数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 58-92

On the structure of Goodman-de la Harpe-Jones subfactors

SATOSHI GOTO (SOPHIA UNIVERSITY)
後藤 聡史 (上智大学)

1 Introduction

1995 年 4 月の Fields Institute における連続講演，および 1995 年 6 月の Aarhus での講演で，Ocneanu は essential path や double triangle algebra などの新しい概念を導入して，彼の新しい理論が，以下のような 5 つの問題に対して，統一的な解答を与えることを示した．

問題 1 上下 2 つのグラフを A, D, E 型 Dynkin 図形から選んで固定したときの biunitary connection をすべて分類せよ．

問題 2 Goodman-de la Harpe-Jones subfactor の (dual) principal graph と fusion rule を計算せよ．

問題 3 A_n 型の Jones subfactor の generalized intermediate subfactor をすべて分類せよ．

問題 4 $SU(2)$ modular invariant matrix の off-diagonal term がどのようにして生じるのか説明せよ．

問題 5 Turaev-Viro type の TQFT において $SU(2)_N$ 型の smooth part を持つような TQFT の頂点のラベルとして可能なものをすべて挙げよ．

上記の 5 つの問題のうち，問題 1 〜 3 は subfactor 理論，問題 4 は共形場理論，問題 5 は位相的場の理論に関するものであるが，現在では多くの問題が一般化された形で解決されている．

問題 1 については，Ocneanu による Fields Institute の講義録 [5], およびその丁寧な解説 [3] を参照．問題 3 のアイディアは Kawahigashi により paragroup の量子ガロア対応として定式化されている [4]．また，問題 4 は Böckenhauer-Evans-Kawahigashi([1, 2]) によって，conformal field theory における α-induction の理論と double triangle algebra のテクニックをうまく組み合わせることにより，$SU(2)$ とは限らない非常に一般的な場合にまで拡張されて解決されており，現在では modular invariant matrix の現れるからくりが明らかにされている．

今回の講演は問題 2 に対する解答を与えるのが主目的である．実は問題 2 の解答は，conformal field theory における conformal inclusion を考えることによっても得られることがわかっているのだが，ここでは conformal field theory などのテクニックは用いないで，グラフとその上の connection という，非常に combinatorial な議論だけで Goodman-de la Harpe-Jones subfactor の構造が解明できることを示す．ついでに intermediate subfactor の存在や subequivalent paragroup への応用についてもお話する．

2 Connection の system と bimodule の system の対応

K, L を 2 つの有限 2 部グラフとして，Figure 1 のように 4 つのグラフのうち，上下のグラフを K, L とする．このグラフ上の bi-unitary connection を K-L connection とよぶ．Figure 1 のように K-L connection があれば，K の頂点 $*_K$ をひとつとって固定して string algebra construction によって subfactor $N \subset M$ を構成することができる．この構成法は頂点 $*_K$ の選び方に依存しているが，構成された結果の subfactor $N \subset M$ は，どの頂点を選んでも同型になり，頂点 $*_K$ の選び方によらないことはよく知られている．

このとき，上のように connection w から構成された subfactor $N \subset M$ から，通常のように N-M bimodule ${}_N M_M$ とその conjugate bimodule ${}_M M_N$ の相対テンソル積と既約分解から，N-N, N-M, M-N, M-M の 4 種の bimodule からなる system が得られるが，一方で，K-L connection w からも，connection w とその conjugate L-K connection $\bar{w}$ の合成と分解により，${}_K(w\bar{w})^m_K, {}_K(w\bar{w})^m w_L, {}_L(\bar{w}w)^m \bar{w}_K, {}_L(\bar{w}w)^m_L$ の 4 種の connection の既約分解から，K-K, K-L, L-K, L-L の 4 種の bi-unitary connection の system が得られる．

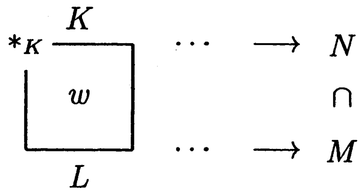


Figure 1:

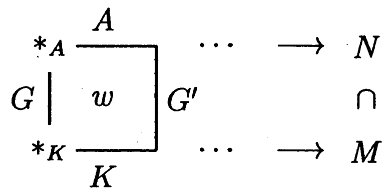


Figure 2:

さて，問題はこれらの connection の system と bimodule の system の関係であるが，容易に想像されるように，これらは subfactor $N \subset M$ が finite depth のとき，$N \subset M$ から得られる paragroup として，同じものであることがわかる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 1 K-L connection ${}_Kw_L$ から構成された subfactor $N \subset M$ が finite depth ならば，${}_Kw_L$ から得られる４種の connection の system は subfactor $N \subset M$ から得られる４種の bimodule の system と同じ fusion rule をもつ．また，上の connection の system に対応する (Asaeda-Haagerup の意味での) generalized open string bimodule の system は，subfactor $N \subset M$ から得られる paragroup と一致する．

注意 2 上にも述べたように，${}_Kw_L$ から構成される subfactor $N \subset M$ は頂点 $*_K$ の選び方によらない．また，connection から generalized open string bimodule をつくるときにも，上下のグラフ K, L から１つずつ頂点 $*_K, *_L$ を選んで固定する必要があるが，上の定理の結果はこれら２つの頂点の選び方にはよらないことがわかる．

定理１により，$N \subset M$ の fusion rule や paragroup を見るには，connection の system を見ればよい．そして，connection の fusion rule はグラフの合成と分解という combinatorial な deta から解析できるので，この方法によって，以下のように Goodman-de la Harpe-Jones subfactor の fusion rule を決定することができるのである．

3 Goodman-de la Harpe-Jones subfactor の (dual) principal graph と fusion rule

A を Dynkin diagram A_n のいずれか，K を Dynkin diagram A, D, E のいずれかとする．このとき K とその頂点 $*_K = x$ を選ぶことによって，Figure 2 のように構成される subfactor が Goodman-de la Harpe-Jones subfactor と呼ばれているものである．この subfactor を以下 GHJ$(K, *_K = x)$ と表すことにする．ここで，縦のグラフ G,G' はグラフ K の essential path の次元を見れば簡単に得られ，essential path の次元も moderated pascal rule により簡単に計算できることを注意しておく [5]．

既約な A-K connection は以下の命題３のようにグラフ K の頂点 $*_K$ の選び方により一意的に決まってしまうことがわかる．このことと，connection に対する Frobenius reciprocity（命題４）が fusion rule の計算の道具となる．

命題 3 ([3, Proposition 5.6]) 既約な A-K connection は，初期条件，つまりグラフ A の端の頂点 $*_A$ がグラフ K のどの頂点 x と結ばれているか，で一意的に決まってしまう (Figure 3)．また，このとき，connection w は縦のグラフの gauge choice による unitary 同値類を除いて一意的に定まる．

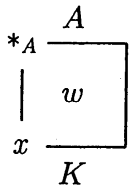


Figure 3:

Dynkin diagram A_m

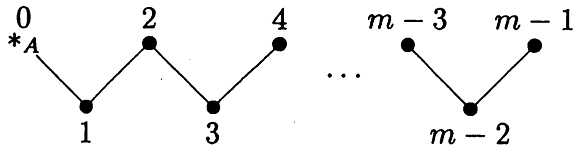


Figure 4: The label of vertices of the Dynkin diagram A_m.

命題 4 (Frobenius reciprocity) ([3, Proposition 3.20]) ${}_K\alpha_L$, ${}_L\beta_M$, ${}_K\gamma_M$ をそれぞれ既約な K-L, L-M, K-M connection とする．このとき，$m\gamma \prec \alpha\cdot\beta$ ならば，$m\alpha \prec \gamma\cdot\bar{\beta}$ かつ $m\beta \prec \bar{\alpha}\cdot\gamma$ が成り立つ．

● 4 種の connection の fusion rule.

Goodman-de la Harpe-Jones subfactor から生じる connection の system は，A-A, A-K, K-A, K-K の 4 種類からなっているので，fusion rule は以下の 8 つの multiplication table からなる．

(1) A-$A \times A$-$A \longrightarrow A$-A

(2) A-$A \times A$-$K \longrightarrow A$-K　　(2)′ K-$A \times A$-$A \longrightarrow K$-A　　(2)″ A-$K \times K$-$A \longrightarrow A$-A

(3) A-$K \times K$-$K \longrightarrow A$-K　　(3)′ K-$K \times K$-$A \longrightarrow K$-A　　(3)″ K-$A \times A$-$K \longrightarrow K$-K

(4) K-$K \times K$-$K \longrightarrow K$-K

このうち，(2) と (2)′ および (3) と (3)′ は conjugate をとれば互いに移りあい，(2) と (2)″ および (3) と (3)″ は Frobenius reciprocity によって互いに移りあうので，実質的には (1) ~ (4) の 4 つの multiplication table を調べればよいことになる．

● (1) A-$A \times A$-$A \longrightarrow A$-A, (2) A-$A \times A$-$K \longrightarrow A$-K の fusion rule と principal graph.

A_m 型の Dynkin diagram の頂点を端から $0, 1, 2, \cdots, m-1$ と Figure 4 のようにラベル付けし，初期条件が $*_A = 0$ と n を結ぶ 1 本の辺からなる既約な A-A connection を ${}_An_A$ と書き表すことにする (Figure 5)．同様に，初期条件が $*_A = 0$ と K の頂点 x を結ぶ 1 本の辺からなる既約な A-K connection を ${}_Ax_K$ と書き表す (Figure 5)．

このとき，(1) A-$A \times A$-$A \longrightarrow A$-A と (2) A-$A \times A$-$K \longrightarrow A$-K の fusion rule は，縦のグラフの合成と分解により，Figure 6 のように計算されるので，これを見るには，結局 connection ${}_Ax_K$ の縦のグラフの辺の数を数えればよいことがわかる．ところが，connection ${}_Ax_K$ は $\mathrm{String}_*A \subset \mathrm{String}_xK$ なる埋め込みから生じる connection なのでこの埋め込みの縦のグラフの辺の数はちょうど K の頂点 x から頂点 y への essential path の次元に等しいことがわかる．したがって，fusion

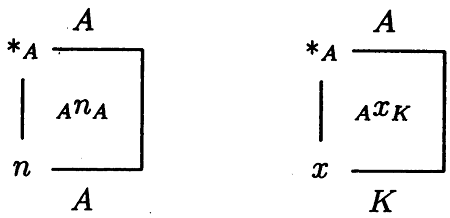


Figure 5:

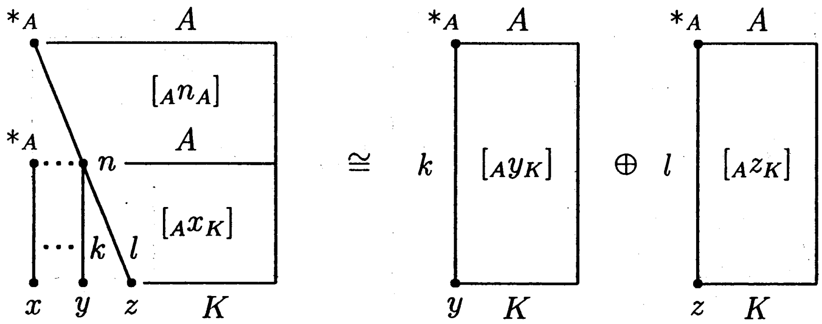


Figure 6: A-$A \times A$-$K \longrightarrow A$-K の fusion rule

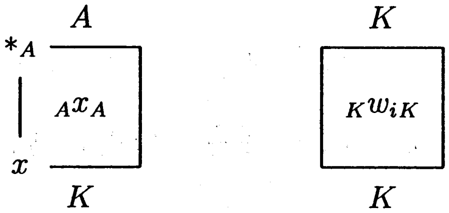


Figure 7:

rule は次のように求められる.

$$_An_A \cdot {}_Ax_K \cong \bigoplus_{y \in \mathrm{Vert}K} (\dim \mathrm{EssPath}^{(n)}_{x,y} K)\ {}_Ay_K$$

$$_K\bar{x}_A \cdot {}_An_A \cong \bigoplus_{y \in \mathrm{Vert}K} (\dim \mathrm{EssPath}^{(n)}_{x,y} K)\ {}_K\bar{y}_A$$

$$_Ay_K \cdot {}_K\bar{x}_A \cong \bigoplus_{n \in \mathrm{Vert}A} (\dim \mathrm{EssPath}^{(n)}_{x,y} K)\ {}_An_A$$

A-$A \times A$-$K \longrightarrow A$-K の fusion rule から principal graph が決まるから，$\mathrm{GHJ}(K, *_K = x)$ の principal graph は connection $_Ax_K$ の縦のグラフの $*_A$ を含む連結成分と一致することがわかる．これは，前にも述べたとおり，essential path の次元を数えることによって簡単に求めることができる．このことから，とくに $\mathrm{GHJ}(K, *_K = x)$ の principal graph の even vertex は Dynkin diagram A_m の even vertex (の subset) に対応していることがわかる．

● (3) A-$K \times K$-$K \longrightarrow A$-K の fusion rule と dual principal graph.

