

# オービフォルドモデルのモジュラー不変性

山内 博

(Yamauchi Hiroshi)

筑波大学数学研究科

Graduate School of Mathematics

University of Tsukuba

e-mail: hirocci@math.tsukuba.ac.jp

## 1 序文

頂点作用素代数 (VOA) の研究結果の金字塔の一つとして Zhu の理論が挙げられる。その概要を簡単に述べると、有理型と呼ばれるクラスの VOA の表現論であり、特にその既約加群らから得られるトレース関数が張る空間がモジュラー群  $SL_2(\mathbb{Z})$  の作用で不変であることを統一的に示した理論である。今回の話では、Zhu の理論の拡張として、VOA のツイスト加群間における交絡作用素 (intertwining operators) から得られるトレース関数の保型性について調べる。まずその動機から述べておく。アフィンリー代数やヴィラソロ代数の既約最高ウェイト加群らの指標で張られる空間はモジュラー群の作用で不変であることは以前から知られていた。しかしその証明は個々の場合における指標公式を調べた結果として得られていた。これらの加群には自然に VOA の構造が入っており、特にこれらは有理型であった。その点に注目して Zhu は [Z] において VOA の公理とある有限性条件から指標で張られる空間の保型性を導き出し、統一的な証明を与えた。VOA を特徴付ける代数構造は頂点作用素の局所可換性である。Zhu の証明はこの局所可換性を礎にしている。この点に着目して宮本雅彦氏は頂点作用素と同様に局所可換性を満たしている交絡作用素についてもトレース関数が保型性を持つことを示した ([M])。また、Dong, Li, Mason 氏らによって自己同型で捻られたツイスト加群における頂点作用素のトレース関数もまた保型性を持つことが示されている ([DLM])。この場合も頂点作用素の局所可換性が基本となっている。以上をもとに、さらなる Zhu 理論の拡張はないかと考えてみると、自然と次の問題が考えられる。即ちツイスト加群間における交絡作用素のトレース関数を考えたら、これもまた保型性を持つのではないだろうか？である。以上がこの問題を考える動機であり、解けると思われる見込みである。

基本的に [M] も [DLM] も Zhu の方針 [Z] と同じ手法で理論を展開している。

[Z] での論法は大雑把に次のように述べることができる;

- 1° トレース関数の満たす微分方程式を導き、
- 2° その方程式の解空間とトレース関数の対応を見つける。

1° においては頂点作用素の局所可換性とヴィラソロ代数の交換関係式が使われており、2° では Zhu が導入した結合代数 (Zhu 代数) の加群と VOA の加群との間の一対一対応定理が使われている。先程の問題を解くためにはこれらの条件が満たされなければならない。そこで次の課題が必然的に浮かんで来る。まずツイスト加群における交絡作用素の定義である。これはまだ一般的に定義されておらず、うまい定義を作る必要がある。特に局所可換性を満たしていなければならない。そしてツイスト交絡作用素と Zhu 代数との対応定理である。ツイストされていない場合には Li の定理が知られているが、これをツイスト加群にまで拡張する必要がある。これらを順に示していき、最後に保型性を証明するのが本稿の目的である。

## 2 ツイスト交絡作用素

$V$  を有理型の VOA とする。ここで有理型とは全ての加群が完全可約であり、既約加群の同型類が有限個であるものである。さらに全ての既約加群の斉次空間が有限次元であることも仮定する。 $h \in \text{Aut}(V)$  を有限位数にとる。このとき  $V$  の既約加群の同型類全体からなる集合  $\mathcal{M}$  上に  $h$  の作用を次のように自然に考えることができる。 $(M, Y^M) \in \mathcal{M}$  とするとき、 $M$  上の頂点作用素  $Y^M$  に対し

$$(Y^M \circ h)(a, z) := Y^M(ha, z)$$

と定めると  $(M, Y^M \circ h)$  もまた既約  $V$ -加群になる。この作用でみた  $V$ -加群  $M$  を  $(M \circ h, Y^M \circ h)$  で表す。これは  $\mathcal{M}$  の元のどれかと同型になっているので、 $\mathcal{M}$  上に  $h$  は置換として作用する。特に  $(M, Y^M \circ h) \simeq (M, Y^M)$  となるとき  $(M, Y^M)$  を  $h$ -安定と呼ぶ。これは次の条件を満たす線形自己同型  $\phi_h \in GL(M)$  が存在することを意味する:

$$Y^M(ha, z) = \phi_h Y^M(a, z) \phi_h^{-1} \quad \text{for } \forall a \in V. \quad (1)$$

