数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 113-122

RANKS AND STRUCTURE OF GROUP C^*-ALGEBRAS OF SOME DISCONNECTED LIE GROUPS

須藤　隆洋 (SUDO Takahiro)　　琉球大理

1. Introduction

まず最初に、今回の講演で登場するリー群について記号等を説明する。G を連結リー群とし、$C^*(G)$ をその C*-群環とする。G として、次の例を以下で取り上げることにする。

(1) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, 実または複素ベクトル群。

(2) $H_3 = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$, 実 3 次元ハイゼンベルグ群。ただし、

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \cong \{(c, b, a) \in \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}\}.$$

(3) $M_5 = \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{R}$, 実 5 次元 Mautner 群。$\theta$を無理数として、

$$M_5 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2\pi i t} & 0 & z \\ 0 & e^{2\pi i \theta t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, z, w \in \mathbb{C} \right\} \cong \{(z, w, t) \in \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{R}\}.$$

(4) $D_7 = \mathbb{C}^2 \rtimes_\beta H_3$, 実 7 次元 Dixmier 群。ただし、作用 βは次で定義される。

$$\beta_g(z, w) = (e^{ia} z, e^{ib} w) \in \mathbb{C}^2, \quad g = (c, b, a) \in H_3.$$

注として、H_3は I 型巾零リー群で、M_5, D_7は非 I 型可解リー群である。

次に、Γをアメナブル離散群とし、$C^*(\Gamma)$ をその C*-群環とする。Γとして、次の例を以下で取り上げることにする。

(1) $\Gamma = \mathbb{Z}$, 整数群。または、その直積群 $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$.

(2) $H_3^{\mathbb{Z}}$, 離散ハイゼンベルグ群。$H_3^{\mathbb{Z}}$は、H_3の成分を整数に制限した群。

Talk at January 26, 2001
2000 Mathematics Subject Classification. Primary 46L05, 46L80, 22D25, 19K56
Key words and phrases. Group C*-algebra, Crossed product, Solvable Lie group, Stable rank

注として、$H_3^{\mathbb{Z}}$は非I型巾零離散群である。

今回の講演では、上のようなG, Γに対して、半直積タイプの不連結リー群$G \rtimes \Gamma$の C*-群環 $C^*(G \rtimes \Gamma)$ の階数と構造に関する結果を報告する。すなわち、

- $C^*(G \rtimes \Gamma)$ の有限組成列の構成と各剰余 C*-環の構造の解析。
- 安定階数 (stable rank) $\mathrm{sr}(C^*(G \rtimes \Gamma))$ の評価。
- 連結安定階数 $\mathrm{csr}(C^*(G \rtimes \Gamma))$ の評価。

2. 階数の定義と公式

$\mathcal{A}$を C*-環 (または、その単位元付加) とし、次の集合を考える。

$$L_n(\mathcal{A}) = \{(a_j) \in \mathcal{A}^n \mid \exists (b_j) \in \mathcal{A}^n; \sum_{j=1}^{n} b_j a_j = 1\}.$$

このとき、安定階数、連結安定階数、一般安定階数 (general stable rank) はそれぞれ次で定義される ([Rf1,2]):

$$\mathrm{sr}(\mathcal{A}) = \min\{n \in \mathbf{N} \mid L_n(\mathcal{A}) \text{ が } \mathcal{A}^n \text{で稠密 }\},$$

$$\mathrm{csr}(\mathcal{A}) = \min\{n \in \mathbf{N} \mid \forall m \geq n, GL_m(\mathcal{A})_0 \text{が } L_m(\mathcal{A}) \text{ 上 } \textit{transitive} \text{ に作用 }\},$$

$$\mathrm{gsr}(\mathcal{A}) = \min\{n \in \mathbf{N} \mid \forall m \geq n, GL_m(\mathcal{A}) \text{ が } L_m(\mathcal{A}) \text{ 上 } \textit{transitive} \text{ に作用 }\}.$$