前と同じ記号を使って，初期条件が $*_A = 0$ と K の頂点 x を結ぶ 1 本の辺からなる既約な A-K connection を $_Ax_K$ と書き表し，また，既約な K-K connection を $_Kw_{iK}$ とする (Figure 7). このとき，(3) A-$K \times K$-$K \longrightarrow A$-K の fusion rule は，やはり縦のグラフの合成と分解により，Figure 8 のように計算されるので，今度も fusion rule は，結局 connection $_Ax_K$ の縦のグラフの辺の数を数えることによって得られることがわかる．

しかし，今度は前のように essential path の次元を数えるという簡単な方法は使えない．ところが，K を Dynkin diagram A, D, E のいずれかとすれば，すべての K-K connection のリストは Ocneanu によって求められており [5]，また，すべての K-K connection からなる connection の system の fusion rule も計算可能である [5]．そこで，これらのデータから K-K connection の縦のグラフの辺の数を求めることができる．例えば，$K = A_3, A_4, A_5, A_6, D_4, D_5, D_6, E_6, E_7, E_8$ の場合の縦のグラフは Figure 20 〜 30 で与えられる．ただし，E_6, E_7, E_8 の場合はグラフが複雑になるので，グラフを挙げるかわりにグラフの隣接行列を与えた．

したがって，このことから A-$K \times K$-$K \longrightarrow A$-K の fusion rule は以下のように与えられ

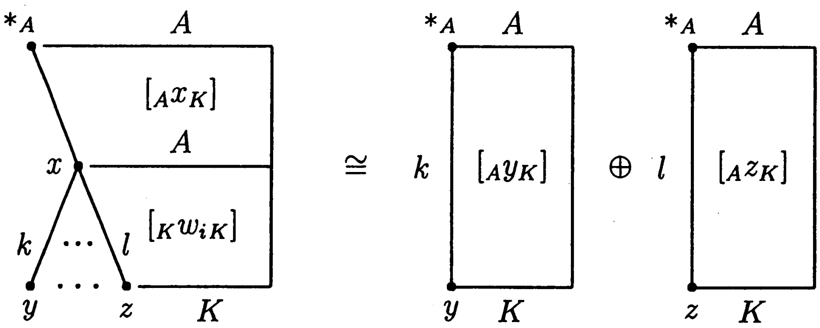


Figure 8: A-K × K-K ⟶ A-K の fusion rule

$$
\begin{aligned}
{}_A x_K \cdot {}_K w_{iK} &\cong \bigoplus_{y \in \mathrm{Vert}K} n(w_i)_{x,y}\ {}_A y_K \\
{}_K w_{iK} \cdot {}_K \bar{x}_A &\cong \bigoplus_{y \in \mathrm{Vert}K} n(w_i)_{x,y}\ {}_K \bar{y}_A \\
{}_K \bar{x}_A \cdot {}_A y_K &\cong \bigoplus_{w_i \in {}_K Z_K} n(w_i)_{x,y}\ {}_K w_{iK}
\end{aligned}
$$

ここで，${}_K Z_K$ はすべての K-K connection からなる system，(つまり K-K double triangle algebra の center と同型な fusion rule algebra でもある) を表し，また $n(w_i)_{x,y}$ は K-K connection ${}_K w_{iK}$ の縦のグラフの頂点 x と y を結ぶ辺の数を表すものとする．

さて，上の fusion rule から GHJ$(K, *_K = x)$ の dual principal graph が得られるが，それは (3) A-K × K-K ⟶ A-K の fusion rule を表すグラフの (${}_K w_{0K}$ なる trivial K-K connection と) ${}_A x_K$ を含む連結成分である．以下の Figure 31 ～ 42 に $K = E_6, E_7, E_8$ の場合の (dual) principal graph の例を挙げておく．

● (4) K-K × K-K ⟶ K-K の fusion rule.

これは，Ocneanu によって得られたすべての K-K connection からなる system の fusion rule で，$({}_K Z_K, *)$，すなわち K-K double triangle algebra の center に積として convolution product (vertical product) $*$ を入れた algebra と同型になっている．そして，この fusion rule は，もともとの A, D, E の fusion rule と同型な chiral left part と chiral right part から生成されており，両者の chiral part は相対的に可換であることから計算することができる [3, 5].

● GHJ$(K, *_K = x)$ の (dual) principal graph の even vertex の fusion rule.

$N \subset M$ を Goodman-de la Harpe-Jones subfactor GHJ$(K, *_K = x)$ (すなわち Figure 2 のように A-K connection ${}_A x_K$ から構成される subfactor) とするとき，$N \subset M$ の (dual) principal graph の even vertex の fusion rule，すなわち N-N bimodule と M-M bimodule の fusion rule を調べてみる．

N-N bimodule の system は connection ${}_A x_K$ の生成する A-A connection の system と同型であり，これは ${}_A Z_A^{\mathrm{even}}$，すなわち，A-A double triangle algebra の center の even part のなす fusion rule algebra に等しい．したがって，N-N bimodule の fusion rule は A^{even}，すなわち Jones の A 型 subfactor の even vertex のなす fusion rule と一致する．このことから，とくにすべての Goodman-de la Harpe-Jones subfactor $N \subset M$ の N-N bimodule の fusion rule は可換であることがわかる．

つぎに，M-M bimodule であるが，これは connection ${}_A x_K$ の生成する K-K connection の system と同型であり，これも ${}_K Z_K^{\mathrm{even}}$ (の一部)，すなわち，K-K double triangle algebra の center の even part のなす fusion rule algebra (の一部) に等しいことがわかる．

そこで，一般に ${}_K Z_K^{\mathrm{even}}$ の fusion rule はどうなっているのかをつぎに調べてみる．

● ${}_K Z_K^{\mathrm{even}}$ の fusion rule.

Graph K	fusion rule of ${}_K Z_K^{\text{even}}$	vertical edges of K-K connections
A_n	commutative	EssPathA_n
D_{2n}	non-commutative	EssPath$D_{2n} + \varepsilon$
D_{2n+1}	commutative	EssPathD_{2n+1}
E_6	commutative	Figure 27
E_7	commutative	Figure 28
E_8	commutative	Figure 29, 30

Table 1: The fusion rule of ${}_K Z_K^{\text{even}}$ and vertical edges of K-K connections

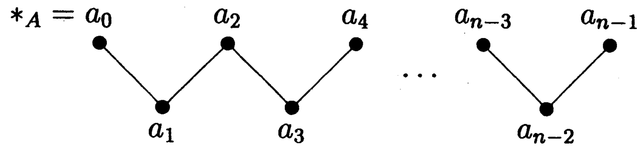


Figure 9: The label of vertices of the Dynkin diagram A_n.

${}_K Z_K^{\text{even}}$ の fusion rule と K-K connection の縦のグラフの性質を以下の Table 1 にまとめた. 具体的な fusion rule は, 前に述べたように ${}_K Z_K$ の fusion graph (Figure 43 ～ 48) から計算できる.

4 Goodman-de la Harpe-Jones subfactor の構造

● A_n 型の Goodman-de la Harpe-Jones subfactors.

$N \subset M$ を A_n 型の Jones subfactor として, $N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k \subset$ を Jones tower とする. Figure 9 のように Dynkin diagram A_n の頂点を $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ とする. このとき, $(K = A_n, *_K = a_m)$ に対応する Goodman-de la Harpe-Jones subfactor は

$$\mathrm{GHJ}(A_n, * = a_m) \quad \cong \quad pN \subset pM_{m-1}p$$

となる. ここで p は $p \in \mathrm{Proj}(N' \cap M_{m-1})$ で a_m に対応する minimal projection である. したがって, この場合は principal graph と dual principal graph は一致して, それぞれの even vertex の fusion rule はどちらも A_n^{even} となる.

● D_{2n+1} 型の Goodman-de la Harpe-Jones subfactors.

Figure 10 のように Dynkin diagram D_{2n+1} の頂点を $d_0, d_1, d_2, \cdots, d_{2n-2}, d_{2n-1}, d'_{2n-1}$ とする. このとき, $(K = D_{2n+1}, *_K)$ に対応する Goodman-de la Harpe-Jones subfactor は

- $*_K = d_0$ のときは index=2 の $\mathbf{Z}_2$ の接合積からくる subfactor $N \subset N \rtimes \mathbf{Z}_2$ と同型になる.
- $*_K \neq d_0, d_{2n-1}, d'_{2n-1}$ のときは Figure 11 のように non trivial な intermediate subfactor が存在することがわかる.

● D_{2n} 型の Goodman-de la Harpe-Jones subfactors.

Figure 12 のように Dynkin diagram D_{2n} の頂点を $d_0, d_1, d_2, \cdots, d_{2n-3}, d_{2n-2}, d'_{2n-2}$ とする. このとき, $(K = D_{2n}, *_K)$ に対応する Goodman-de la Harpe-Jones subfactor は

- $*_K = d_0$ のときは index=2 の $\mathbf{Z}_2$ の接合積からくる subfactor $N \subset N \rtimes \mathbf{Z}_2$ と同型になる.
- $n = 2$ つまり $K = D_4$ で, $*_K = d_2, d'_2$ のときも index=2 の $\mathbf{Z}_2$ の接合積からくる subfactor $N \subset N \rtimes \mathbf{Z}_2$ と同型になる.
- $*_K \neq d_0, d_{2n-2}, d'_{2n-2}$ のときは Figure 13 のように non trivial な intermediate subfactor が存在することがわかる.

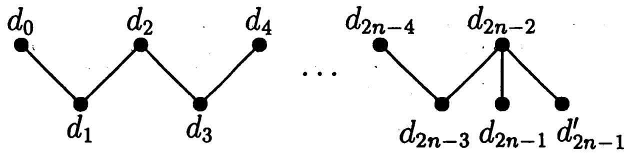


Figure 10: The label of vertices of the Dynkin diagram D_{2n+1}.

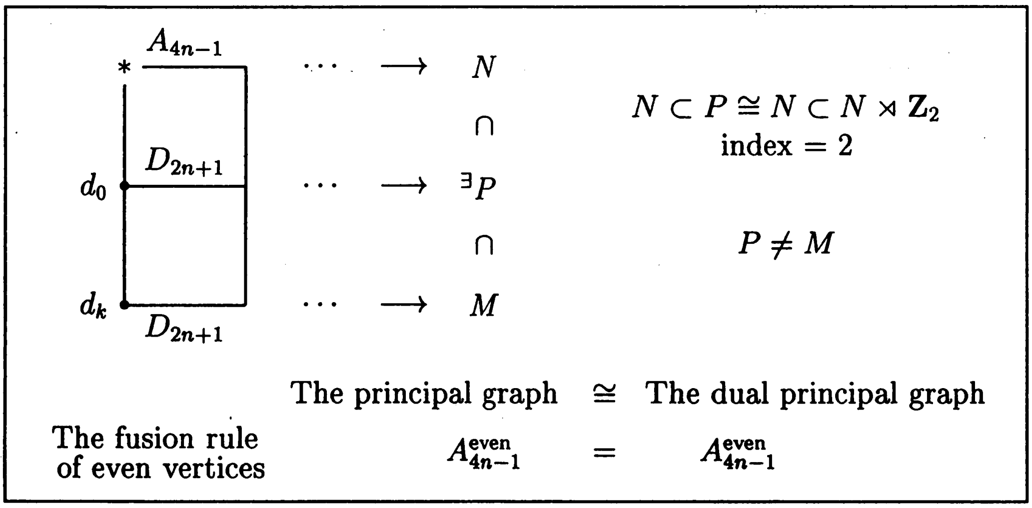


Figure 11:

● E_6 型の Goodman-de la Harpe-Jones subfactors.

Figure 14 のように Dynkin diagram E_6 の頂点を $e_0, e_1, e_2, \cdots, e_5$ とする．このとき，$(K = E_6, *_K)$ に対応する Goodman-de la Harpe-Jones subfactor は

• $*_K = e_0$ のときは index $= 3+\sqrt{3}$ の subfactor になり，その principal graph と dual principal graph は Figure 31 のようになる．これは principal graph と dual principal graph が同じ形だが，その fusion rule が異なるような最初の例として知られている．

• $*_K \neq e_0$ のときは Figure 15 のように non trivial な intermediate subfactor が存在することがわかる．

● E_7 型の Goodman-de la Harpe-Jones subfactors.

Figure 16 のように Dynkin diagram E_7 の頂点を $e_0, e_1, e_2, \cdots, e_6$ とする．このとき，$(K = E_7, *_K)$ に対応する Goodman-de la Harpe-Jones subfactor は

• $*_K = e_0$ のときは index $= \dfrac{|A_{17}|}{|E_7|} \fallingdotseq 7.759$ の subfactor になり，その principal graph と dual principal graph は Figure 37 のようになる．ここで，$|A_{17}|$ や $|E_6|$ はそれぞれのグラフの total mass，つまり，すべての頂点の normalized Perron-Frobenius eigenvalue の 2 乗の和を表している．

• $*_K \neq e_0, e_4, e_5$ のときは Figure 17 のように non trivial な intermediate subfactor が存在することがわかる．

● E_8 型の Goodman-de la Harpe-Jones subfactors.

Figure 18 のように Dynkin diagram E_8 の頂点を $e_0, e_1, e_2, \cdots, e_7$ とする．このとき，$(K = E_8, *_K)$ に対応する Goodman-de la Harpe-Jones subfactor は

• $*_K = e_0$ のときは index $= \dfrac{|A_{29}|}{|E_8|} \fallingdotseq 19.48$ の subfactor になり，その principal graph と dual principal graph は Figure 41 のようになる．

• $*_K \neq e_0$ のときは Figure 19 のように non trivial な intermediate subfactor が存在すること

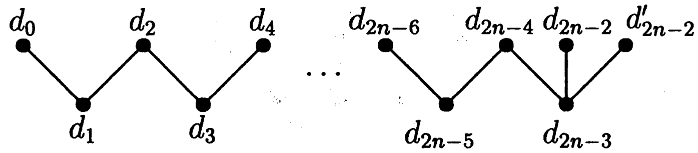
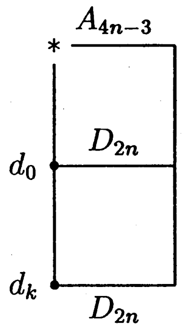


Figure 12: The label of vertices of the Dynkin diagram D_{2n}.



$$\begin{array}{ccc} \cdots \longrightarrow N & & \\ \cap & & N \subset P \cong N \subset N \rtimes \mathbf{Z}_2 \\ & & \text{index} = 2 \\ \cdots \longrightarrow {}^{\exists}P & & \\ \cap & & P \neq M \\ \cdots \longrightarrow M & & \end{array}$$

	The principal graph	$\not\cong$	The dual principal graph
The number of even vertices	$2n-1$	$\neq$	$2n+2$
The fusion rule of even vertices	A_{4n-3}^{even} commutative	$\neq$	${}_{D_{2n}}Z_{D_{2n}}^{\text{even}}$ non-commutative

Figure 13:

5 Subequivalent paragroup への応用

K を $D_{2n}(n \geq 3), E_6, E_7, E_8$ のいずれかのグラフとし，$*_K$ を GHJ$(K, *_K)$ が index=2 の subfactor とならないように選ぶ．(この場合，そのような選び方は可能である．) $N \subset M = \mathrm{GHJ}(K, *_K)$ とするとき，前の section の結果から，N-N bimodule の system は，A_n^{even} と同型になり，M-M bimodule の system は，${}_K Z_K^{\text{even}}$ と同型になる．${}_K Z_K^{\text{even}}$ は strict subsystem として K^{even} を含むから，K 型 subfactor に対応する paragroup は A_n 型 subfactor に対応する paragroup の strict subequivalent paragroup となることがわかる．また，D_4 型 paragroup の場合は GHJ$(D_4, *_K)$ そのものではなく，3 つの D_4^{even} の頂点の選び方すべてに対する GHJ$(D_4, *_K)$ の直和をとれば，同様に A_5 型 paragroup の strict に subequivalent な paragroup になることがわかる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 5 Jones の A_n 型の subfactor に対応する paragroup には，以下のような strict に subequivalent な paragroup が存在する．

$$A_{4n-3} \succ D_{2n}\ (n \geq 2), \quad A_{11} \succ E_6, \quad A_{17} \succ E_7, \quad A_{29} \succ E_8.$$

References

[1] Böckenhauer, J., Evans, D. E. and Kawahigashi, Y. *On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, Comm. Math. Phys. **208** (1999), 429–487.