また  $g \in \text{Aut}(V)$  を有限位数とし、既約  $g$ -ツイスト加群全体を  $\mathcal{M}_g$  で表すことにする。 $V$  が  $g$ -ツイスト加群について有理型であるとき、これを  $g$ -有理型であるとする。本稿では特に断らない限り  $V$  は常に  $g$ -有理型とする。 $(M, Y^M) \in \mathcal{M}_g$  に対して  $(M, Y^M \circ h) \in \mathcal{M}_{gh}$  であることが分かり、特に  $gh = hg$  であるときには  $(M, Y^M \circ h) \in \mathcal{M}_g$  であることが分かる。

[DLM] は  $h$ -安定な  $g$ -ツイスト加群上のトレース関数を計算し、それらが張る空間の保型性を示した。そこでツイスト加群における頂点作用素を参考に、ツイ

スト交絡作用素を定義する。 $(U = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_{n+h_0}, Y^0)$  を  $g$ -安定な既約  $V$ -加群とし、 $\phi_g \in GL(U)$  を (1) を満たすものとする。そして  $(W_g^i = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (W_g^i)_{n/|g|+h_i}, Y^i)$  ( $i = 1, 2$ ) を既約  $g$ -ツイスト  $V$ -加群とする。今回  $V$  は有理型と仮定しているので、成分が全て既約な場合である  $\begin{pmatrix} W_g^2 \\ U \\ W_g^1 \end{pmatrix}$  型の交絡作用素のみを考えれば十分である。まず  $\phi_g$  を正規化する。Schur の補題から  $\phi_g^{|g|} \in \mathbb{C}$  であることが分かる。条件 (1) ではスカラー倍は許されているので、適当にスカラー倍することにより  $\phi_g^{|g|} = 1$  としてよい。このとき  $\phi_g$  は  $U$  上に半単純に作用し、次のように  $U$  は固有空間分解をする;

$$U = U^0 \oplus U^1 \oplus \dots \oplus U^{|g|-1}, \quad U^r = \{u \in U \mid \phi_g \cdot u = e^{2\pi ir/|g|} u\}.$$

この分解は先程行った  $\phi_g$  の正規化の仕方に依存することに注意する。この分解を基に  $U \times W_g^1 \rightarrow W_g^2$  型の  $\phi_g$ -ツイスト交絡作用素を次の様に定義する。

**定義 1.**  $U \times W_g^1 \rightarrow W_g^2$  型の交絡作用素であるとは、線形写像

$$\begin{aligned} I: U \otimes W_g^1 &\rightarrow W_g^2\{z\} \\ u \otimes w^1 &\mapsto I(u, z)w^1 = \sum_{s \in \mathbb{C}} (u_s w^1) z^{-s-1} \end{aligned}$$

であって、以下の公理を満たすものである;

1°  $u \in U^r, w^1 \in W_g^1$  に対して

$$I(u, z)w^1 \in W_g^2((z))z^{-r/|g|-h_0-h_1+h_2};$$

2°  $I(L(-1)u, z) = \frac{d}{dz} I(u, z);$

3°  $a \in V, ga = e^{2\pi ir/|g|} a$  に対して次の *twisted Jacobi identity* が成り立つ;

$$\begin{aligned} z_0^{-1} \delta \left( \frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y^2(a, z_1) I(u, z_2) - z_0^{-1} \delta \left( \frac{-z_2 + z_1}{z_0} \right) I(u, z_2) Y^1(a, z_1) \\ = z_2^{-1} \delta \left( \frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) \left( \frac{z_1 - z_0}{z_2} \right)^{-r/|g|} I(Y^0(a, z_0)u, z_2). \end{aligned}$$

