

ホップ分岐により生まれてヘテロクリニックな分岐 により消滅する極限閉軌道について

名大・多元数理・院研究生 宇野 民幸 (Tamiyuki Uno)

Graduate School of Mathematics,
Nagoya Univ.

1. 序

力学系の平衡点の周りにおける局所的な分岐の一つとして、ホップ分岐が知られている。この分岐において孤立した極限閉軌道が存在するためには、その分岐点において、平衡点の局所的な、緩慢ではあっても漸近的な安定性（または不安定性）が保証されてなければならない。また、いくつかの平衡点がヘテロクリニック軌道で結ばれ、それらの平衡点とヘテロクリニック軌道との和集合が鎖回帰集合に含まれている力学系が考えられる（この和集合をここではヘテロクリニックサイクルと呼ぶ）。そしてこの集合が極限集合となっている場合には、同様に系の摂動により極限閉軌道が生まれる（消滅する）分岐を考えることができる。この現象をここではヘテロクリニックな分岐と呼ぶことにする。この分岐においても同様に、閉軌道を孤立して出現させるには、その分岐点においてヘテロクリニックサイクルの漸近的な安定性（不安定性）が保たれていなければならない。ここではホップ分岐によって出現した極限閉軌道が、周期を伸ばしていき、ヘテロクリニックな分岐によって消滅する（またはその逆の過程を辿る）分岐構造をもつ具体的なモデルを紹介する。すなわちここでは、極限閉軌道の周期がパラメータの変化に従って、いわば 0 から ∞ に連続的に移行している。ここでは 3 次元力学系のモデルを考えているが、考えている状態空間の内部にある平衡点の周りでホップ分岐が退化する、すなわち分岐点で平衡点が中立安定となる場合に、同時にヘテロクリニックサイクルの周りにおいても同様に分岐が退化して、両者の分岐が縮退している状況がある。すなわちここでは、無限個の閉軌道が連続濃度で存在しており、周期はいわば 0 から ∞ のものまでが同時にある。実はこのモデルにおいては、2 次元系の場合には、このように分岐が必然的に退化するという事実がある。そして 3 次元系において同様な分岐の退化があることが、今までに第一積分が具体的に存在することから知られている。今回、この状況が上述のような分岐の縮退として存在していること、ゆえに、3 次元系においてはむしろ前述のような閉軌道が孤立する分岐が（この方程式系のなかで）通有的であるといえることを紹介する。

2. モデルとなる方程式系の紹介

$$(LV) \quad \frac{dx_i}{dt} = \gamma_i x_i \left(1 + \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j\right), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

3次元のベクトル場を定めるこの常微分方程式系は、3変数の Lotka-Volterra 系とよばれる。生物種の個体群動態を記述するモデルとして導入されたもので、領域 $\mathbf{R}_+^3 := \{x \in \mathbf{R}^3 | x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3)\}$ における解のふるまいに注目する。この集合は不変集合となっているので、これを状態空間として考える。パラメータ γ_i と a_{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) を変化させることにより起こる大域的ふるまいの分岐を考察する。ただし今 $\gamma_i > 0$ とし、 a_{ij} の添字 i, j は3を法として考える。

演題に示したふるまいのモデルをつくるための条件を述べると、まず $a_{ii} < 0$ という条件をつけると、 x_i 軸上の正の部分に平衡点が存在する。さらに $a_{i,i-1} < a_{ii} < a_{i,i+1}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) という条件をつけることにより、それらの平衡点を結ぶヘテロクリニック軌道が境界上に存在して、これらの和集合としてヘテロクリニックサイクルが境界上に構成されている。また $A := (a_{ij})$ に対して、 $\det A < 0$ とすると、 $(\mathbf{R}_+^3)^\circ$ には内部平衡点（内部にある平衡点）が唯一存在する。ここで、 $(\mathbf{R}_+^3)^\circ$ は \mathbf{R}_+^3 の内部を示している。ホップ分岐はこの内部平衡点の周りで起こる。

3. 2次元系と3次元系で知られている事実

2変数の Lotka-Volterra 系において、ホップ分岐が退化する事実が知られている。これは閉軌道が仮にひとつ存在したとすると、内部平衡点が存在していることになり、方程式系の形から、Dulac 関数と呼ばれる時間変化を与える関数がうまくとれて、それにより変化させたベクトル場の発散が0となることから Bendixson-Dulac の定理を用いて、第一積分の存在を示すことができる。ゆえに仮定した閉軌道を覆うように無限個の閉軌道が存在していることになり、すなわち2次元系においては、孤立した極限閉軌道は存在することがない。