[2] Böckenhauer, J., Evans, D. E. and Kawahigashi, Y. *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), 733–784.

[3] Goto, S. *An introduction to Ocneanu's theory of double triangle algebras for subfactors and classification of irreducible connections on the Dynkin diagrams.* 数理解析研究所講究録 **1077** 「作用素環論の最近の話題（幾何学とのつながり）」(1999), 105–139.

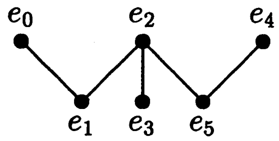


Figure 14: The label of vertices of the Dynkin diagram E_6.

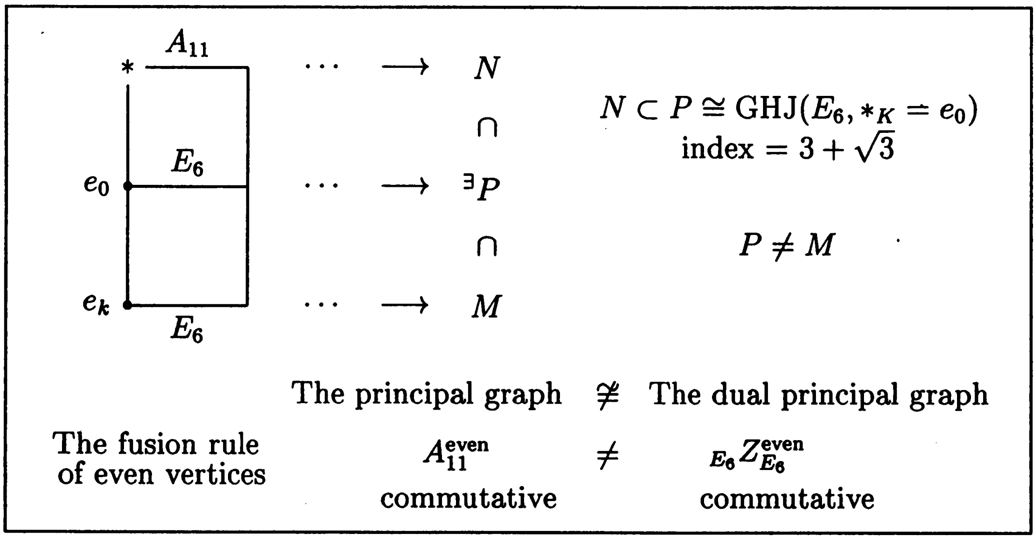


Figure 15:

[4] Kawahigashi, Y. *Quantum Galois correspondence for subfactors*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 481–497.

[5] Ocneanu, A. *Paths on Coxeter diagrams: from Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors.* (Notes recorded by S. Goto), in *Lectures on operator theory*, (ed. B. V. Rajarama Bhat et al.), The Fields Institute Monographs, Providence, Rhode Island: AMS Publications. (2000), 243–323.

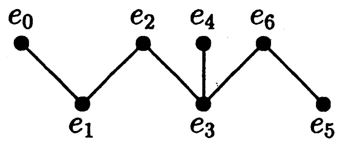
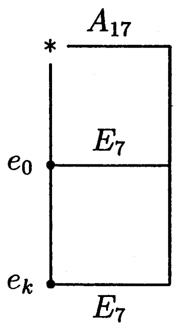


Figure 16: The label of vertices of the Dynkin diagram E_7.



$$\begin{array}{ccc} \cdots & \longrightarrow & N \\ & & \cap \\ \cdots & \longrightarrow & {}^{\exists}P \\ & & \cap \\ \cdots & \longrightarrow & M \end{array}$$

$N \subset P \cong \mathrm{GHJ}(E_7, *_K = e_0)$
index $\fallingdotseq 7.759$

$P \neq M$

	The principal graph	$\not\cong$	The dual principal graph
The number of even vertices	9	$=$	9
The fusion rule of even vertices	A_{17}^{even} commutative	$\neq$	${}_{E_7}Z_{E_7}^{\mathrm{even}}$ commutative

Figure 17:

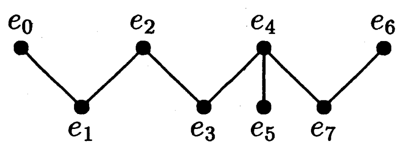
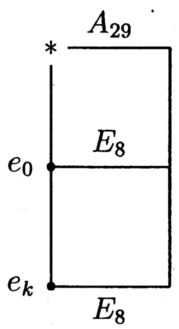


Figure 18: The label of vertices of the Dynkin diagram E_8.



$$\begin{array}{ccc} \cdots & \longrightarrow & N \\ & & \cap \\ \cdots & \longrightarrow & {}^{\exists}P \\ & & \cap \\ \cdots & \longrightarrow & M \end{array}$$

$N \subset P \cong \mathrm{GHJ}(E_8, *_K = e_0)$
index $\fallingdotseq 19.48$

$P \neq M$

	The principal graph	$\not\cong$	The dual principal graph
The number of even vertices	15	$\neq$	16
The fusion rule of even vertices	A_{29}^{even} commutative	$\neq$	${}_{E_8}Z_{E_8}^{\mathrm{even}}$ commutative

Figure 19:

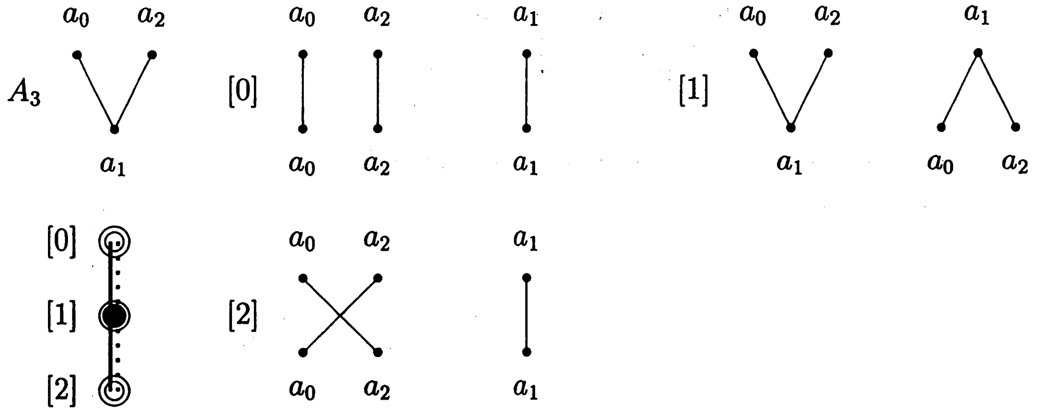


Figure 20: Vertical graphs for connections on the Coxeter graph A_3

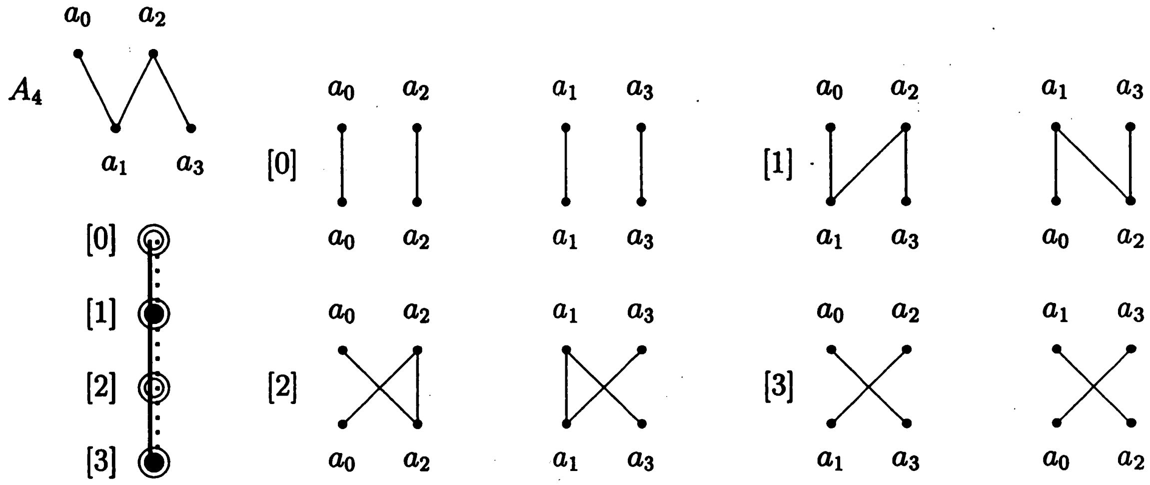


Figure 21: Vertical graphs for connections on the Coxeter graph A_4

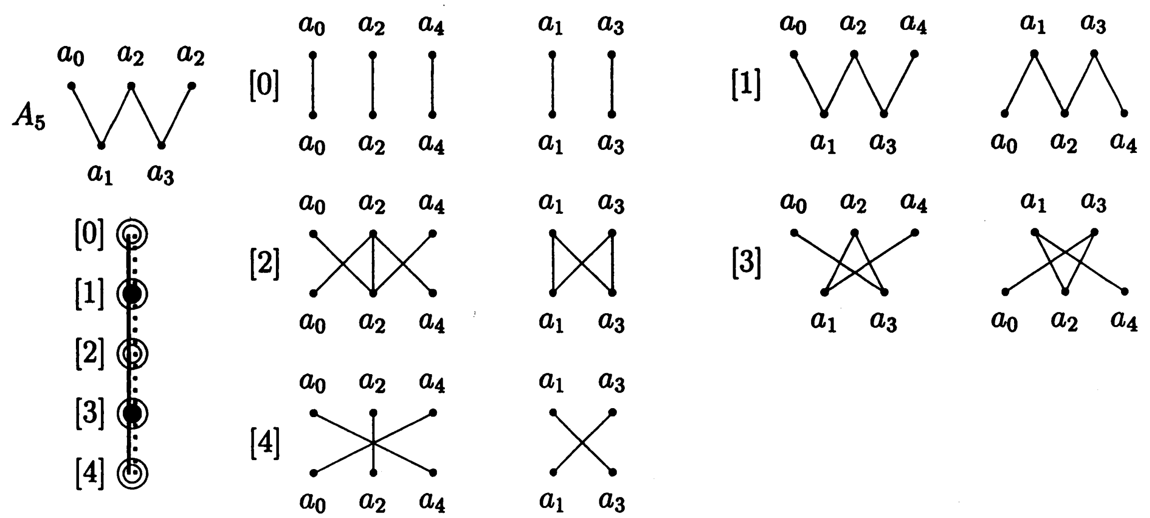


Figure 22: Vertical graphs for connections on the Coxeter graph A_5

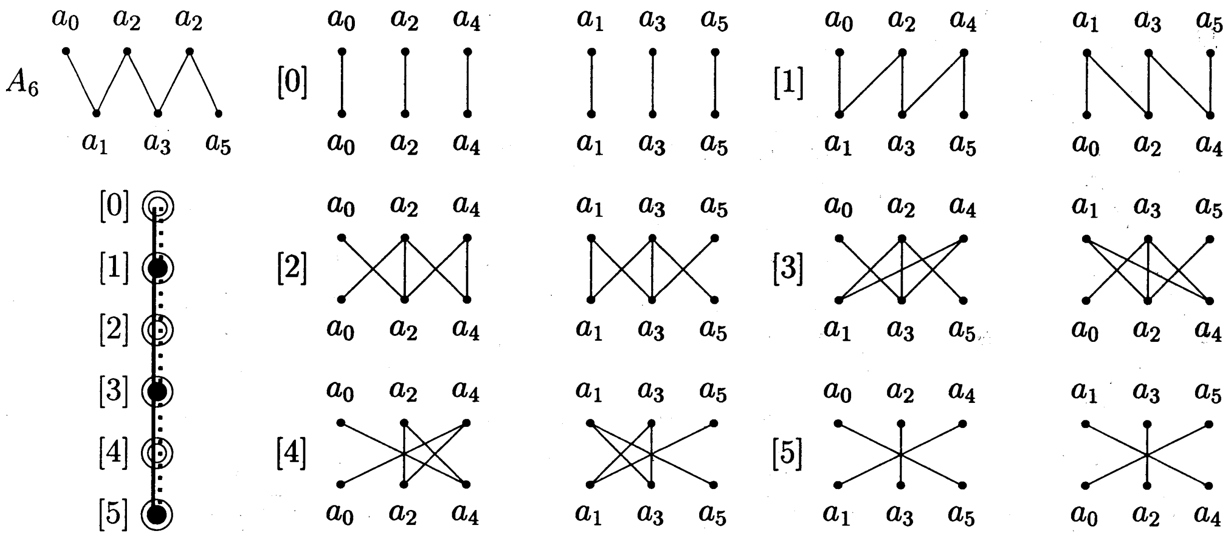


Figure 23: Vertical graphs for connections on the Coxeter graph A_6

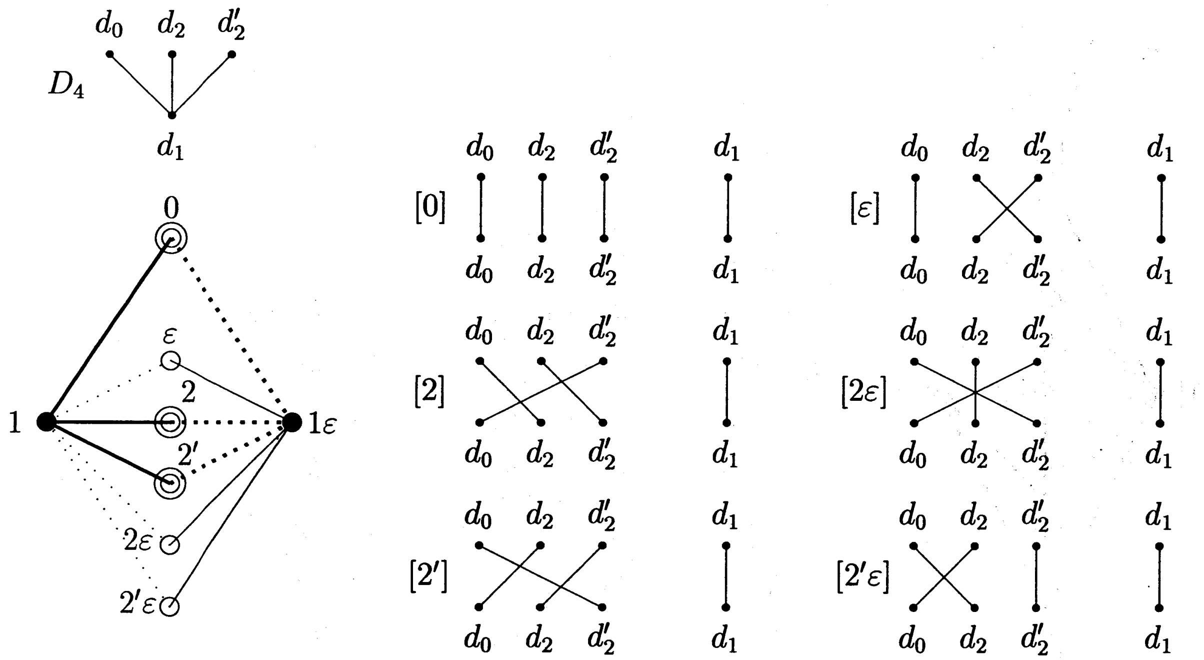


Figure 24: Vertical graphs for connections on the Coxeter graph D_4

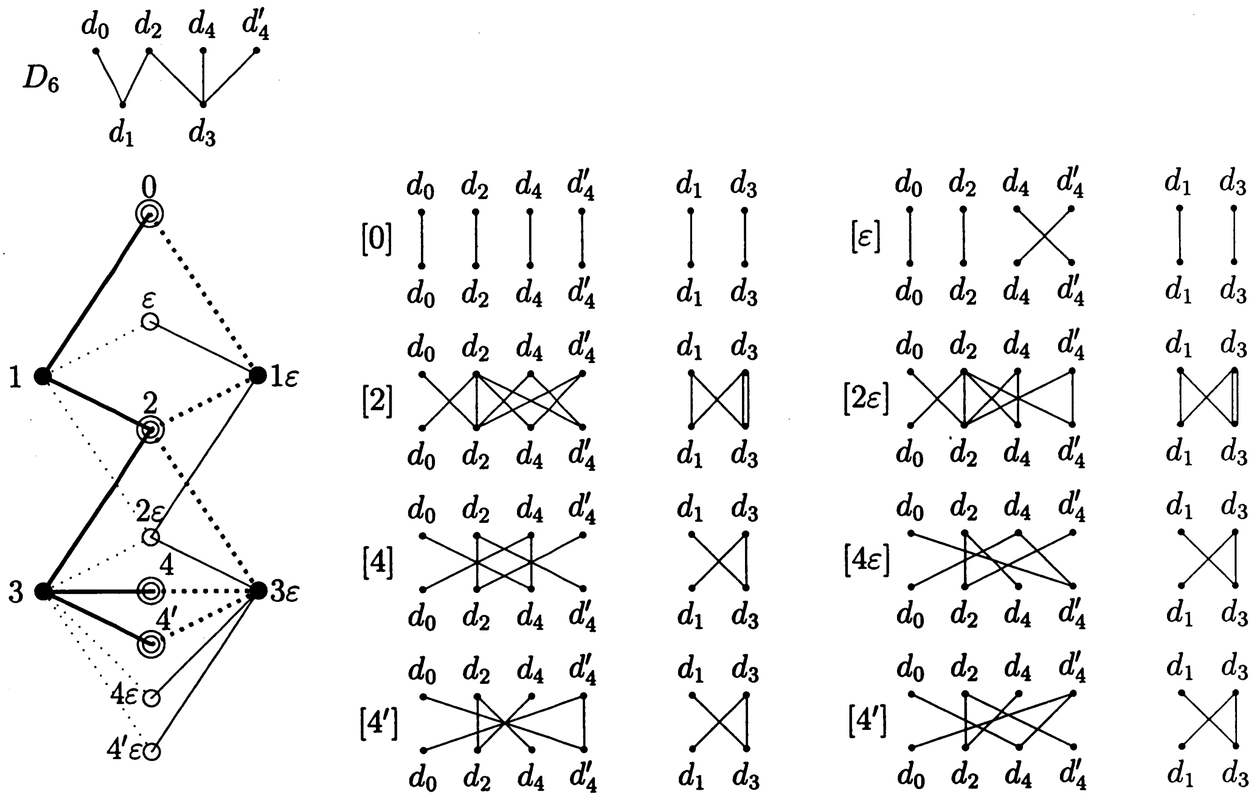


Figure 25: Vertical graphs for connections on the Coxeter graph D_6

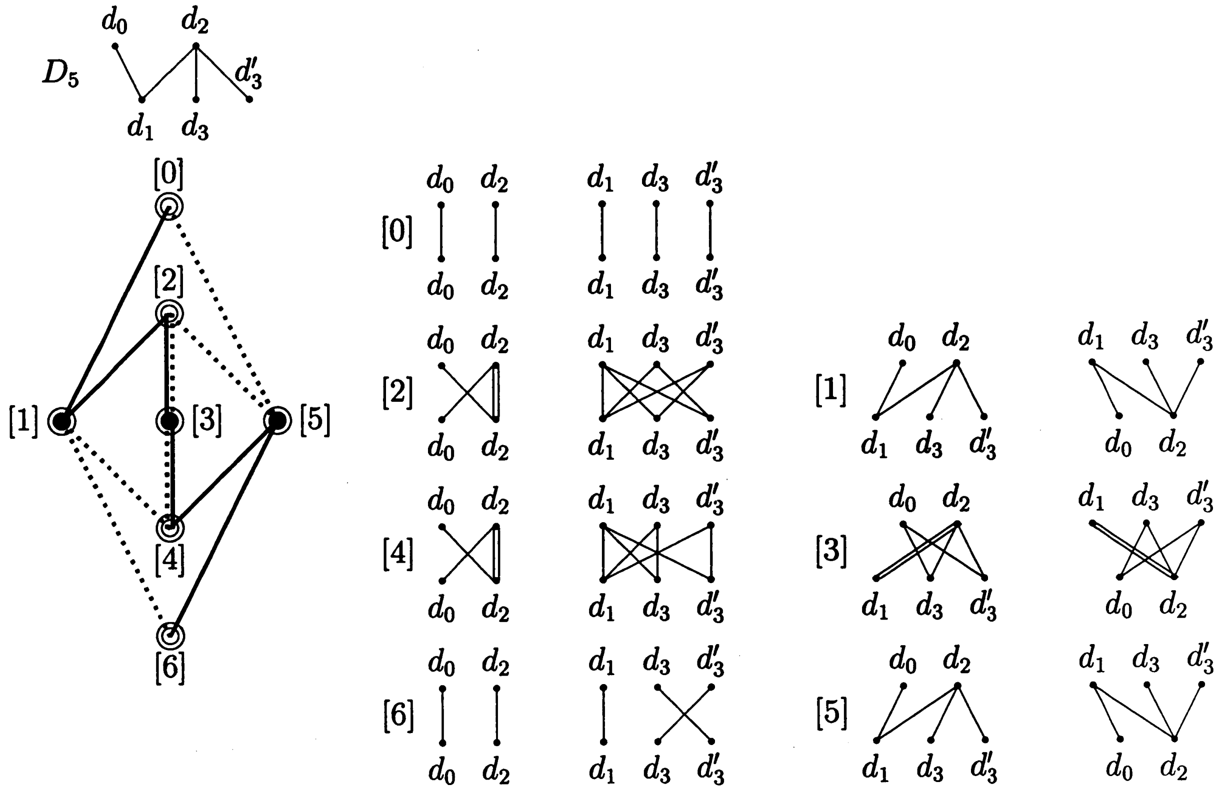


Figure 26: Vertical graphs for connections on the Coxeter graph D_5

$$[w_0]\quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \qquad [w_1]\quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_2]\quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\end{array} \qquad [w_3]\quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_4]\quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \qquad [w_5]\quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{1\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\end{array} \qquad [w_{\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{3\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\end{array} \qquad [w_{2\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&1\\1&3&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{5\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1\\1&3&1\\1&1&0\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}\end{array} \qquad [w_{4\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{cc} & e_0\ e_2\ e_4 \\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

Figure 27: The incidence matrices of the vertical edges of E_6-E_6 connections

$$[w_0]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_1]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&1&0\\ 0&1&0\\ 0&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_2]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&1&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&2&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_3]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&2&1\\ 1&1&1\\ 1&2&0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&2&1&2\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_4]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&0&1&1\\ 0&2&1&2\\ 1&1&1&1\\ 1&2&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&2&1\\ 2&3&1\\ 1&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_5]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1\\ 1&3&1\\ 1&2&0\\ 2&2&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1&2\\ 1&3&2&2\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_6]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&2&2&2\\ 0&2&1&1\\ 1&2&1&2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&2&1\\ 2&4&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_7]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 2&3&1\\ 1&2&1\\ 1&3&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&2&1&1\\ 1&3&2&3\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_8]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&1&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&2&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{8'}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&2&0&1\\ 1&0&1&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&2&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{(0)}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&1&0\\ 0&1&0\\ 0&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{(1)}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 1&2&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 2&1&0\\ 1&3&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{(2)}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 2&3&1\\ 1&2&1\\ 1&3&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&2&1&1\\ 1&3&2&3\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{(3)}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&3&2&3\\ 1&2&1&2\\ 1&3&2&2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&3&1\\ 3&5&2\\ 1&2&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{(4)}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&2&1\\ 1&1&1\\ 1&2&0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&2&1&2\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{(5)}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&0\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1\\ 1&2&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{(6)}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_0\\ e_2\\ e_4\\ e_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1\\ 1&3&1\\ 1&2&0\\ 2&2&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1\\ e_3\\ e_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1&2\\ 1&3&2&2\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figure 28: The incidence matrices of the vertical edges of E_7-E_7 connections

$$[w_0]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_2]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_4]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&2&1\\1&2&3&1\\0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\1&2&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_6]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{1\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&3&1\\0&0&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2&1&0&0\\1&2&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{3\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&2&3&1\\1&3&5&2\\0&1&2&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&2&1&1\\2&3&2&3\\1&2&1&2\\1&3&2&2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{5\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&2&1\\1&2&3&1\\0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\1&2&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{7\tilde{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&0&1&1\\0&1&3&1\\1&3&4&1\\1&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&2\\1&3&2&2\\1&2&1&1\\2&2&1&2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{\tilde{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{2\tilde{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\1&3&3&1\\1&3&6&2\\0&1&2&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2&2&1&1\\2&4&2&3\\1&2&2&2\\1&3&2&3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{4\tilde{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&2&1\\1&3&6&2\\2&6&9&3\\1&2&3&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&3&2&3\\3&6&4&5\\2&4&2&3\\3&5&3&4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{6\tilde{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&2&1\\1&2&3&1\\0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\1&2&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{1\tilde{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&1&2&1\\1&2&3&1\\0&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\1&2&1&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{3\tilde{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&2&4&1\\1&4&6&2\\1&1&2&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&2&1&2\\2&4&3&3\\1&3&1&2\\2&3&2&3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{5\tilde{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\0&2&2&1\\1&2&4&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\1&3&1&2\\1&1&2&1\\1&2&1&2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[w_{7\tilde{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_0 & e_2 & e_4 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_0 \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\1&2&3&1\\1&3&5&2\\0&1&2&0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1&2&1&1\\2&3&2&3\\1&2&1&2\\1&3&2&2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figure 29: The incidence matrices of the vertical edges of E_8-E_8 even connections

$$[w_1]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_3]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&2&1\\0&1&1&1\\0&1&2&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_5]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_7]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&1&1\\1&2&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&2&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{\bar{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{2\bar{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&2&1&1\\1&3&2&3\\0&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&2&3&1\\0&1&2&1\\0&1&3&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{4\bar{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&3&2&3\\3&5&3&4\\1&2&1&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&3&1\\1&3&5&2\\1&2&3&1\\1&3&4&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{6\bar{1}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&1&1\\1&2&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&2&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{1\bar{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&2&1&1\\1&3&2&3\\0&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&2&3&1\\0&1&2&1\\0&1&3&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{3\bar{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&4&2&3\\3&6&4&5\\1&2&1&2\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&4&6&2\\1&2&4&1\\1&3&5&2\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{5\bar{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&2&2&2\\2&4&2&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&2&4&1\\0&2&2&1\\1&2&3&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{7\bar{2}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&3&2&3\\3&5&3&4\\1&2&1&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&3&1\\1&3&5&2\\1&2&3&1\\1&3&4&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{\bar{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{2\bar{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&2&2&2\\2&4&2&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&2&4&1\\0&2&2&1\\1&2&3&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{4\bar{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&4&2&3\\3&6&4&5\\1&2&1&2\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&4&6&2\\1&2&4&1\\1&3&5&2\end{pmatrix}\end{array}$$

$$[w_{6\bar{5}}]\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_1&e_3&e_5&e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_0\\e_2\\e_4\\e_6\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\1&2&1&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{cc} & \begin{matrix}e_0&e_2&e_4&e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix}e_1\\e_3\\e_5\\e_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&2&1\\0&1&1&1\\0&1&2&0\end{pmatrix}\end{array}$$

Figure 30: The incidence matrices of the vertical edges of E_8-E_8 odd connections

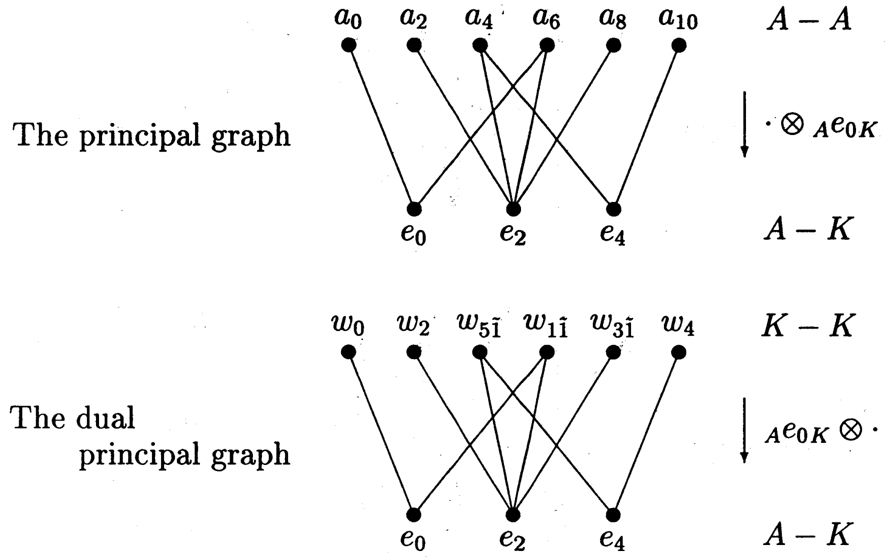


Figure 31: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to $(E_6, * = e_0)$.