この定義を満たす  $I$  は各ツイスト加群の頂点作用素と局所可換性

$$(z-w)^N Y^2(a, z) I(u, w) = (z-w)^N I(u, w) Y^1(a, z) \quad \text{for } N \gg 0$$

を満たすことが確認できる。以後、 $U \times W_g^1 \rightarrow W_g^2$  型のツイスト交絡作用素全体のなす線形空間を  $I_\phi \left( \begin{pmatrix} W_g^2 \\ U \\ W_g^1 \end{pmatrix} \right)$  で表す。

### 3 両側加群 $A_{\phi_g}(U)$ とツイスト交絡作用素

VOA  $V$  に対してそれから結合代数  $A(V)$  が構成できる。これは Zhu [Z] によって発案されたので、一般に Zhu の代数または Zhu 代数と呼ばれている。Zhu 代数の大きな特徴はその既約加群と既約  $V$ -加群の間に一対一対応があることである。さらに  $V$  が有理型であるとき  $A_g(V)$  は有限次元半単純代数であることも示されている。構成法  $V \rightsquigarrow A(V)$  を  $V$ -加群  $W$  において行うことにより  $A(V)$ -両側加群  $A(W)$  が構成できる [FZ]。  $V$ -加群を構成するということは  $I\left(\begin{smallmatrix} W \\ V \end{smallmatrix} W\right)$  型の交絡作用素を構成することに他ならず、先程の一対一対応の一般形として次の定理が Li によって示されている [L];

**定理 1.** (Li)  $V$  が有理型であるとき線形空間として次の同型が成り立つ;

$$I\left(\begin{smallmatrix} W^2 \\ W^0 \ W^1 \end{smallmatrix}\right) \simeq \text{Hom}_{A(V)}\left(A(W^0) \otimes_{A(V)} W^1(0), W^2(0)\right).$$

ここで  $W^i(0)$  は  $W^i$  のトップレベルを表す。

この定理を先程定義したツイスト加群上のツイスト交絡作用素の場合にまで拡張する。それにはまず  $A(V)$ ,  $A(W)$  に対応するものを定義する必要がある。  $A(V)$  のツイスト版  $A_g(V)$  は既に構成されており、既約  $g$ -ツイスト  $V$ -加群と既約  $A_g(V)$ -加群の間には一対一対応があることが Dong, Li, Mason らによって示されている [DLM]。そこで  $A_g(V)$  の両側加群を構成する。

$(U, \phi_g)$  を  $g$ -安定  $V$ -加群とする。このとき  $U$  は  $\phi_g$  の作用で固有空間分解する。即ち  $U^r := \{u \in U \mid gu = e^{2\pi ir/|g|}u\}$  として

$$U = U^0 \oplus U^1 \oplus \dots \oplus U^{|g|-1}$$

と分解する。同様に  $g$  の作用で  $V$  も固有空間分解をする;

$$V = V^0 \oplus V^1 \oplus \dots \oplus V^{|g|-1}.$$

$a \in V^r$ ,  $u \in U$  として  $V$  の  $U$  への作用を以下のように定義する。

$$a \circ_g u := \text{Res}_z \frac{(1+z)^{wta-1+\frac{r}{|g|}+\delta_{r,0}}}{z^{1+\delta_{r,0}}} Y^U(a, z)u.$$

そして  $a \in V^0$ ,  $u \in U^0$  について

$$\begin{aligned} a *_g u &:= \text{Res}_z \frac{(1+z)^{wta}}{z} Y^U(a, z)u \\ u *_g a &:= \text{Res}_z \frac{(1+z)^{wta-1}}{z} Y^U(a, z)u \end{aligned}$$