3次元系 (LV) においては、 A が巡回行列 ($a_{ij} = a_{i+1,j+1}$) であり、かつ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ という条件（以下では条件 γ とよぶ）を持つモデルとして知られる May-Leonard 系においても、また同様にホップ分岐は退化をしている。この分岐点においては、平面 $\{x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ | \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}$ が不変集合となり、その上で次の第一積分が存在していることが分かる。この不変集合の外に存在している解は、後に示すように不変集合上の解のふるまいに従っている（系が射影される）

$$\mathcal{H}(x) = \prod_{i=1}^3 x_i / \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i \right\}^3.$$

この場合には3次元空間内の平面 $\{x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ | \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}$ 上にすべての周期の閉軌道が存在している。

また、モデルの方程式の紹介のところで仮定した様に、 A の対称性を弱めた場合（非対称 May-Leonard 系）においても、条件 γ があればこの分岐点でやはりホップ分岐は退化をしており、事実として次の第一積分が存在している ([UO])

$$\mathcal{H}(x) = \int_c \left(\frac{z \times f}{z_1 z_2 z_3} \right) \cdot dz.$$

ここで c とは、平衡点から $x := (x_1, x_2, x_3)$ までの任意の経路を表す。この第一積分が存在する分岐点では、ある曲面上にすべての周期の閉軌道が存在しており、この曲面は内部平衡点の唯一の中心多様体となることから滑らかであることも分かる。

より一般に、条件 γ があれば系の大域的なふるまいを完全に分類できることが示されている [UO]。これができる理由は、条件 γ のある場合には、ベクトル場を球面上に射影したベクトル場を \hat{f} とすると、 \hat{f} は斉次方程式となり、すなわち例えば単位球面上の \hat{f} で状態空間の内部のふるまいを代表させることができることにある。この状況を系が‘射影される’と呼ぶことにする。ゆえに内部平衡点は唯一であることから、閉軌道の非存在が示されれば、Poincaré-Bendixon の定理から、内部平衡点が \hat{f} において局所的に不安定であれば、無限遠点も含めた境界に解は収束していて、境界上ではまた力学系が 2 次元であるので、結局 3 次元状態空間の内部からの解の ω -極限集合が決定できる。特に系を有界にして、ヘテロクリニックサイクルとなるようにできる。あるいは、内部平衡点を ω -極限集合（この場合は大域的アトラクタ）となるようにもできるが、それを分けるのが次の値 Π_A の符号である

$$\Pi_A := \prod_{i=1}^3 (a_{i,i+1} - a_{ii}) - \prod_{i=1}^3 (a_{ii} - a_{i,i-1}).$$

この値が 0 でない場合には閉軌道の非存在がいて、0 である場合に前述した第一積分が存在している。

ここでは、この条件 γ を弱めた場合の解析手法と結果を述べ、さらにその条件を弱めていったある場合に極限閉軌道が存在すること ([U]) を紹介する。そして、パラメータ空間内の分岐構造を調べることから、その極限閉軌道がホップ分岐により発生して、ヘテロクリニックな分岐により消滅する分岐経路のあることを明らかにする。また、（非対称）May-Leonard 系においてこれらの分岐が縮退している構造も理解することができる。

4. 系の摂動と強靱性

考えている系 (LV) は、 \mathbf{R}^3 上で考えると、構造不安定な力学系であるため、今考察している領域 \mathbf{R}_+^3 を不変集合として保つような、そして特に、その境界に存在するヘテロクリニックサイクルを壊すことのない次の摂動 (LV _{ϵ}) を用いて、それにとりま

う系の構造の安定性を定義する.

$$(LV_\epsilon) \quad \frac{dx_i}{dt} = \gamma_i x_i \left(1 + \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + \epsilon_i \phi_i(x) \right), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

ここで $\phi_i(x)$ はアフィン線形, $\epsilon := (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ($\epsilon_i \neq 0$) とする ($i \in \{1, 2, 3\}$).

定義 1.1. 系 (LV) のある性質が ‘強韌的である’ とは, 系 (LV_ϵ) において $|\epsilon_i|$ ($i = 1, 2, 3$) が十分小さいときに保たれている性質であること.