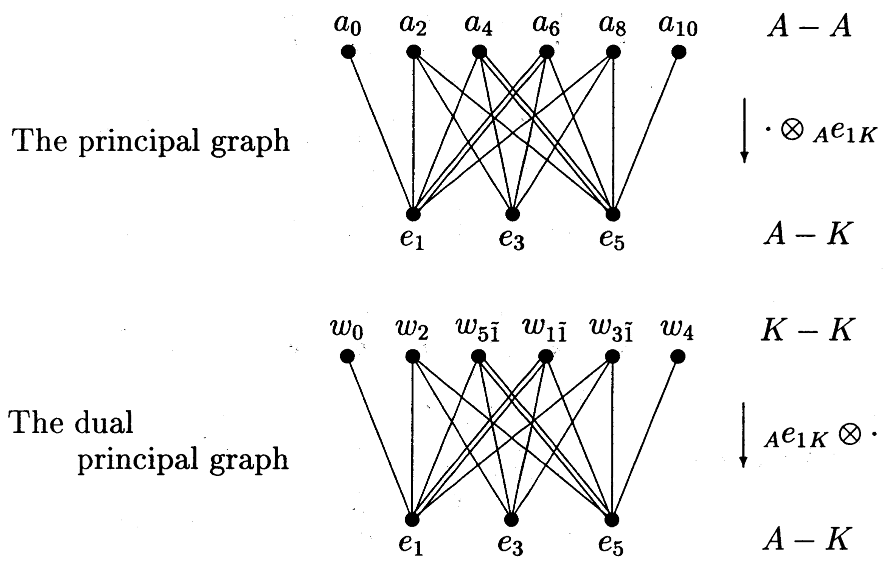


Figure 32: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_6, e_1).

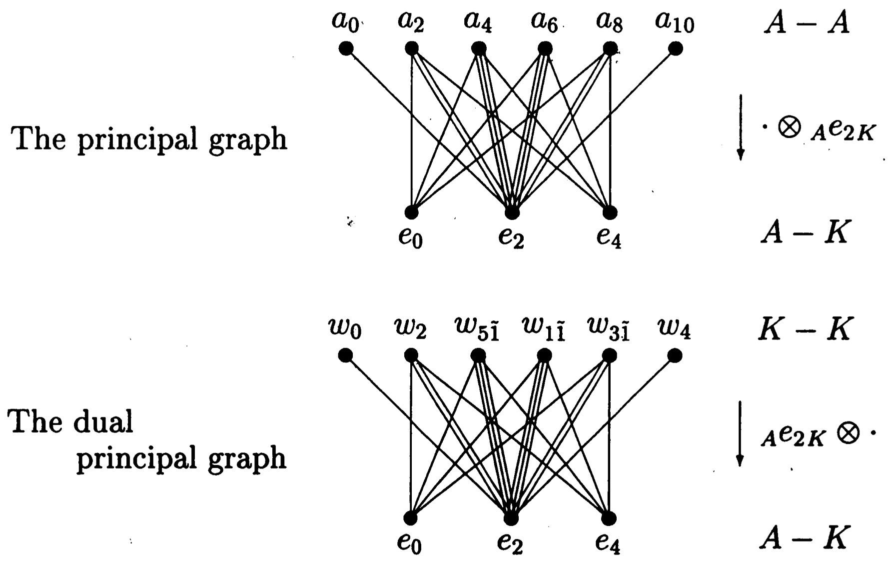


Figure 33: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_6, e_2).

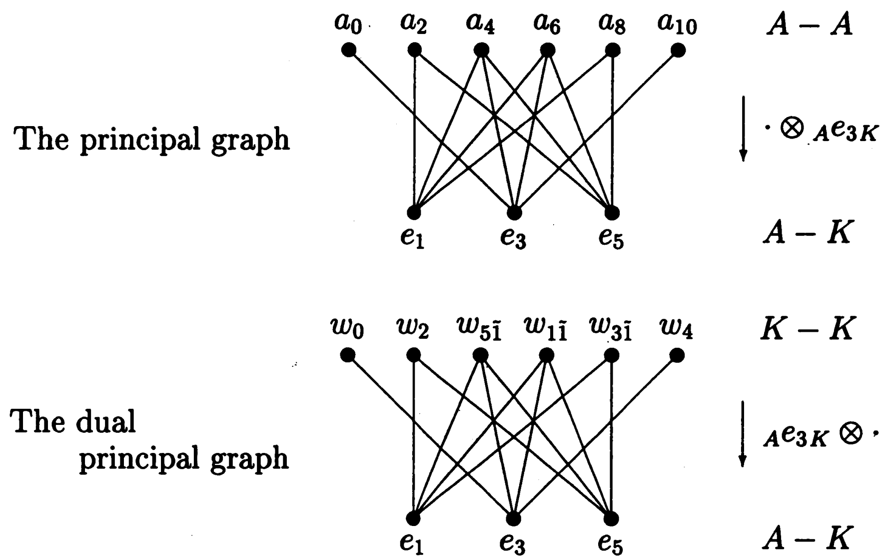


Figure 34: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_6, e_3).

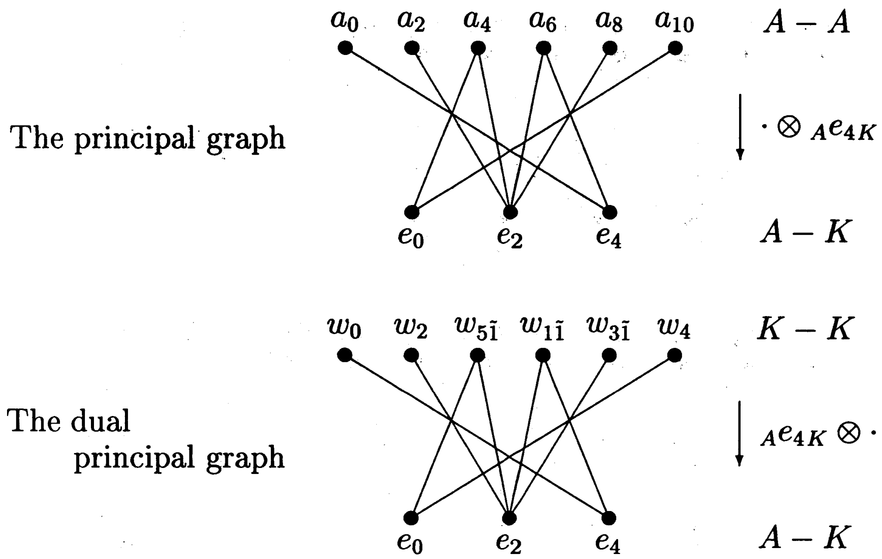


Figure 35: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_6, e_4).

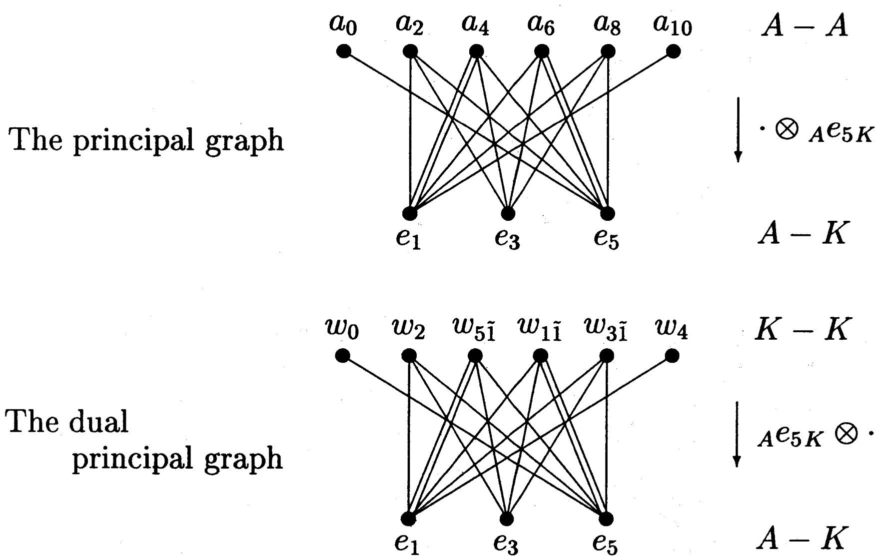


Figure 36: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_6, e_5).

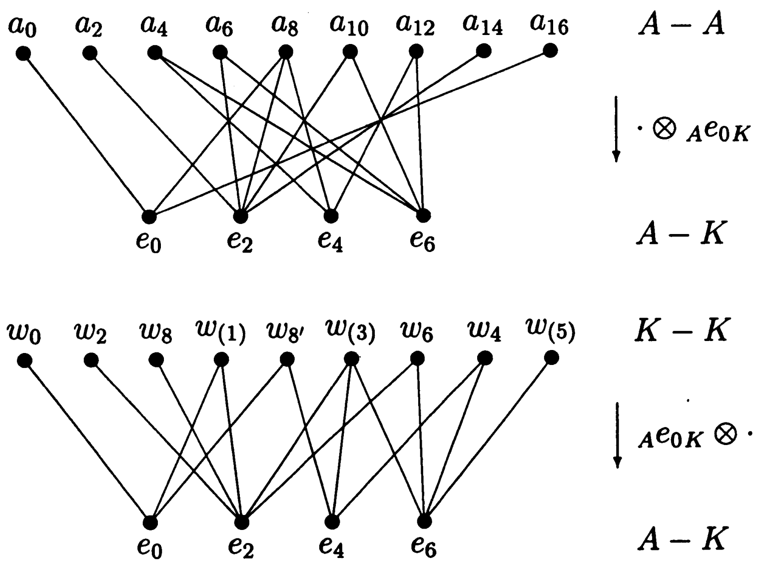


Figure 37: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to $(E_7, * = e_0)$.

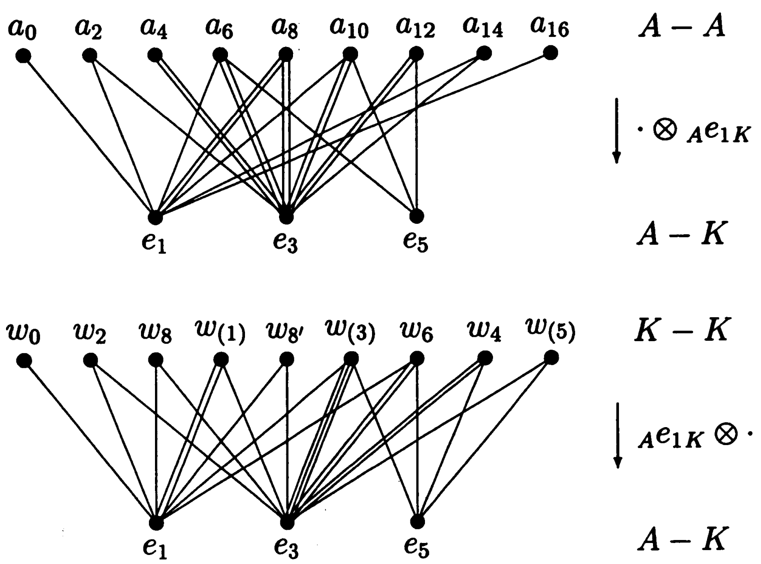


Figure 38: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_7, e_1).

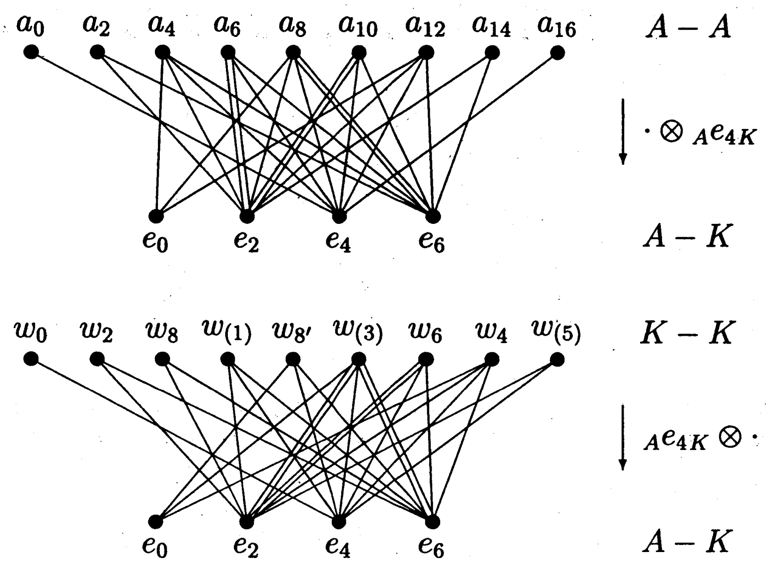


Figure 39: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_7, e_4).