と定義する。ここで  $\text{Res}_z$  は形式的留数を意味し、 $z^{-1}$  の係数をとることとする。そして積  $\circ_g$  を用いて  $U$  の部分空間を

$$O_g(U) := \langle a \circ_g u \mid a \in V, u \in U \rangle$$

とおくとき、 $g=1$  のときの拡張として次の定理が成り立つことを示した。

**定理 2.** 商空間  $A_g(U) := U^0/O_g(U) \cap U^0$  は上で定義した作用  $*_g$  で  $A_g(V)$ -両側加群となる。

これで  $A_g(V)$ -両側加群が構成できた。ここで  $A_g(U)$  とツイスト交絡作用素の空間との関係を調べる。  $W_g^i = \bigoplus_{n \in \frac{1}{|g|}\mathbb{Z}} (W_g^i)_{n+h_i}$  を既約  $g$ -ツイスト  $V$ -加群とする。またこれらのトップレベル  $(W_g^i)_{h_i}$  を  $W_g^i(0)$  で表す。  $I$  が  $U \times W_g^1 \rightarrow W_g^2$  型の交絡作用素であるとき、  $U$  の  $I$  による次数を保つ作用 (ゼロモード)  $o^I$  を考える。  $o^I$  をトップレベルに制限して考えると、これは  $W_g^1(0)$  から  $W_g^2(0)$  への写像になっている。このとき  $a \in V^0, u \in U^0$  として

$$\begin{aligned} o^I(a *_g u)|_{W_g^1(0)} &= o^V(a)|_{W_g^2(0)} o^I(u)|_{W_g^1(0)} \\ o^I(u *_g a)|_{W_g^1(0)} &= o^I(u)|_{W_g^1(0)} o^V(a)|_{W_g^1(0)} \\ o^I(O_g(U))|_{W_g^1(0)} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。即ち、この関係式から次の命題が成立する。

**命題 1.**  $I \mapsto o^I$  は線形写像

$$I_\phi \left( \begin{array}{c} W_g^2 \\ U \quad W_g^1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Hom}_{A_g(V)} \left( A_g(U) \otimes_{A_g(V)} W_g^1(0), W_g^2(0) \right)$$

を与える。さらにこの写像は単射である。

この命題から同型をいうには全射を示さなければならない。この全射性の証明が難しいのであるが、  $V$  に有理型の条件をつけることで、次の定理が成り立つことを示した。これは Li の定理 ([Li2]) のツイスト交絡作用素への拡張になっている。

**定理 3.**  $V$  を  $g$ -rational VOA とする。  $W_g^1, W_g^2$  が既約  $g$ -twisted  $V$ -module とするとき、対応  $I \mapsto o^I$  により次の同型が成り立つ :

$$I_\phi \left( \begin{array}{c} W_g^2 \\ U \quad W_g^1 \end{array} \right) \simeq \text{Hom}_{A_g(V)} \left( A_g(U) \otimes_{A_g(V)} W_g^1(0), W_g^2(0) \right)$$

この定理をもとにツイスト加群におけるフュージョン規則を決定することがで

## 4 トレース関数

本稿の一番の目的はツイスト加群間における交絡作用素のトレース関数を調べることである。ここではそのトレース関数を定義する。 $g, h \in \text{Aut}(V)$  とし、 $gh = hg$  であり、これらはそれぞれ有限位数であるとする。§2 で述べたように既約  $g$ -ツイスト  $V$ -加群の同型類の集合  $\mathcal{M}_g$  上に  $h$  は置換として作用している。そこで  $(W, Y) \in \mathcal{M}_g$  を一つとり、 $W \circ h^s \simeq W$  となる最小の  $s \geq 0$  をとる。このとき  $i = 0, 1, \dots, s-1$  に対して  $(W \circ h^i, Y \circ h^i)$  は全て互いに同型ではない。それゆえ  $(W \circ h^i, Y \circ h^i) \simeq (W^i, Y^i)$  となる  $(W^i, Y^i) \in \mathcal{M}_g$  ( $i = 0, 1, \dots, s-1$ ) をとることができる(ここで  $W = W^s = W^0$  としている)。これらの間には定義から線形同型  $\psi_i : W^{i+1} \rightarrow W^i$  であって次の関係式を成り立たせるものが存在する;

$$Y^i(ha, z)\psi_i = \psi_i Y^{i+1}(a, z).$$

そこで  $\bar{W} = W^0 \oplus W^1 \oplus \dots \oplus W^{s-1}$  ( $V$ -加群としての直和),  $\bar{\psi}_h := \psi_0 \oplus \psi_1 \oplus \dots \oplus \psi_{s-1}$  とおくと  $\bar{\psi}_h$  は  $\bar{W}$  の自己同型であり、次の関係式が成り立つ;