ただし、$GL_m(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ 上の m 次一般線形群で、$GL_m(\mathcal{A})_0$ はその単位元の連結成分である。このとき、次の公式が知られている。

- $\mathrm{gsr}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{csr}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{sr}(\mathcal{A}) + 1.$
- $\forall n \geq \mathrm{sr}(\mathcal{A}), \Rightarrow \mathcal{U}_n(\mathcal{A})/\mathcal{U}_n(\mathcal{A})_0 \cong K_1(\mathcal{A})$ (同型).
- $\forall n \geq \max\{\mathrm{csr}(\mathcal{A}), \mathrm{gsr}(C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{A})\}, \Rightarrow \mathcal{U}_{n-1}(\mathcal{A})/\mathcal{U}_{n-1}(\mathcal{A})_0 \cong K_1(\mathcal{A})$ (同型).

ただし、$\mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ 上の n 次ユニタリ群で、$\mathcal{U}_n(\mathcal{A})_0$はその単位元の連結成分で、$K_1(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の K_1群で、$C(\mathbb{T})$ はトーラス上の連続関数全体の C*-環である。

さらに、階数のいくつかの公式を復習する。

$(F1)$: $\mathrm{sr}(C(X)) = [\dim X/2] + 1 \equiv \dim_{\mathbb{C}} X$, $\quad \mathrm{csr}(C(X)) \leq [(\dim X + 1)/2] + 1$,

$(F2)$: $\mathrm{sr}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{K}) = \mathrm{sr}(\mathcal{A}) \wedge 2$, $\quad \mathrm{csr}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{K}) \leq \mathrm{csr}(\mathcal{A}) \wedge 2$,

$(F3)$: C*-環の完全列：$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I} \to 0$ に対して、

$$\mathrm{sr}(\mathcal{I}) \vee \mathrm{sr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \leq \mathrm{sr}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{sr}(\mathcal{I}) \vee \mathrm{sr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \vee \mathrm{csr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}),$$

$$\mathrm{csr}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{csr}(\mathcal{I}) \vee \mathrm{csr}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$$

$(F4)$: $\mathrm{sr}(M_n(\mathcal{A})) = \{(\mathrm{sr}(\mathcal{A}) - 1)/n\} + 1$, $\quad \mathrm{csr}(M_n(\mathcal{A})) \leq \{(\mathrm{csr}(\mathcal{A}) - 1)/n\} + 1$.

(cf.[Rf1,2], [Ns1], [Sh]). ただし、X はコンパクト、ハウスドルフ空間で、$C(X)$ は X 上の連続関数全体の C*-環で、$\mathbb{K}$ は可算無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の C*-環である。また、$\vee$, $\wedge$はそれぞれ最大値、最小値で、$[\cdot]$, $\{\cdot\}$ はそれぞれ整数値への切り下げ、切り上げである。

3. Scope (展望)

(1) : 半直積 $G \rtimes \Gamma \Longrightarrow$ C*-群環 $C^*(G \rtimes \Gamma)$. C*-群環を調べることで元の半直積の情報が得られる。しかし、不連結リー群 $G \rtimes \Gamma$から $C^*(G \rtimes \Gamma)$ への対応は、完全同型不変量ではない。また、ある単連結可解リー群の 1-パラメータ族 $G(-\alpha)$, $\alpha > 0$ の場合に、$G(-1)$ だけがユニモジュラーで、それらの C*-群環は全て同型であることが知られている ([Rs]).