この性質は ‘ロバストである’ と言われているもので, 青本和彦教授による邦訳を定義に用いた.

5. 強韌性の定理と他の結果との関連

系 (LV_ϵ) における内部平衡点の安定多様体を Γ_ϵ と記述する. 系の解のふるまいの大域的な性質について次のことがわかる.

定理 1 [U]. 系 (LV) において γ_1, γ_2 そして γ_3 は十分に近い値である (条件 $\tilde{\gamma}$) とする.

- (1) $\Pi_A > 0$ かつ $\det A < 0$ ならば内部平衡点は $(\mathbf{R}_+^3)^\circ$ における大域アトラクタであり, その大域的な性質は強韌的である.
- (2) $\Pi_A < 0$ ならばヘテロクリニックサイクルは $(\mathbf{R}_+^3)^\circ \setminus \Gamma_\epsilon$ における大域アトラクタであり, その大域的な性質は強韌的である.

ここで Γ_ϵ は内部平衡点の 1 次元安定多様体である. 定理 1 の状況のもとで, 条件 $\tilde{\gamma}$ のない場合において, J. Hofbauer と K. Sigmund [HS] は \mathbf{R}_+^3 の境界の周りの局所的な性質を明らかにしている. すなわち (1) の場合に系 (LV) はパーマネンス (\mathbf{R}_+^3 の境界がリペラであり, かつ解は一様に有界) であり, (2) の場合にはヘテロクリニックサイクルが局所アトラクタであるという結果である. ここで ‘解が一様に有界である’ とは, 初期値によらずある有界領域がとれて, そのなかに解はいずれ入り込み, 出ることはないことである.

また, M. W. Hirsch [H] により調べられた ‘競争系’ となる場合は, 系 (LV) においては $a_{ij} < 0$, $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ という条件に相当するが, この場合における解の大域的な性質については, いくつかの結果が知られている ([CHW], [DZ]). これらに対して定理 1 の結果は, ‘競争系’ ではない場合も考察の対象とできることに特徴がある. 例えばそれには ‘3 すくみ系’ ($a_{i,i-1} < 0 < a_{i,i+1}$) という条件をもつ系が挙げられる.

6. 定理 1 の証明

系 (LV) に条件 γ のついたものを (LV_γ) , 条件 $\tilde{\gamma}$ のついたものを $(LV_{\tilde{\gamma}})$ と表す.

原点から内部平衡点を経由する半直線を Γ_1 と表す. 系 (LV_γ) の内部平衡点の安定多様体は $\Pi_A < 0$ の場合に Γ_1 と一致する. 次の補題が成り立つ.

補題 1. 系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ を考える. ある開集合 $K_\epsilon \subset (\mathbf{R}_+^3)^\circ$ と Γ_1 のある近傍 $n(\Gamma_1)$ そして $(\mathbf{R}_+^3)^\circ \setminus \Gamma_1$ 上で滑らかなスカラー関数 $G(x)$ が存在して, 系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ が各 $\theta \in (0, \pi)$ で $C_\theta := \{x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ : G(x) = \theta\}$ に横断的であり, \dot{G} は $K_\epsilon \setminus n(\Gamma_1)$ 上で定符号となる.

- 補題 1 の証明 -

まず (LV_γ) が球面 $S_+^2 := \{x \in \mathbf{R}_+^3 : |x| = 1\}$ 上に射影されたベクトル場 (\hat{f}) を次のように考える

$$(\hat{f}) \quad \dot{x} = F - |x|^{-2}(x \cdot F)x,$$

ここで $F = (F_1, F_2, F_3)$ は系 (LV_γ) のベクトル場である. そして初期値を x とする (\hat{f}) の解を $\varphi_x(t)$ とかく.

写像 $\hat{\psi} : \mathbf{R} \times S_+^2 \rightarrow S_+^2$ を $\hat{\psi}(t, x) = \varphi_x(t)$ で定義する. すると

$$\hat{\psi}(0, x) = x, \quad x \in S_+^2,$$

$$\hat{\psi}(t_1 + t_0, x) = \hat{\psi}(t_1, \hat{\psi}(t_0, x)), \quad t_1, t_0 \in \mathbf{R}.$$

となり, $\hat{\psi}$ は S_+^2 上の力学系となる. 各 $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\hat{\psi}_t(x) = \hat{\psi}(t, x), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times S_+^2.$$

で定義される写像

$$\hat{\psi}_t : S_+^2 \rightarrow S_+^2$$

が得られる.