$$Y^{\bar{W}}(ha, z)\bar{\psi}_h = \bar{\psi}_h Y^{\bar{W}}(a, z).$$

即ち  $\bar{W}$  は  $h$ -安定になる。こうして  $\mathcal{M}$  の  $h$  の作用による軌道一つ一つを加群にすることで  $h$ -安定な  $g$ -ツイスト  $V$ -加群が得られる。このようにして得られる  $h$ -安定な  $V$ -加群を主  $h$ -安定  $V$ -加群と呼ぶことにする。

$U$  を  $g$ -安定かつ  $h$ -安定な既約  $V$ -加群とし、さらに  $g, h$  に対して (1) を満たす  $U$  上の自己同型をそれぞれ  $\phi_g, \phi_h$  とし、これがある群準同型  $\phi : \langle g, h \rangle \rightarrow GL(U)$  で与えられているものと仮定する。即ち  $\phi_g^{|g|} = \phi_h^{|h|} = 1$ ,  $\phi_g \phi_h = \phi_h \phi_g$  が成り立つと仮定する。これから考えるのは  $I_\phi(\bar{W})$  型のツイスト交絡作用素であって、さらに次の条件を満たしているものである;

$$\bar{\psi}_h I(u, z) = I(\phi_h u, z)\bar{\psi}_h. \quad (2)$$

このような交絡作用素  $I$  を用いて主  $h$ -安定  $g$ -ツイスト  $V$ -加群  $\bar{W}$  上のトレース関数として次のようなものを計算する:

$$S^I(u, \tau) := z^{\text{wt}u} \text{tr}_{|\bar{W}} I(u, z)\bar{\psi}_h^{-1} q^{L_0 - c/24}, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

上で定めたトレース関数で張られる空間が保型性を持つことを示したいのであるが、それを直接示すのではなくもう少し扱いやすい関数空間を導入して考える。そのためには VOA  $V$  の頂点作用素を座標変換して得られる新しい VOA 構造を導入する必要がある。

**定義 2.**  $(V, Y(-, z), \mathbf{1}, \omega)$  を VOA とする。このとき変数変換された頂点作用素

$$Y[a, z] = Y(a, e^z - 1)e^{\text{wt}(a)z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{[n]} z^{-n-1}$$

に関して  $(V, Y[-, z], \mathbf{1}, \tilde{\omega} = \omega - \frac{c}{24}\mathbf{1})$  もまた VOA となる。これを指数変形 VOA と呼ぶ。

$U$  が  $g$ -安定な  $V$ -加群であるとき、これは指数変形された  $V$ -加群でもある。新しいヴィラソロ元  $\tilde{\omega}$  の頂点作用素  $Y[\tilde{\omega}, z] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L[n]z^{-n-1}$  の  $L[0]$  に関する次数分解を四角括弧で  $U = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_{[n+h]}$  と表すことにする。ここで  $h$  は  $U$  のトップレベルのウェイトである。

これから  $U$  は次の有限条件 ( $C_{[2,0]}$ -条件) を満たしているものと仮定する。

**定義 3.**  $U$  が  $C_{[2,0]}$ -条件を満たしているとは  $C_{[2,0]}(U) := \langle a_{[-2]}u, b_{[0]}u \mid a \in V, b \in V^{(g,h)}, u \in U \rangle$  とおくと、 $\dim(U/C_{[2,0]}(U)) < \infty$  であることとする。