(2) : ユニタリ双対 $(G \rtimes \Gamma)^\wedge \Longleftrightarrow$ スペクトル $(C^*(G \rtimes \Gamma))^\wedge$. $G \rtimes \Gamma$(局所コンパクト群) の既約ユニタリ表現の同値類全体の空間 (unitary dual) と $C^*(G \rtimes \Gamma)$ の既約表現の同値類全体の空間 (スペクトル) には一対一の対応がある。

(3) : Reduction :$(G' \rtimes \Gamma)^\wedge \Longleftarrow (G \rtimes \tilde{\Gamma})^\wedge$. G, Γを適当に選んで、$\tilde{\Gamma}$をΓの普遍被覆群とし、G'を G の適当な正規部分群として、連結リー群 $G \rtimes \tilde{\Gamma}$の既約表現を不連結リー群 $G' \rtimes \Gamma$の既約表現から誘導するという意味での Reductionが予想される。例として、M_5の既約表現は、次の離散 Mautner 群 M^dの既約表現から誘導される ([Bg]):

$$M^d = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C} \right\} \cong \{(z,t) \in \mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}\}.$$

この事実は、今回の講演の研究の動機の一つになっている。

(4) : 複素次元 $\dim_{\mathbb{C}}(G \rtimes \Gamma)_1^\wedge \dashleftarrow\dashrightarrow$ 安定階数 $\mathrm{sr}(C^*(G \rtimes \Gamma))$. $G \rtimes \Gamma$の 1 次元表現全体の空間 $(G \rtimes \Gamma)_1^\wedge$の複素次元は、$C^*(G \rtimes \Gamma)$ の安定階数にほぼ対応している。このことは、特に、I 型、非 I 型に関係なく連結可解リー群の場合に顕著であることがわかっている。

(5) : C*-力学系 $(C^*(G), \Gamma, \alpha) \Longleftrightarrow$ C*-接合積 $C^*(G) \rtimes_\alpha \Gamma$. C*-力学系 $(C^*(G), \Gamma, \alpha)$とその C*-接合積 $C^*(G) \rtimes_\alpha \Gamma$は一対一に対応している。したがって、この C*-力学系の構造とこの C*-接合積の構造は深く関係している。

4. 研究の流れ

ケース (A) : $C^*(\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}) \Rightarrow C^*(\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{Z}) \Rightarrow C^*(\mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z})$. 連結リー群 $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$ の C*-群環 $C^*(\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R})$ の構造と階数に関する研究は、[Sd4] で実行され済みである。今回の研究の第一のケースは、作用する群 $\mathbb{R}$ を離散化した不連結リー群 $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{Z}$ の C*-群環についてである ([Sd7]). また、さらに離散化した離散群 $\mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}$ の場合は、今後の研究で検討する予定である。

ケース (B) : $C^*(\mathbb{C}^2 \rtimes H_3) \Rightarrow C^*(\mathbb{C}^2 \rtimes H_3^{\mathbb{Z}}) \Rightarrow ?$. Dixmier 群 $D_7 = \mathbb{C}^2 \rtimes H_3$の C*-群環の構造と階数に関する研究は、[Sd5] で済みである。従って、今回は、不連結 Dixmier 群 $D_4^d = \mathbb{C}^2 \rtimes H_3^{\mathbb{Z}}$の場合を考察する ([Sd8]). さらに、その先の離散化した場合は、現在調査中である。

ケース $(C): C^*(Dm_4) \Rightarrow C^*(Dm_4^d) \Rightarrow C^*(H_3^{\mathbb{Z}}) \rtimes \mathbb{Z}$. 次の場合として、Diamond リー群 $Dm_4 = H_3 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の C*-群環を考察する ([Sd10]). ただし、

$$\alpha_t(c,b,a) = (c, e^t b, e^{-t} a) \in H_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

さらに、その不連結版 $Dm_4^d = H_3 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の場合を考える。また、$H_3^{\mathbb{Z}} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ とは定義できないので、接合積 $C^*(H_3^{\mathbb{Z}}) \rtimes_\beta \mathbb{Z}$ の場合を考える。ただし、$C^*(H_3^{\mathbb{Z}})$ の標準的な生成ユニタリ元 U, V, W (W は中心の元), $t \in \mathbb{Z}$ に対して、作用 βは次で定義される：

$$\beta_t(U) = e^{2\pi i\theta_1 t}U, \quad \beta_t(V) = e^{2\pi i\theta_2 t}V, \quad \beta_t(W) = W, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}.$$