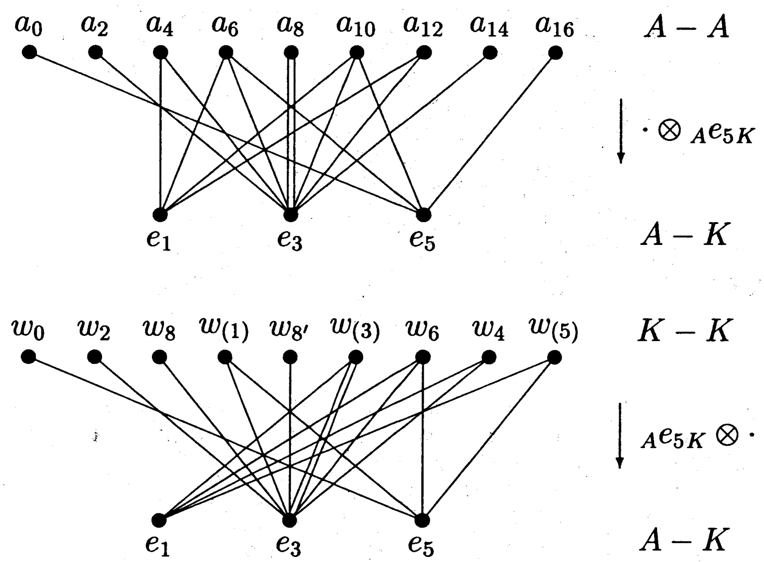


Figure 40: The (dual) principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_7, e_5).

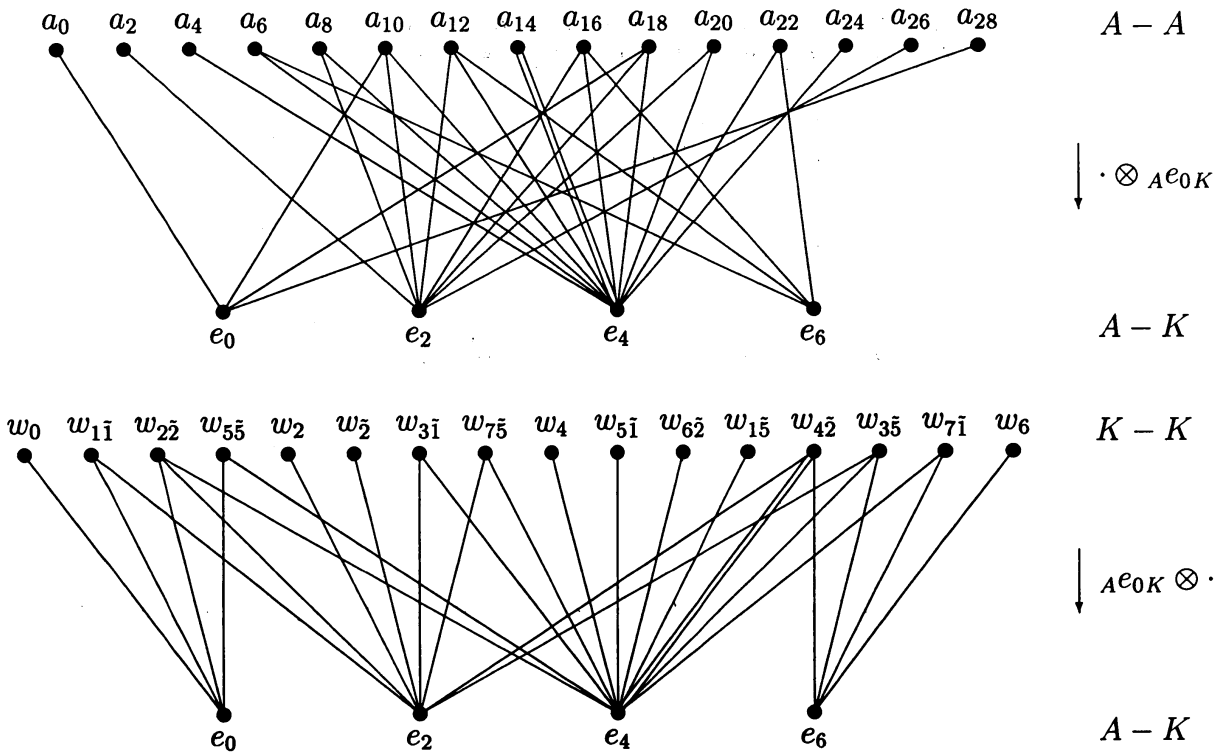


Figure 41: The dual principal graph of the GHJ subfactor corresponding to $(E_8, * = e_0)$.

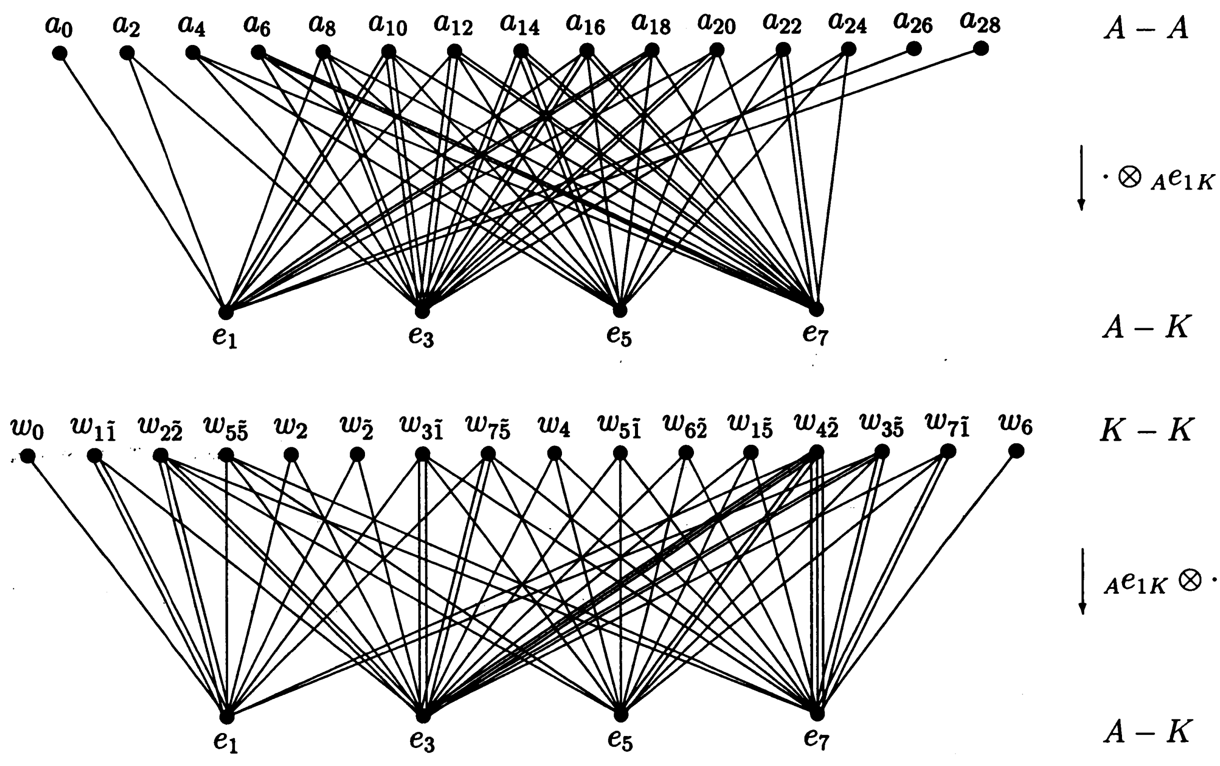


Figure 42: The dual principal graph of the GHJ subfactor corresponding to (E_8, e_1).

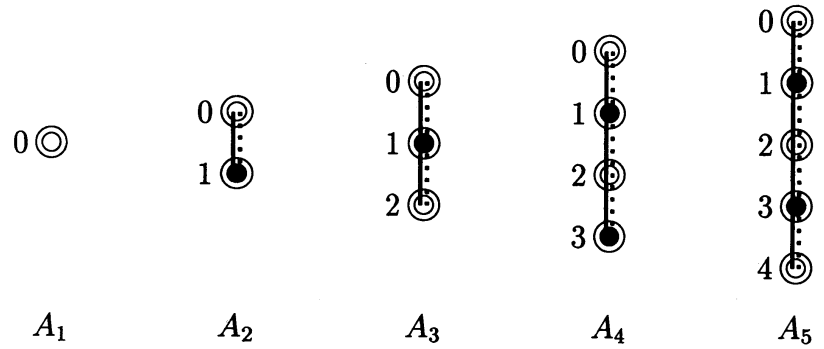


Figure 43: Chiral symmetry for the Coxeter graph A_n

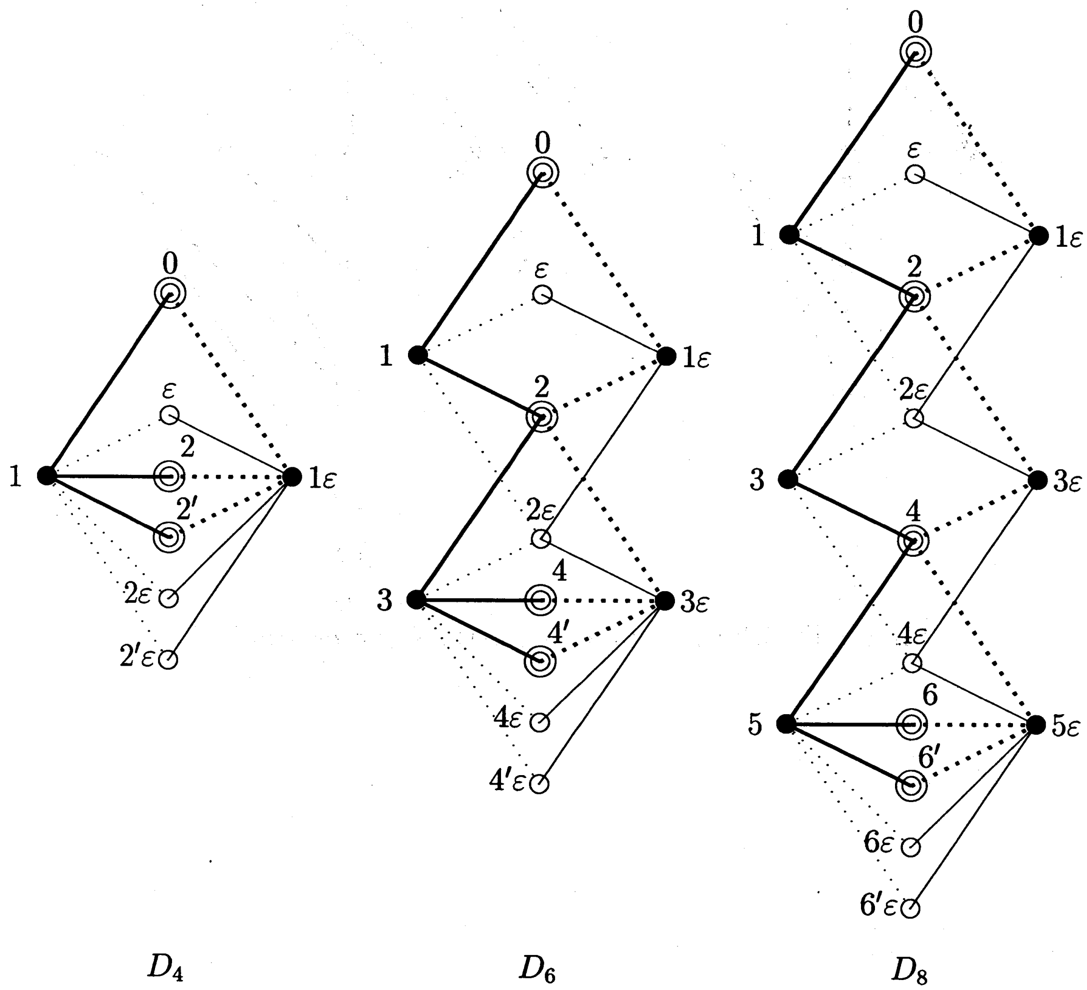
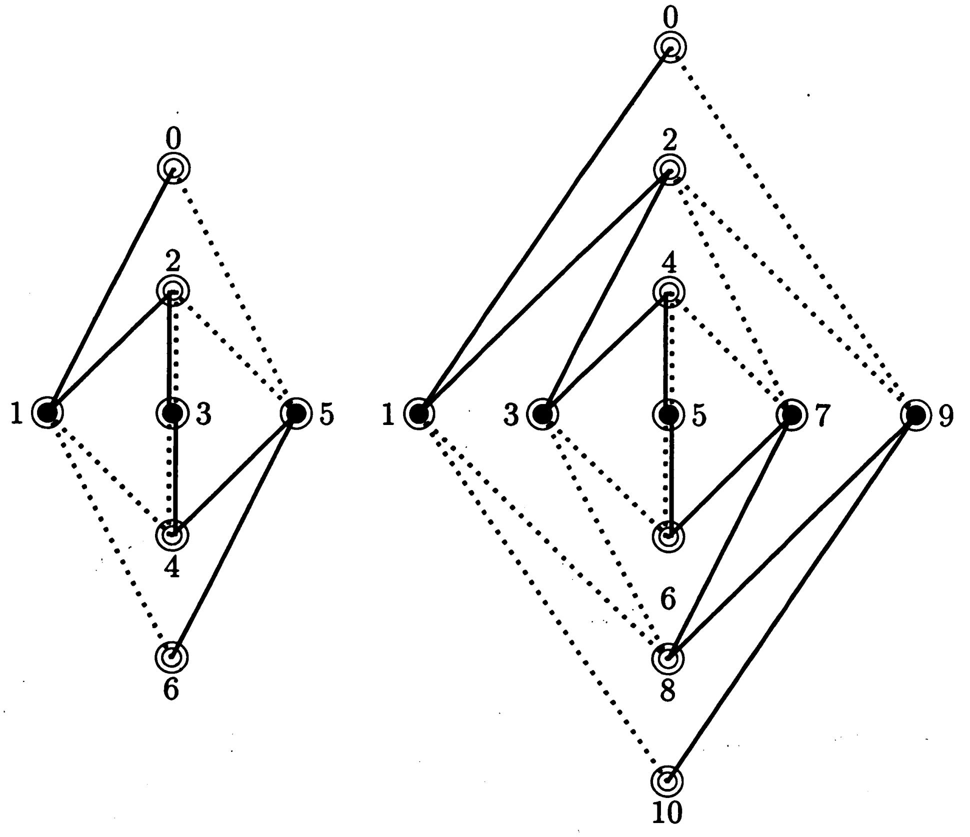