次に  $C_1(g, h)$  を定義する。まず幾つかの記号を説明する。 $\Gamma(g, h)$  を  $a \equiv d \equiv 1 \pmod{\text{lcm}(|g|, |h|)}$ ,  $b \equiv 0 \pmod{|g|}$ ,  $c \equiv 0 \pmod{|h|}$  として行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  らのなす  $SL_2(\mathbb{Z})$  の部分群とする。 $M(g, h)$  を  $\Gamma(g, h)$  に対する正則保型形式のなす環とし、 $U(g, h) = M(g, h) \otimes_{\mathbb{C}} U$  とおく。そして  $O(g, h)$  を次の元で生成される  $U(|g|, |h|)$  の  $M(|g|, |h|)$ -部分加群とする;

$$a_{[0]}u, a \in V^{(g,h)}, u \in U;$$

$$a_{[-2]}u + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)E_{2k}(\tau) \otimes a_{[2k-2]}u, a \in V^{(g,h)};$$

$$u, \phi_g u = \mu u, \phi_h u = \lambda u, \mu, \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda, \mu) \neq (1, 1);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\mu, \lambda, \tau) \otimes a_{[k-1]}u, ga = \mu a, ha = \lambda a, \mu, \lambda \in \mathbb{C}, (\mu, \lambda) \neq (1, 1).$$

上の中に現れる  $E_{2k}(\tau)$ ,  $Q_k(\mu, \lambda, \tau)$  などの定義は [DLM] 参照のこと。以上の記号をもとに  $C_1(g, h)$  を定義する。 $\mathcal{H}$  を複素上半平面としてこれは関数

$$S : U(g, h) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

であって、以下の性質を満たすものである;

(C1)  $S(u, \tau)$  は  $\tau \in \mathcal{H}$ ,  $u \in U(g, h)$  に対して正則である;

(C2)  $S(u, \tau)$  は次の意味で  $M(g, h)$ -線形である。 $f \in M(g, h)$ ,  $u \in U$  に対して

$$S(f \otimes u, \tau) = f(\tau)S(u, \tau).$$

(C3)  $u \in O(g, h)$  に対して  $S(u, \tau) = 0$ 。

(C4)  $u \in U^{(\phi_g, \phi_h)}$  に対して次が成り立つ;

$$S(L[-2]u, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} S(u, \tau) + \sum_{l=1}^{\infty} E_{2l}(\tau) S(L[2l-2]u, \tau).$$

$f(\tau)$  を  $\mathcal{H}$  上正則な関数として、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  の作用を各  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$(f|_k\gamma)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau)$$

と定める。このとき次のモジュラー不変性が [DLM] に示されている。

**定理 4.**  $S \in \mathcal{C}_1$ ,  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ ,  $u \in U_{[k]}$  に対して

$$S|_\gamma(u, \tau) := S|_k\gamma(u, \tau) = (c\tau + d)^{-k} S(u, \gamma\tau)$$

と定めるとき、 $S|_\gamma \in \mathcal{C}_1(g^a h^c, g^b h^d)$  である。

この定理から関数空間  $\mathcal{C}_1(g, h)$  は  $\Gamma(g, h)$  で不変であることが分かる。それゆえ、トレース関数  $S^I$  らが  $\mathcal{C}_1(g, h)$  を張っていることが証明できればトレース関数の保型性が従うのである。そこでまず  $S^I$  が  $\mathcal{C}_1(g, h)$  の元になることを示した。

**定理 5.**  $U$  を  $\langle g, h \rangle$ -安定な既約  $V$ -加群とし、 $\mathcal{C}_{[2,0]}$ -条件を満たしていると仮定する。 $\bar{W}$  を主  $h$ -安定  $g$ -ツイスト  $V$ -加群としたとき、 $U \times \bar{W} \rightarrow \bar{W}$  型のツイスト交絡作用素  $I$  で条件 (2) を満たしているとき、 $I$  から得られるトレース関数  $S^I$  は  $\mathcal{C}_1(g, h)$  の元になる。

この定理から分かるように、実は関数空間  $\mathcal{C}_1(g, h)$  はトレース関数の満たす性質だけに注目した空間なのである。この関数空間を導入する理由は、主に (C4) を用いることにより  $\mathcal{C}_1(g, h)$  の元はみなある微分方程式を満たしていることだからである。この微分方程式は Frobenius-Fuchs の理論により解が分かっており、ある程度具体的に書き下すことができる。そこで逆にこの解を調べることで  $\mathcal{C}_1(g, h)$  の元はすべてトレース関数の和で表されることを示すというのが Zhu の行った論法である。基本的に [M], [DLM] も同様の手法を取っており、今回も例にもれずその解を調べるのである。ここでは簡単にその説明を行う。先程の微分方程式の解は (大雑把に言って)  $T(u, \tau) = q^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(u) q^{n/|g|}$  という形の関数の線形和で表されている。このトップの係数  $\alpha_0: U \rightarrow \mathbb{C}$  がうまい性質を満たしている。