ケース $(D): M_{n,m} = \mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}^m \Rightarrow M_{n,m}^d = \mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}^m$. 次に、作用する群を $\mathbb{R}^m$と多重化し、作用αを多重回転として、一般化 Mautner 群を $M_{n,m}$を上で定義し、その C*-群環の場合を考察する ([Sd9]). さらに、その不連結版 $M_{n,m}^d$の C*-群環の場合も考える ([Sd11]).

5. 結果

構造定理. G を上で説明した群の一つとする。このとき、$C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^N$ が存在して、その各部分剰余 C^*-環は次に同型である：

$$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\hat{G}_1), & j = N \\ \cdots\cdots, & \\ \cdots\cdots, & 1 \le j < N \end{cases}$$

4. の各場合に対応して、上の形の構造定理と階数定理をそれぞれ述べる：

定理、ケース (A) [Sd7]. $G = \mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. 作用$\alpha$は一般。このとき、

$$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^g \times \mathbb{T}), & 0 \le g \le n \\ C_0(X_j/\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K}, & X_j : \alpha\text{不変部分空間} \\ C_0(\mathbb{R}^{n_j}) \otimes (C(\mathbb{T}^{u_j}) \rtimes \mathbb{Z}). & \end{cases}$$

さらに、次の階数評価式が成り立つ：

- $2 \vee \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \vee \max_j C_j$
  $\leq \mathrm{sr}(C^*(G)) \leq \begin{cases} 2 \vee \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \vee \max_j D_j, & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ even,} \\ (1 + \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1) \vee \max_j D_j, & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ odd,} \end{cases}$
- $2 \leq \mathrm{csr}(C^*(G)) \leq (1 + \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1) \vee \max_j D_j.$

ただし、C_j, D_jは、αが $\mathbb{C}^n$の適当な不変部分空間上で周期的な場合に、その空間の次元と周期に依存した数で、計算可能である。また、$G = \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の場合も、上の構造結果の系として、同様の結果を導くことができる。

証明の概略. 各α_t, $t \in \mathbb{Z}$ が一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ の元であることが一つのキーである。すなわち、ジョルダン標準形の理論が適用可能である。これにより $\mathbb{C}^n$の不変部分空間をうまく選んで、その空間に対応する $C^*(G)$ の部分剰余 C*-環を解析することが次のステップである。階数評価式は、階数の公式を得られた組成列に帰納的に組み合わせて得られる。また、$\mathrm{csr}(C^*(G)) \geq 2$ は [Eh] の結果を用いる。 □

定理、ケース **(B)** **[Sd8]**. $D_{4n}^d = \mathbb{C}^{2n} \rtimes H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}$. このとき、

$$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C^*(H_{2n+1}^{\mathbb{Z}}) \cong \Gamma(\mathbb{T}, \{\otimes^n \mathfrak{A}_\theta\}_\theta), \\ C_0(\mathbb{R}^{n_j}) \otimes \Gamma(\mathbb{T}, \{\otimes^{n_j}(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\theta\otimes w} \mathbb{Z}) \otimes (\otimes^{n-n_j} \mathfrak{A}_\theta)\}_\theta), \\ C_0(\mathbb{R}^{n_j}) \otimes \Gamma(\mathbb{T}, \{\otimes^{n_j}(\mathfrak{A}_w \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \otimes (\otimes^{n-n_j} \mathfrak{A}_\theta)\}_\theta), \\ C_0(\mathbb{R}^{n_j}) \otimes \Gamma(\mathbb{T}, \{\otimes^{n_{j1}}(C(\mathbb{T}) \otimes \mathfrak{A}_w) \rtimes_{w\otimes\theta} \mathbb{Z} \otimes (\otimes^{n_{j2}} \mathfrak{A}_w \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \\ \otimes (\otimes^{n_{j3}} C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{w\otimes\theta} \mathbb{Z}) \otimes (\otimes^{n_{j4}} \mathfrak{A}_\theta)\}_\theta). \end{cases}$$

