priori estimate を用いてその解を延長する方法をとる．局所解の存在は standard な方法で示すことができるので, ここでは A priori estimate について見てみよう．

$$N(T) := \sup_{0 \le t \le T} \left\{ \sum_{k=0}^{3} (1+t)^k \|\partial_t^k \theta(t)\|_{L^2} + \sum_{k=0}^{2} (1+t)^{k+\frac{1}{2}} \|\partial_t^k q_x(t)\|_{L^2} \right\} \le \varepsilon. \tag{2.10}$$

と定義すると次が得られる．

Proposition 3. θを $X(0,T)$ に属する局所解とする．$N(T) \le \varepsilon$を十分小さくとると次が成立する．

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{3} (1+t)^{2k} \|\partial_t^k \theta(t)\|_{L^2}^2 + \sum_{k=0}^{2} (1+t)^{2k+1} \|\partial_t^k q_x(t)\|_{L^2}^2 \\ &+ \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{3} (1+\tau)^{2k-1} \|\partial_t^k \theta(\tau)\|_{L^2}^2 + \sum_{k=0}^{3} (1+\tau)^{2k} \|\partial_t^k q_x(\tau)\|_{L^2}^2 \right) d\tau \\ &\le C \|(\theta_0(\cdot), s_0(\cdot) - \underline{s})\|_{H^6}^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

証明はエネルギー法を使えば良い．Proposition 3 と Sobolev の不等式を使えば

$$\sup_R |\theta| \le C \sup_R |q| \le C \|q(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|q_x(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \le C \|\theta(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|q_x(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \le C(1+t)^{-\frac{1}{4}}, \tag{2.12}$$

となり，減衰の rate は得ることはできる．同様に $\|(\theta_t, \theta_{tt})(t,\cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{5}{4}}, t^{-\frac{9}{4}})$ も得られる．ここからはさらに $(\theta, s_0 - \underline{s}) \in L^1(R) \times L^1(R)$ を仮定して (2.1) の評価を導こう．証明は次の 3-step に分けて行う．

(i)　(2.7) の線型化方程式

$$\begin{cases} \bar{\theta}_t = (a(x)\bar{\theta})_{xx} \\ \bar{\theta}(0,x) = \theta_0(x) \equiv \tilde{v}_0(x) - \bar{v}(x), \end{cases} \tag{2.13}$$

(但し，$a(x) = -p_v(\bar{v}(x), s_0(x)))$ の L^2-評価を導く．

(ii) $(\theta_0, s_0 - \underline{s}) \in L^1(R) \times L^1(R)$ の仮定の下で，$\bar{\theta} - \bar{\theta}_0$の L^∞-評価及び L^2-評価を導く．

(iii) $\theta - \bar{\theta}_0 = (\theta - \tilde{\theta}) + (\tilde{\theta} - \bar{\theta}_0)$ より$\theta - \tilde{\theta}(=: \Theta)$ の方程式

$$\begin{cases} \Theta_t = (a(x)\Theta)_{xx} + O(\theta^2)_x \\ \Theta|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

の L^∞-評価及び L^2-評価を導く．

ここでは (ii) のみ簡単に説明する．(2.13) から $a(x) \to \underline{a}$ $(x \to \pm\infty)$ に注意すると

$$\bar{\theta}_t = \underline{a}\bar{\theta}_{xx} + \{(a(x) - \underline{a})\bar{\theta}\}_{xx}, \tag{2.15}$$

がわかるので Green function を用いれば

$$\bar{\theta}(t,x) = \int_R G(t, x-y)\theta_0(y)dy + \int_0^t \int_R G(t-\tau, x-y)\{(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}(\tau, y)\}_{yy} dy d\tau, \tag{2.16}$$