**補題 1.** 上に書いた  $\alpha_0$  は次の性質を満たす:

- (i)  $ga = a$ ,  $ha = \xi a$ ,  $a \in V$ ,  $\phi_g a = a$ ,  $\phi_h a = \zeta a$ ,  $u \in U$ ,  $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$  に対して  $\alpha_0(a *_g u) = \xi^{-1} \delta_{\xi\zeta, 1} \alpha_0(u *_g a)$ ;
- (ii)  $u \in O_g(U)$  に対して  $\alpha_0(u) = 0$ ;
- (iii)  $\exists N > 0$  s.t. 任意の  $u \in U$  に対して  $\alpha_0((\omega *_g - c/24 - \lambda)^N u) = 0$ .

この補題から  $\alpha_0$  は  $A_g(U)$  から  $\mathbb{C}$  への線形写像であることが分かる。さらに上の補題 (i), (iii) から次の補題を示すことができる。

**補題 2.** 線形写像  $\alpha_0$  は、(2) を満たす主  $h$ -安定な  $g$ -ツイスト加群  $(\bar{W}_i, \psi_h^{(i)})$  上の交絡作用素  $I_i \in I_\phi(U, \bar{W}_i)$  を用いて

$$\alpha_0(u) = \sum_i c_i \text{tr}_{\bar{W}_i(0)} o^{I_i}(u) \psi_h^{(i)}$$

と表される。

この補題によって  $\alpha_0$  は  $\text{Hom}_{A_g(V)}(A_g(U) \otimes_{A_g(V)} \bar{W}(0), \bar{W}(0))$  の元によるトレース関数で表される。よって対応定理 3 を用いることにより  $T$  のトップの係数から先程のトレース関数が作れる。  $T$  とこのトレース関数の差を取ったものを  $T'$  と置くと、このトップ項もまた  $T$  と同じく補題 1 を満たしており、作り方から  $\lambda' > \lambda$  となっている。よってこのトップ項を考えることにより、  $T'$  は別の主  $h$ -安定  $g$ -ツイスト加群上のトレース関数を含んでいることが分かる。今、  $V$  は  $g$ -有理型であるから、主  $h$ -安定  $g$ -ツイスト加群の数は有限である。そのため、この操作も有限回で止まらなければならない。即ち  $T$  はトレース関数の和で表されるのである。それゆえ、次の主定理を得る。

**定理 6.**  $U$  を既約  $(g, h)$ -安定  $V$ -加群とし、  $C_{[2,0]}$ -条件を満たしているとする。  $\{(\bar{W}_g^i, \psi_h)\}_{i=1, \dots, m}$  を主  $h$ -安定  $g$ -ツイスト  $V$ -加群全体とし、  $I \in I_\phi(U, \bar{W}_g^i)$  を (2) を満たす  $\phi_g$ -ツイスト交絡作用素とすると、このような  $I$  から得られるトレース関数

$$S^I(u, \tau) = z^{\text{wt}u} \text{tr}_{|W} I(u, z) \psi_h^{-1} q^{L_0 - c/24}$$

は  $q = e^{2\pi i \tau}$  として  $\tau \in \mathcal{H}$  において収束し、このトレース関数で張られる空間  $\langle S^I \rangle$  は  $\Gamma(g, h)$  の作用で不変である。

## 参考文献

- [DLM] C. Dong, H. Li, G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory, q-alg/9703016
- [FZ] I. Frenkel and Y. C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, Duke Math. J. 66 (1992), 123-168.

- [L] H. Li, Determining Fusion Rules by  $A(V)$ -Modules and Bimodules, J. Algebra 212, 515-556
- [M] M. Miyamoto : Intertwining operators and modular invariance, preprint.
- [Z] Y.Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 237-302.