ただし、$\mathfrak{A}_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ は回転角θの回転 C*-環で、$w = 1/2\pi$, $\Gamma(\mathbb{T}, \{\cdot\}_\theta)$ は θをパラメータとする $\mathbb{T}$ 上の連続場の C*-環で $\{\cdot\}$ 内は各ファイバーで、その各テンソル因子は非可換トーラスである。また、$(D_{4n}^d)_1^\wedge = \mathbb{T}^{2n+1}$. さらに、次の階数評価式が成り立つ：

$$\mathrm{sr}(C^*(D_{4n}^d)) = n + 1 = \dim_{\mathbb{C}}(D_{4n}^d)_1^\wedge, \quad 2 \leq \mathrm{csr}(C^*(D_{4n}^d)) \leq n + 1.$$

証明の概略. 証明の流れは、$\mathbb{C}^{2n}$の不変部分空間をうまく選んで、それ以降は、ケース (A) のそれと同様である。一部、連続場の C*-環の階数の評価は、[Sd6] の結果を用いる。 □

定理、ケース **(C) [Sd10].** 次の同型が成り立つ：

$$(I):\quad C^*(Dm_4) \cong C^*(H_3) \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong \Gamma_0(\mathbb{R}, \{\mathfrak{A}_t \rtimes_\alpha \mathbb{R}\}_t), \quad \textit{where}$$

$$\mathfrak{A}_0 \rtimes_\alpha \mathbb{R} = C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{R}, \quad \mathfrak{A}_t \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong \mathbb{K} \otimes C_0(\mathbb{R}) \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

さらに、次の階数評価式が成り立つ：

$$\mathrm{sr}(C^*(Dm_4)) = 2, \quad \mathrm{csr}(C^*(Dm_4)) = 1.$$

さらに、同様にして以下が成り立つ：

$$(II):\quad C^*(Dm_4^d) \cong C^*(H_3) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \cong \Gamma_0(\mathbb{R}, \{\mathfrak{A}_t \rtimes_\alpha \mathbb{Z}\}_t), \quad \textit{where}$$

$$\mathfrak{A}_0 \rtimes_\alpha \mathbb{R} = C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}, \quad \mathfrak{A}_t \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong \mathbb{K} \otimes C(\mathbb{T}) \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\textit{and} \quad \mathrm{sr}(C^*(Dm_4^d)) = 2, \quad \mathrm{csr}(C^*(Dm_4^d)) = 2.$$

$$(III):\quad \mathfrak{B} \equiv C^*(H_3^{\mathbb{Z}}) \rtimes_\beta \mathbb{Z} \cong \Gamma(\mathbb{T}, \{\mathfrak{A}_\theta \rtimes_\beta \mathbb{Z}\}_\theta), \quad \mathfrak{A}_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

$$\textit{and} \quad \mathrm{sr}(\mathfrak{B}) = 2, \quad \mathrm{csr}(\mathfrak{B}) = 2.$$

証明の概略. (I), (II) では、$C^*(H_3) \cong \Gamma_0(\mathbb{R}, \{\mathfrak{A}_t\}_t)$, $\mathfrak{A}_0 = C_0(\mathbb{R}^2)$, $\mathfrak{A}_t = \mathbb{K}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に注意する。(III) では、$C^*(H_3^{\mathbb{Z}}) \cong \Gamma(\mathbb{T}, \{\mathfrak{A}_\theta\}_\theta)$ に注意する。また、$\mathrm{csr}(C^*(Dm_4)) = 1$ は、$C^*(Dm_4)$ の K_1-群 $K_1(C^*(Dm_4))$ が $\{0\}$ に同型に注意する。 □