と表わすことができる．部分積分により

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{t}{2}}^t \int_R G \cdot \{(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}(\tau, y)\}_{yy} dy d\tau \\ &= -\frac{1}{\underline{a}}(a(x) - \underline{a})\bar{\theta}(t,x) + \frac{1}{\underline{a}} \int_R G\left(\frac{t}{2}, x-y\right)(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}(\tau, y)dy \\ &\quad + \frac{1}{\underline{a}} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_R G \cdot (a(y) - \underline{a})\bar{\theta}_\tau(\tau, y) dy d\tau, \end{aligned} \tag{2.17}$$

であるから (2.16) は$\bar{\theta}_0$の定義 (2.2) を用いると

$$\begin{aligned} (\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)(t,x) &= \frac{1}{a(x)} \int_R G\left(\frac{t}{2}, x-y\right)(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}\left(\frac{t}{2}, y\right) dy \\ &\quad + \frac{\underline{a}}{a(x)} \int_0^{\frac{t}{2}} \int_R G_{yy}(t-\tau, x-y)(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}(\tau, y) dy d\tau \\ &\quad + \frac{1}{a(x)} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_R G(t-\tau, x-y)(a(y) - \underline{a})\bar{\theta}_\tau(\tau, y) dy d\tau. \end{aligned} \tag{2.18}$$

に帰着される．(i) で評価されるべき (2.12) と同様の評価

$$\|(\bar{\theta}, \bar{\theta}_t, \bar{\theta}_{tt})(t,\cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{1}{4}}, t^{-\frac{5}{4}}, t^{-\frac{9}{4}})$$

と Hausdorff-Young の不等式などを (2.18) の右辺に適用すれば (2.1) と同様の評価

$$\|(\bar{\theta} - \bar{\theta}_0, (\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)_t, (\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)_{tt})(t,\cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-1}, t^{-2}, t^{-\frac{11}{4}}) \tag{2.19}$$

を得ることができる．これと (ii) と同様の方法で示される (iii) の評価

$$\|(\Theta, \Theta_t, \Theta_{tt})(t,\cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-1}, t^{-2}, t^{-\frac{11}{4}}) \tag{2.20}$$

を合わせれば (2.1) を導くことができる．L^2-評価も同様．又，$\tilde{u}$についての Proposition 2 も$\tilde{u} = q_x$で qの満たす方程式 $q_t = -p_v(\theta + \bar{v}, s_0)q_{xx}$から (2.15) と同様の変形をして評価すればよい．

3. Hyperbolic part. (1.13) の線型化すると

$$\begin{cases} V_{tt}+\{p_v(\tilde{v},s_0)V_x\}_x+\alpha V_t=-q_{xt}+F_x, \\ (V,V_t)(0,x)=(V_0,z_0)(x):=\left(\int_{-\infty}^{x}\{v_0(y)-\tilde{v}_0(y)\}dy, u_0(x)-\tilde{u}(0,x)\right), \end{cases} \tag{3.1}$$

が得られる．ここで，$F=-\{p(V_x+\tilde{v},s_0)-p(\tilde{v},s_0)-p_v(\tilde{v},s_0)V_x\}$ とおいた．但し，$\tilde{v}_0(x)$ は

$$\int_R\{v_0(x)-\tilde{v}_0(x)\}dx=0 \tag{3.2}$$

を満たすようここで決める．大域解の存在及び減衰の rate も§2 の parabolic part の場合と同様エネルギー法と解表示を使うことによって得られる．結果だけ簡単に述べておこう．

Proposition 4.
$v_0-\tilde{v}(0,x)\in L^1(R)$ とする．*Proposition*1 の仮定の下，もし $(V_0,z_0)\in H^3(R)\times H^2(R)$ が十分小さければ (3.1) の大域解が存在し，さらに $(V_0,z_0)\in L^1(R)\times L^1(R)$ を仮定すれば

$$\begin{cases} \|(V_x,z)(t)\|_{L^\infty}=O(t^{-1},t^{-\frac{3}{2}}) \\ \|(V_x,z)(t)\|_{L^2}=O(t^{-\frac{3}{4}},t^{-\frac{5}{4}}), \end{cases} \tag{3.3}$$