Figure 44: Chiral symmetry for the Coxeter graph D_{even}



D_5 D_7

Figure 45: Chiral symmetry for the Coxeter graph D_{odd}

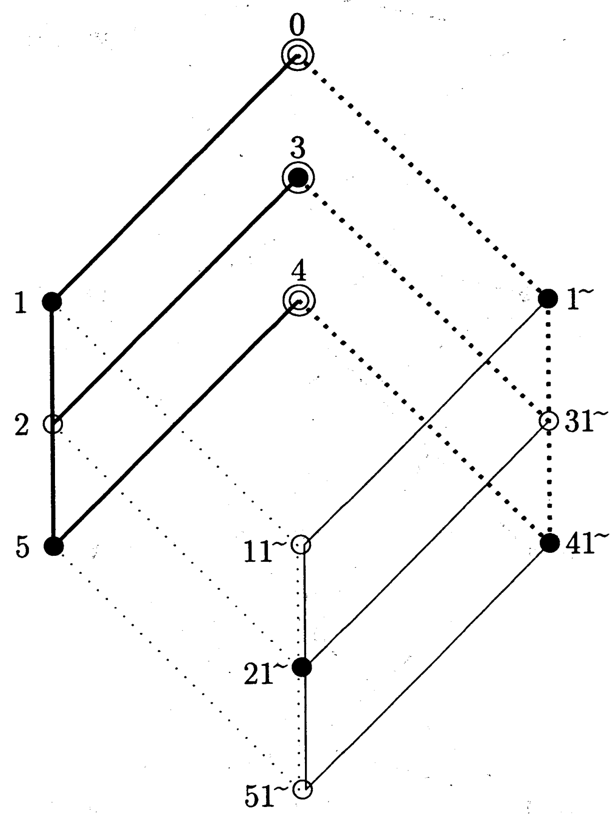


Figure 46: Chiral symmetry for the Coxeter graph E_6

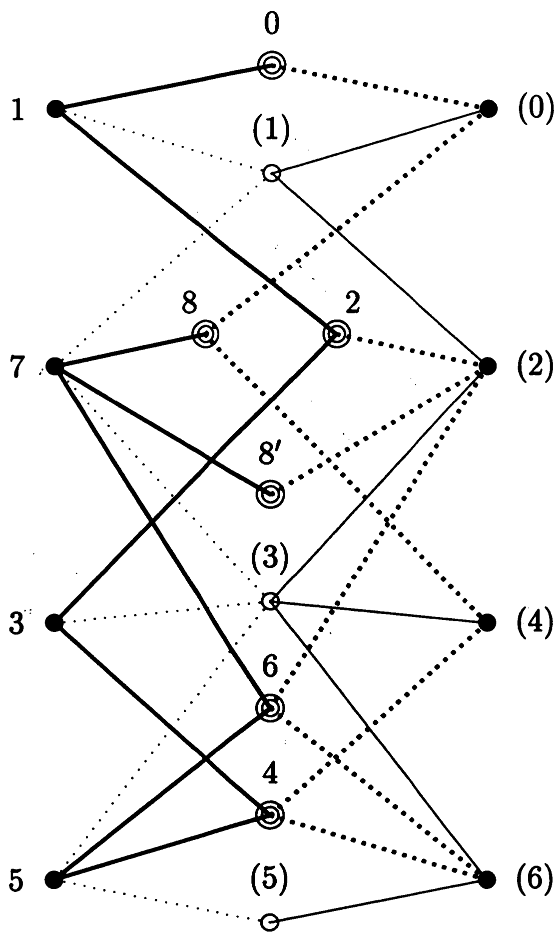


Figure 47: Chiral symmetry for the Coxeter graph E_7

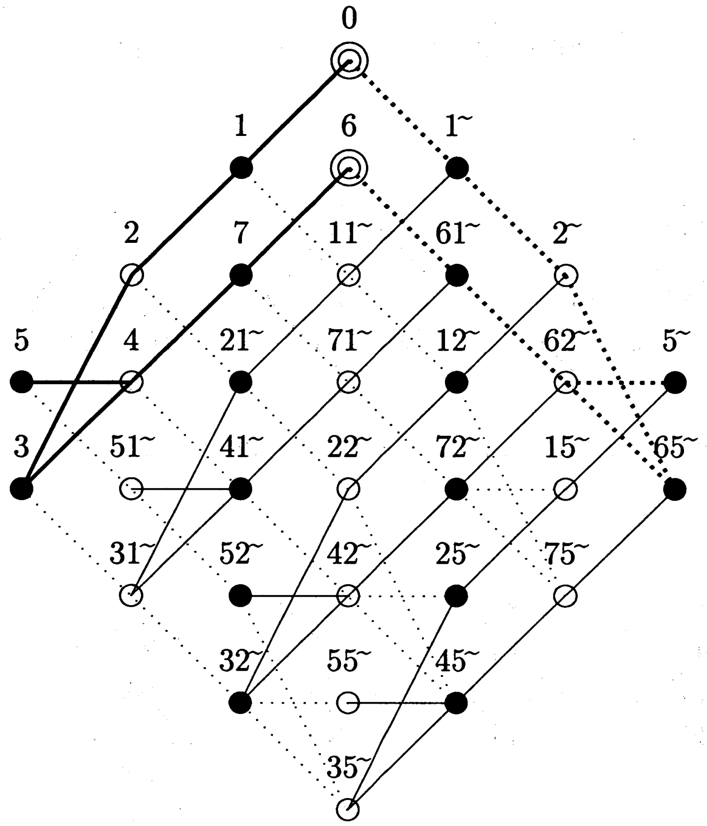


Figure 48: Chiral symmetry for the Coxeter graph E_8

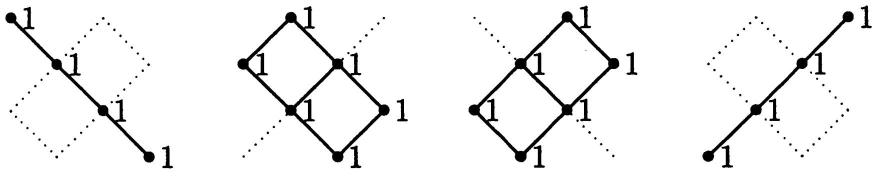


Figure 49: Essential paths on the Coxeter graph A_4

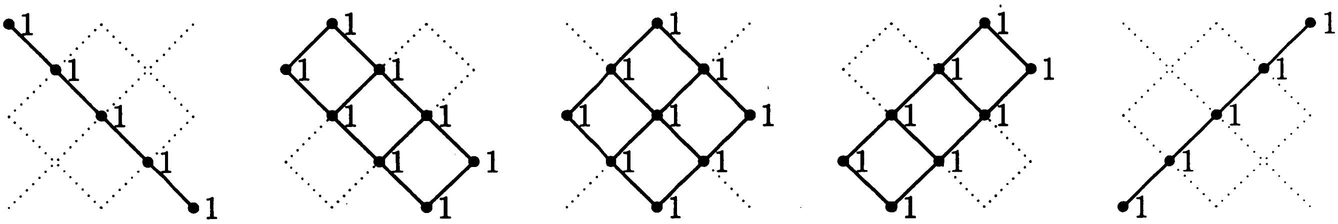


Figure 50: Essential paths on the Coxeter graph A_5

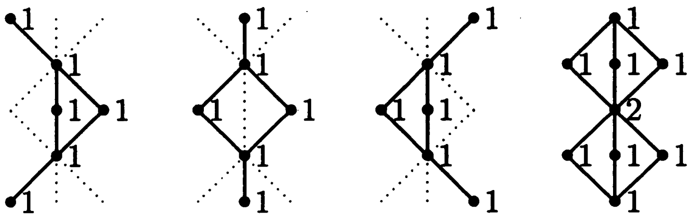


Figure 51: Essential paths on the Coxeter graph D_4