定理、ケース **(D) [Sd9].** $M_{n,m} = \mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}^m$. ただし、$\alpha$は多重回転。このとき、

$$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^l \times \mathbb{R}^m), \\ C_0(\mathbb{C}^l \times \mathbb{R}^{k_j}) \otimes (C(\mathbb{T}^{k_j}) \rtimes \mathbb{R}^m). \end{cases}$$

$$C(\mathbb{T}^{k_j}) \rtimes \mathbb{R}^m \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{T}^{k_j} \times \mathbb{R}^{h_j}) \otimes \mathbb{K}, \\ C_0(\mathbb{T}^{k'_j} \times \mathbb{R}^{h'_j}) \otimes (C(\mathbb{T}^{k_j - m}) \rtimes \mathbb{Z}^m) \otimes \mathbb{K}. \end{cases}$$

ただし、$0 \leq k'_j \leq k_j$, $0 \leq h_j \leq m - j$. さらに、

$$\begin{cases} \mathrm{sr}(C^*(M_{n,m})) = 2 \vee \dim_{\mathbb{C}}(M_{n,m})_1^\wedge, & \textit{if} \dim(M_{n,m})_1^\wedge \textit{ even}, \\ 2 \vee \dim_{\mathbb{C}}(M_{n,m})_1^\wedge \leq \mathrm{sr}(C^*(M_{n,m})) \leq 1 + \dim_{\mathbb{C}}(M_{n,m})_1^\wedge, & \textit{if} \dim(M_{n,m})_1^\wedge \textit{ odd}, \end{cases}$$

$$\mathrm{csr}(C^*(M_{n,m})) \leq 2 \vee \mathrm{csr}(C_0((M_{n,m})_1^\wedge)) = [(1 + \dim(M_{n,m})_1^\wedge)/2] + 1.$$

定理、ケース **(D) [Sd11].** $M^d_{n,m} = \mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}^m$. ただし、$\alpha$は多重回転。このとき、

$$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^l \times \mathbb{T}^m), \\ C_0(\mathbb{C}^l \times \mathbb{R}^{k_j} \times \mathbb{T}^{m_j}) \otimes (C(\mathbb{T}^{k'_j}) \rtimes \mathbb{Z}^{m-m'_j}). \end{cases}$$

さらに、

$$C(\mathbb{T}^k) \rtimes \mathbb{Z}^m \cong \begin{cases} AT \textit{ or } AH \\ EAH_s \quad (1 \leq s \leq m-1) \\ HE_m \end{cases}$$

ただし、

- *AT* は単純 *AT* 環で、*AH* は単純でない *AH* 環
- $0 \to SAH \to EAH_1 \to AH \to 0$, *where*

  AH は *AH* 環で、*SAH* はその *suspension.* 帰納的に、

  $0 \to SEAH_s \to EAH_{s+1} \to EAH_s \to 0, (1 \leq s \leq m-1)$,
- $0 \to SH \to HE_1 \to H \to 0$, *where*

  H は同次的 C*-環で、*SH* はその *supension.* 帰納的に、

  $0 \to SHE_s \to HE_{s+1} \to HE_s \to 0, (1 \leq s \leq m-1)$.