系 (LV_γ) を $\Pi_A > 0$ という条件のもとで考える. 内部平衡点 x_γ^* が局所漸近安定となっていることから, ある正の実数 d が存在して, 閉曲線 $\widehat{C}_d := \{x \in (S_+^2)^\circ : |x - x_\gamma^*| = d\}$ に (\hat{f}) は (内向きに) 横断的となる.

$\hat{\psi}_t$ が微分同相写像を与えるため, 各 $t < 0$ に対して閉曲線 $\hat{\psi}_t(\widehat{C}_d) = \{\hat{\psi}_t(x) \in (S_+^2)^\circ : x \in \widehat{C}_d\}$ は滑らかである. 各々の $t < 0$ に対して次の集合を考える

$$C_\theta := \bigcup_{s>0} s\hat{\psi}_t(\widehat{C}_d) \subset (\mathbf{R}_+^3)^\circ,$$

ただしここで $\theta = \cot^{-1} t$ とする.

ここで系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ を $\Pi_A > 0$ という条件のもとで考える. 関数 $G : (\mathbf{R}_+^3)^\circ \rightarrow \mathbf{R}$ を次のように定義する

$$G(x) = \begin{cases} \theta & (x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ \setminus \Gamma_1), \\ 0 & (x \in \Gamma_1). \end{cases}$$

その微分は次のように考えられる

$$\dot{G} := \nabla G \cdot f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial G}{\partial x_i} \dot{x}_i,$$

ここで $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ であり, $f := (f_1, f_2, f_3)$ は系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ の定めるベクトル場である. すると十分 0 に近い ϵ をとると (ϵ_i ($i = 1, 2, 3$) が十分 0 に近いこと), ある開集合 $K_\epsilon \subset (\mathbf{R}_+^3)^\circ$ と Γ_1 のある近傍 $n(\Gamma_1)$ が存在して

$$\dot{G} < 0 \quad \text{on } K_\epsilon \setminus n(\Gamma_1)$$

となる. 系の条件が別の $\Pi_A < 0$ の場合でも同様に考えると $K_\epsilon \setminus n(\Gamma_1)$ 上で $\dot{G} > 0$ となる.

(証明終り)

以上により, 射影される系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ の解のふるまいを用いることから, 系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ における基本領域を比較的広い範囲に定めることができる. 残された隙間に対して, 特に境界の近傍領域に対しては, 次の補題を考えることができる.

補題 2. 系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ を $\det A < 0$ かつ $\Pi_A > 0$ という条件のもとで考える. 無限遠点を含めた境界の, ある近傍領域 $I(q)_\epsilon \subset (\mathbf{R}_+^3)^\circ$ と $T > 0$ が存在して, $(\mathbf{R}_+^3)^\circ$ に初期値をもつ任意の解 ψ に対して, 任意の $t > T$ で $\psi(t) \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ \setminus I(q)_\epsilon$ とできる. さらに $I(q)_\epsilon$ は, 系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ で同様に構成される境界の近傍領域 $I(p)$ に, ϵ を 0 に近づけることにより, いくらでも近づけることができる.

すなわち上の補題 2 では, 解がいずれ入り込み出ることはない有界領域 $(\mathbf{R}_+^3)^\circ \setminus I(q)_\epsilon$ が存在して, その取り方が初期値に関してだけでなく, パラメータに関する連続性をもつことを主張している. $I(p)_\epsilon$ は $\{x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ \mid 0 < P_\epsilon(x) < p\}$ として構成されるが, ここで $P_\epsilon(x)$ は系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ に対する平均リアプノフ関数であり, 3次元 Lotka-Volterra 系に対しては通常 $P(x) = \prod_{i=1}^3 x^{p_i}$ を考える. ここでの p_i ($i = 1, 2, 3$) が正の値にとれる場合に $q > 0$ が存在して, $P(x)$ が平均リアプノフ関数となっている [HS]. 上の補題 2 は, 系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ の場合に設定することのできる境界の近傍領域 (境界層と呼ばれる) $I(p)$ を定める $p > 0$ の値に, 系 $(LV_{\tilde{\gamma}})$ におけるその値 q が ϵ を 0 に近づけると, いくらでも近づくことが示せて, さらに $P(x)$ が連続であることから $I(q)_\epsilon$ が $\epsilon \rightarrow 0$ で $I(p)$ に限りなく近づくということを示される. この証明は [HS] における平均リアプノフ関数に関する記述を, 今具体的に関数が与えられていることに注意をして, 確認することにより得られる.