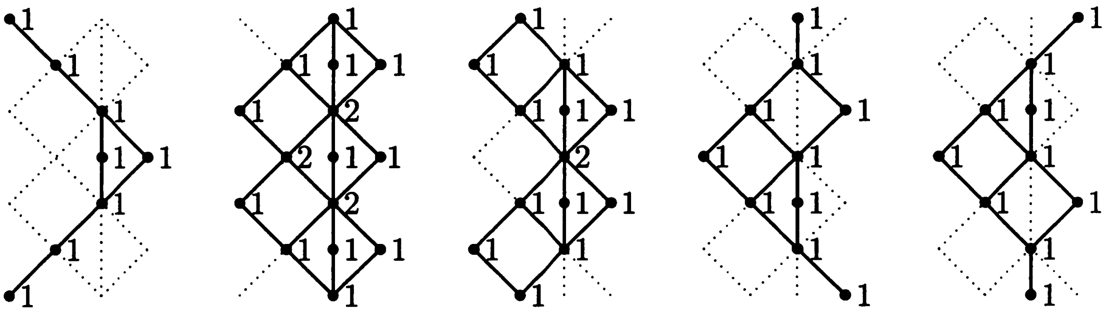


Figure 52: Essential paths on the Coxeter graph D_5

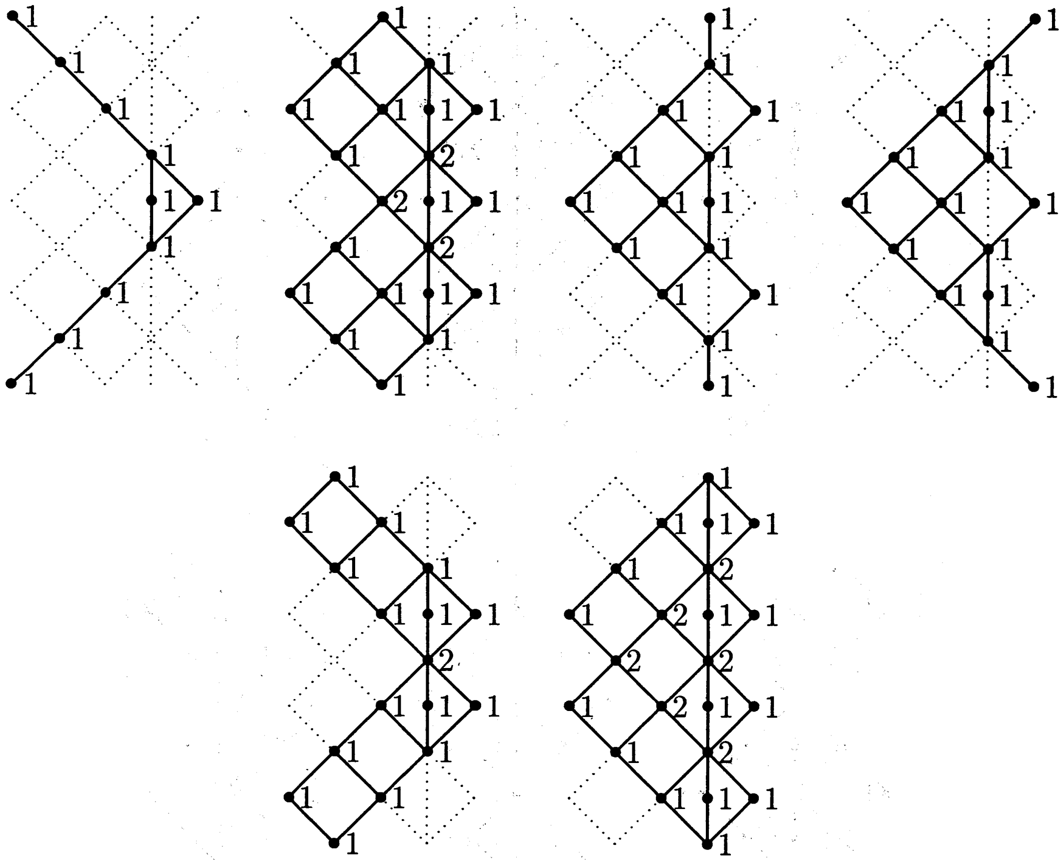


Figure 53: Essential paths on the Coxeter graph D_6

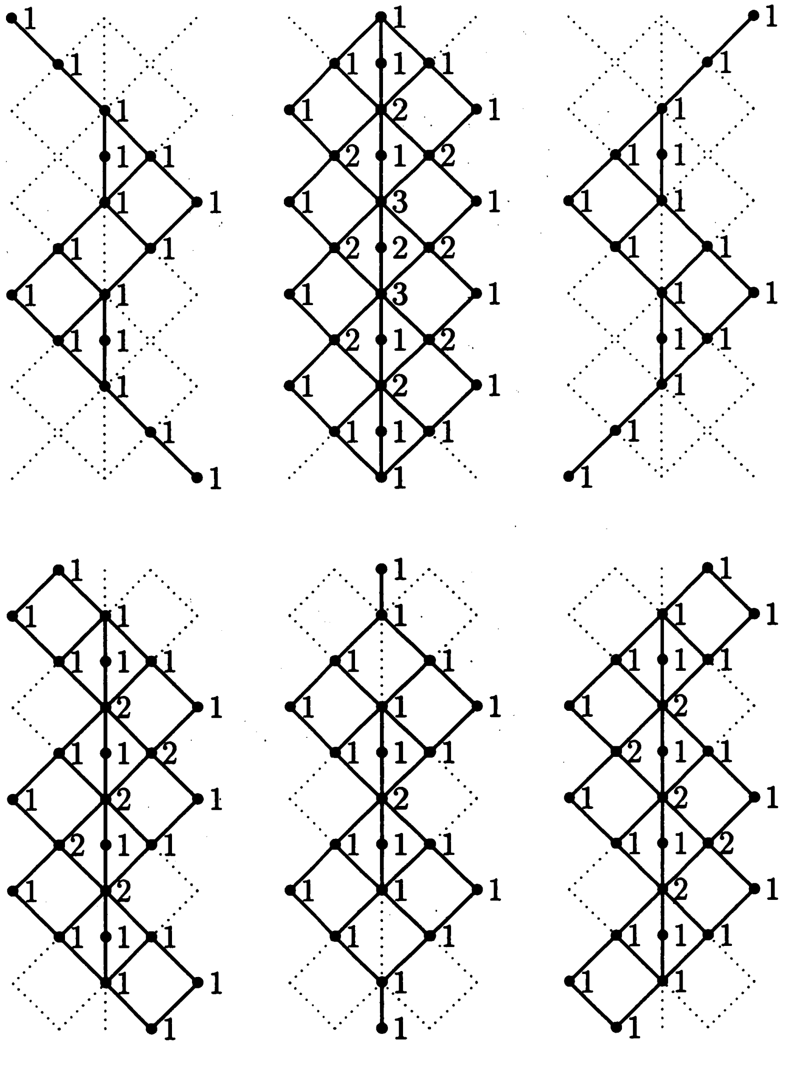


Figure 54: Essential paths on the Coxeter graph E_6

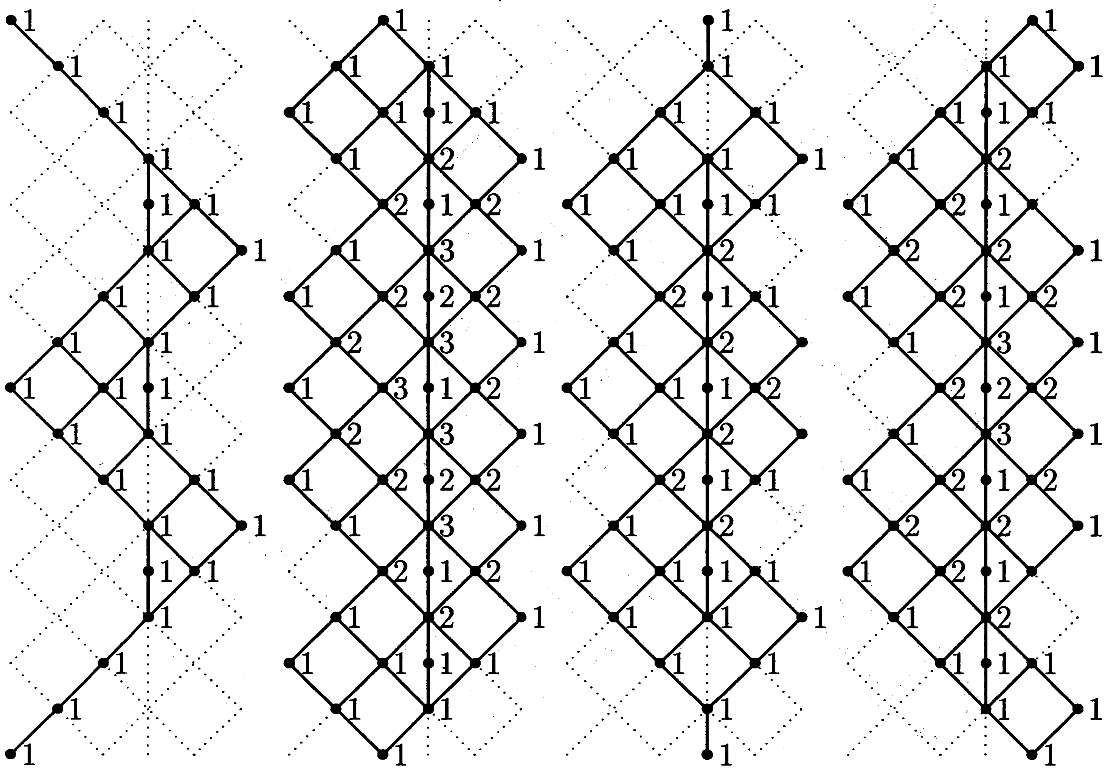


Figure 55: Essential paths on the Coxeter graph E_7 (1)

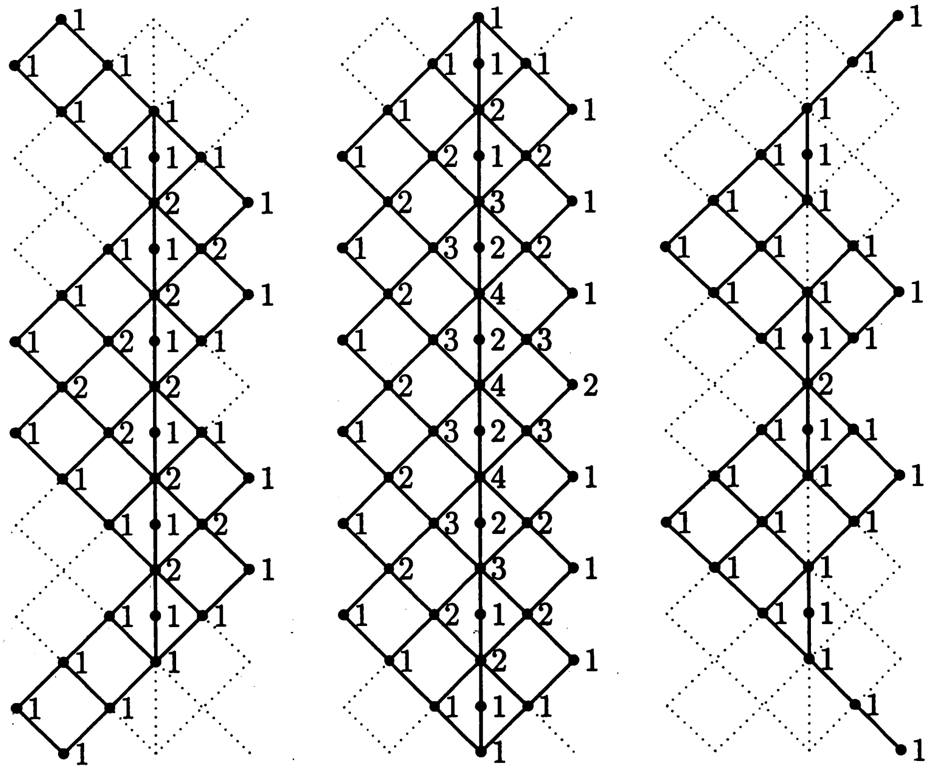


Figure 56: Essential paths on the Coxeter graph E_7 (2)

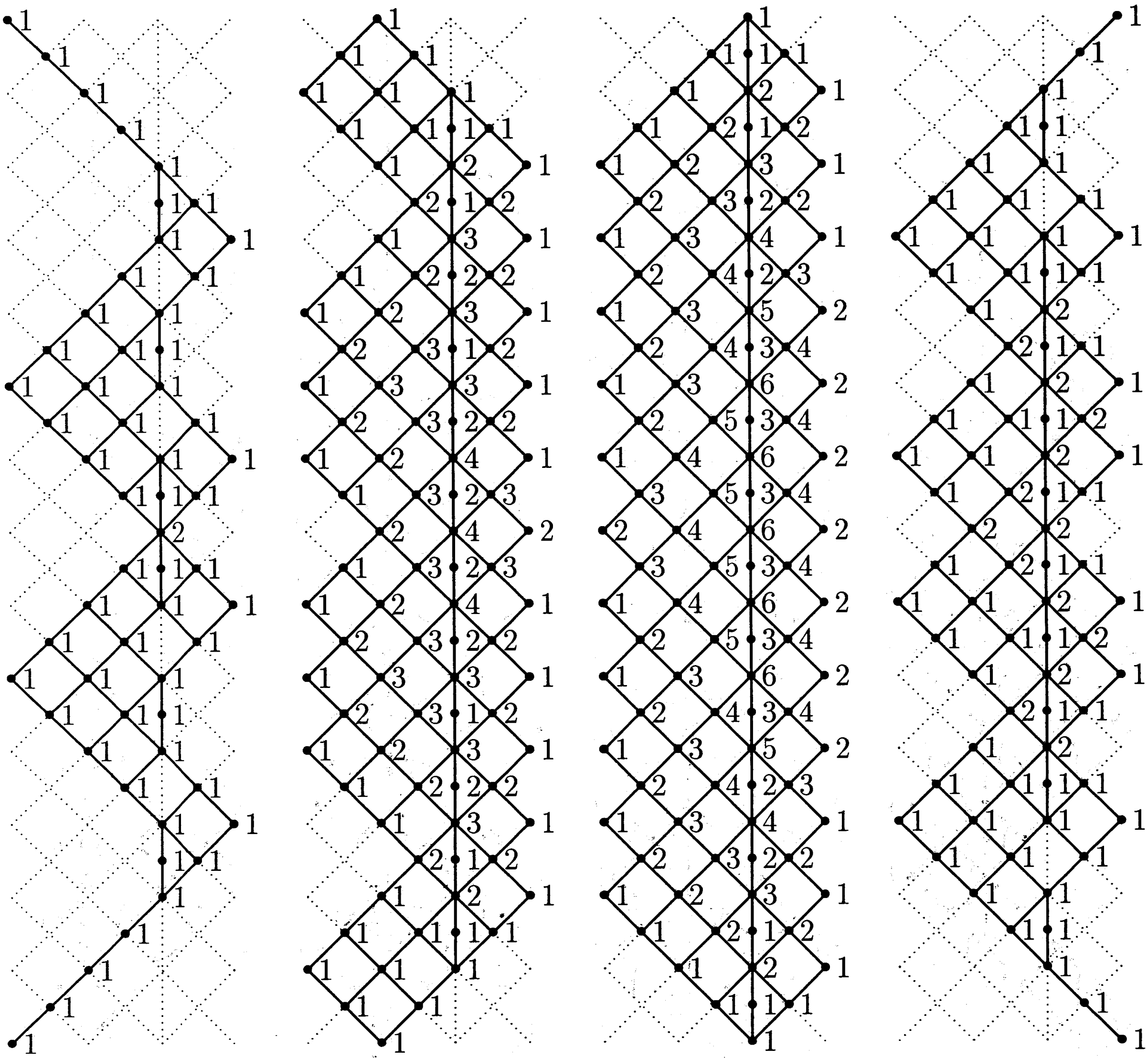


Figure 57: Essential paths on the Coxeter graph E_8 (1)

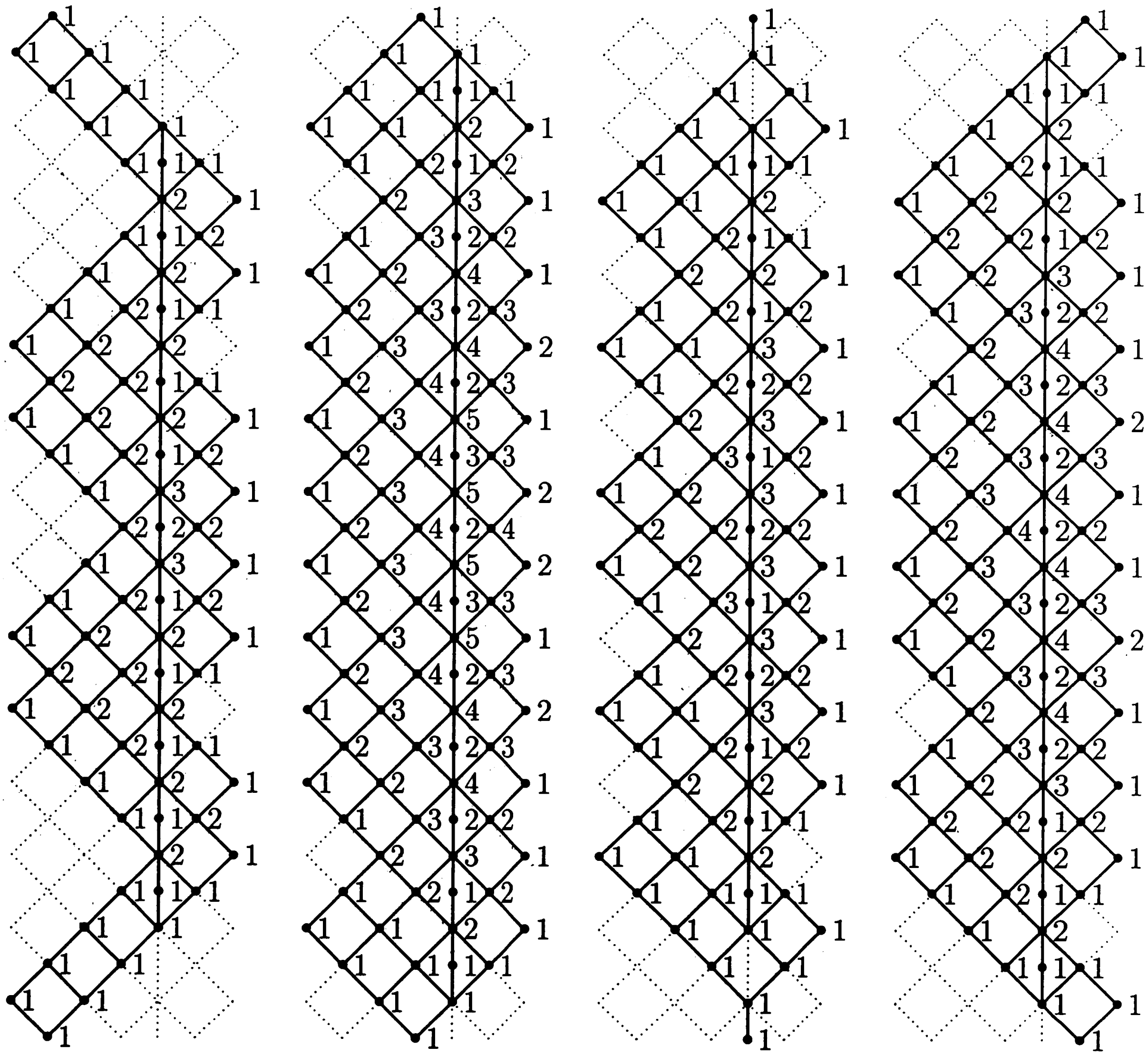


Figure 58: Essential paths on the Coxeter graph E_8 (2)