- $2 \vee \dim_{\mathbb{C}}(M_{n,m})^{\wedge}_{1} \vee \max_{j_t} C_{j_t}$
  $$\leq \mathrm{sr}(C^*(M^d_{n,m})) \leq \begin{cases} 2 \vee \dim_{\mathbb{C}}(M_{n,m})^{\wedge}_{1} \vee \max_{j_t} D_{j_t}, & \textit{if} \dim(M_{n,m})^{\wedge}_{1} \textit{ even,} \\ (1+\dim_{\mathbb{C}}(M_{n,m})^{\wedge}_{1}) \vee \max_{j_t} D_{j_t}, & \textit{if} \dim(M_{n,m})^{\wedge}_{1} \textit{ odd,} \end{cases}$$
- $2 \leq \mathrm{csr}(C^*(M_{n,m})) \leq (1+\dim_{\mathbb{C}}(M_{n,m})^{\wedge}_{1}) \vee \max_{j_t} D_{j_t}.$

ただし、C_{j_t}, D_{j_t}はそれぞれ、$C(\mathbb{T}^k) \rtimes \mathbb{Z}^m$の同次的部分剰余 C*-環に対応する$\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1}$の同次的部分剰余 C*-環の sr, csr で、これらは計算可能である。

注：参考文献は次ページにあります。

References

[Bg] L. Baggett, *Representations of the Mautner group, I*, Pacific J. Math. **77** (1978), 7–22.

[Dx] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland, 1962.

[Eh] N. Elhage Hassan, *Rangs stables de certaines extensions*, J. London Math. Soc. **52** (1995), 605–624.

[Gr1] P. Green, *C^*-algebras of transformation groups with smooth orbit space*, Pacific. J. Math. **72** (1977), 71–97.

[Gr2] ———, *The structure of imprimitivity algebras*, J. Funct. Anal. **36** (1980), 88–104.

[Ns1] V. Nistor, *Stable range for tensor products of extensions of $\mathcal{K}$ by $C(X)$*, J. Operator Theory **16** (1986), 387–396.

[Ns2] ———, *Stable rank for a certain class of type I C^*-algebras*, J. Operator Theory **17** (1987), 365–373.

[Rf1] M.A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K-theory of C^*-algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301–333.

[Rf2] ———, *The homotopy groups of the unitary groups of non-commutative tori*, J. Operator Theory **17** (1987), 237–254.

[Rs] J. Rosenberg, *The C^*-algebras of some real and p-adic solvable groups*, Pacific. J. Math. **65** (1976), 175–192.

[Sh] A.J-L. Sheu, *A cancellation theorem for projective modules over the group C^*-algebras of certain nilpotent Lie groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 365–427.

[Sd1] T. Sudo, *Stable rank of the reduced C^*-algebras of non-amenable Lie groups of type I*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3647–3654.

[Sd2] ———, *Stable rank of the C^*-algebras of amenable Lie groups of type I*, Math. Scand. **84** (1999), 231–242.

[Sd3] ———, *Dimension theory of group C^*-algebras of connected Lie groups of type I*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 583–590.

[Sd4] ———, *Structure of group C^*-algebras of Lie semi-direct products $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{R}$*, To appear.

[Sd5] ———, *Structure of group C^*-algebras of the generalized Dixmier groups*, Preprint.

[Sd6] ———, *Ranks and embeddings of C^*-algebras of continuous fields*, Preprint.

[Sd7] ———, *Structure of group C^*-algebras of semi-direct products of $\mathbb{C}^n$ by $\mathbb{Z}$*, Preprint.

[Sd8] ———, *Structure of group C^*-algebras of the generalized disconnected Dixmier groups*, To appear.

[Sd9] ———, *Structure of group C^*-algebras of the generalized Mautner groups*, Preprint.

[Sd10] ———, *Stable ranks of group C^*-algebras of the generalized Diamond Lie groups*, Preprint.

[Sd11] ———, *Structure of group C^*-algebras of the generalized disconnected Mautner groups*, Preprint.

[ST1] T. Sudo and H. Takai, *Stable rank of the C^*-algebras of nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **6** (1995), 439–446.

[ST2] ———, *Stable rank of the C^*-algebras of solvable Lie groups of type I*, J. Operator Theory **38** (1997), 67–86.

Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, University of the Ryukyus, Nishihara-cho, Okinawa 903-0213, Japan.

E-mail address: sudo@math.u-ryukyu.ac.jp