が成立する．

Remark 1. Proposition 1 で仮定されている $(\tilde{v}_0-\bar{v},s_0-\underline{s})\in H^6(R)\times H^6(R)$ は

$$V_t-(-p_v(\underline{v},\underline{s}))V_{xx}=p(\tilde{v},s)_{xt}-(F_x+V_{tt})-\{(p_v(\tilde{v},s)-p_v(\underline{v},\underline{s}))V_x\}_x \tag{3.4}$$

に注意して解表示による評価をするときに，$\|z(t)\|_{L^\infty}$を評価の際必要な $\|z(t)\|_{L^2}$の評価を導くために必要である．

4. Main Theorem. Proposition 1 と Proposition 3 から

$$\begin{aligned} \|v(t,\cdot)-(\bar{v}(\cdot)+\bar{\theta}_0(t,\cdot))\|_{L^\infty} &\le \|v(t,\cdot)-\tilde{v}(t,\cdot)\|_{L^\infty}+\|\tilde{v}(t,\cdot)-(\bar{v}(\cdot)+\bar{\theta}_0(t,\cdot))\|_{L^\infty} \\ &= \|V_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}+\|(\theta-\bar{\theta}_0)(t,\cdot))\|_{L^\infty} \\ &\le C(1+t)^{-1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

を得ることができる．同様に L^2-評価，$\tilde{u}$の評価を導くと次が得られる．

Theorem 3.

$$\begin{cases} \|v(t,\cdot)-(\bar{v}(\cdot)+\bar{\theta}_0(t,\cdot))\|_{L^\infty}\le C(1+t)^{-1}, \\ \|u(t,\cdot)-\bar{q}_{0x}(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le C(1+t)^{-\frac{3}{2}}\log(2+t), \\ \|v(t,\cdot)-(\bar{v}(\cdot)+\bar{\theta}_0(t,\cdot))\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}}, \\ \|u(t,\cdot)-\bar{q}_{0x}(t,\cdot)\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{5}{4}}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Remark 2. 偶然にも$\int_R(v_0-\bar{v})(x)dx=0$ が成立していたとするならば，$(V,z)(t,x)=\left(\int_{-\infty}^{x}(v(t,y)-\bar{v}(y))dy,(u-\bar{u})(t,x)\right)$と置くことができ問題は少し簡単になる．(1.11) は

$$\begin{cases} V_t-z=0, \\ z_t+\{p(V_x+\bar{v},s)-p(\bar{v},s)\}_x+z=0. \end{cases} \tag{4.3}$$

となり (4.2) で例えば第一式の代わりに $\|v(t,\cdot)-\bar{v}(\cdot)\|_{L^\infty}=O(t^{-1})$ が得ることができる．

References

[1] L. Hsiao and T-P. Liu, *Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping*, Commun. Math. Phys. **143** (1992), pp. 599-605.

[2] K. Nishihara, *Convergence rates to nonlinear diffusion waves for solutions of system of hyperbolic conservation laws with damping*, J. Differential Equations **131** (1996), pp. 171-188.

[3] L. Hsiao and D. Serre, *Large-time behavior of solutions for the system of compressible adiabatic flow through porous media*, Chin. Ann. Math. **16B** (1995), pp. 431-444.

[4] L. Hsiao and D. Serre, *Global existence of solutions for the system of compressible adiabatic flow through porous media*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), pp. 70-77.

[5] L. Hsiao and T. Luo, *Nonlinear diffusive phenomena of solutions for the system of compressible adiabatic flow through porous media*, J. Differential Equations 125 (1996), pp. 329-365.

[6] P. Marcati and R. Pan, *On the diffusive profiles for the system of compressible adiabatic flow through porous media (pre-print).*

[7] M. Nishikawa and K. Nishihara, *Asymptotic behavior of solutions to the System of Compressible Adiabatic Flow through Porous Media*, SIAM J. Math. Anal. (to appear).