- 定理 1 の証明 -

まず, 風をうけた帆のような形をした集合 $D_r := \{x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ : D(x) = r\}$ を考える. ここで $D(x) := |x|^2$ とする. そして補題 1 における C_θ (円環と同相) の族を

考える. すると次のことが自然にわかる

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Gamma_1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} C_\theta = \partial \mathbf{R}_+^3 \setminus \{\infty\} \quad \text{そして} \quad \lim_{r \rightarrow 0} D_r = \{0\}.$$

任意の $r_1, r_2 (0 < r_1 < r_2 < \infty)$ と $\theta_1, \theta_2 (0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi)$ に対して, それぞれ次の領域を定める

$$D_{(r_1, r_2)} := \{x : r_1 < D(x) < r_2\}, \quad C_{(\theta_1, \theta_2)} := \{x : \theta_1 < G(x) < \theta_2\}.$$

系 (LV_γ) を $\det A < 0$ かつ $\Pi_A > 0$ という条件のもとで考える. この時, 系はパーマメントになることから, 補題 2 で示した境界層 $I(p)$ が存在する [HS]. このことは解 $\psi(t)$ の成分を $\psi^i(t)$ と書くと, ある $\underline{\delta}, \bar{\delta} (0 < \underline{\delta} < \bar{\delta} < \infty)$ が存在して, $(\mathbf{R}_+^3)^\circ$ 内に初期値を持つ任意の解 $\psi(t)$ に対して, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \psi^i(t) > \underline{\delta}$ かつ $\limsup_{t \rightarrow \infty} \psi^i(t) < \bar{\delta} (i \in \{1, 2, 3\})$ となることを意味している.

ここで系 $(LV_{\bar{\gamma}})$ を $\det A < 0$ かつ $\Pi_A > 0$ という条件のもとで考える. ここでも同様にして境界層 $I(q)_\epsilon$ を考えることができ, 補題 2 により, $\epsilon \rightarrow 0$ で $I(q)_\epsilon \rightarrow I(p)$ となる.

系の条件より, どれだけ小さい $\epsilon > 0$ に対しても, ある $\gamma > 0$ がとれて, $|\gamma - \gamma_i| < \epsilon (i \in \{1, 2, 3\})$ とできる. 関数 D の微分 $\dot{D} := \nabla D \cdot f$ を考えると, 任意の $x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ$ に対して十分大きな l をとり

$$\dot{D} \geq 2(\gamma - \epsilon - l(x_1 + x_2 + x_3))D$$

とすることができる. ゆえに十分小さな値 $m > 0$ がとれて

$$\dot{D}|_{D_{(0, m)}} > 0$$

となる.

一方, 十分大きな値 L に対しては, ある $T > 0$ が存在して,

$$\text{任意の } t > T \quad \text{と} \quad \psi(0) \in D_{(L, \infty)} \quad \text{に対して} \quad \psi(t) \in D_{(0, L)}$$

が成り立つようにできる. ここで系 $(LV_{\bar{\gamma}})$ の解を $\psi(t)$ と記述した.

射影される系 (LV_γ) に関して, 必要ならば座標変換をすることにより $\{x \in C_\theta : 0 < \theta < \infty\}$ 上において $\dot{G} < 0$ となるような族 $\{C_\theta\}$ を考えることができる. 従って系 $(LV_{\bar{\gamma}})$ に関して, 必要ならば ϵ を十分 0 に近く取り直すことから, 任意の $\underline{r}, \bar{r} (0 < \underline{r} < \bar{r} < \infty)$ と任意の $\underline{\theta}, \bar{\theta} (0 < \underline{\theta} < \bar{\theta} < \pi)$ に対して, $r_1, r_2 (0 < r_1 < \underline{r} < \bar{r} < r_2 < \infty)$ と $\theta_1, \theta_2 (0 < \theta_1 < \underline{\theta} < \bar{\theta} < \theta_2 < \pi)$ を考えることができ,

$$\dot{G} < 0 \quad \text{on} \quad D_{(r_1, r_2)} \cap C_{(\theta_1, \theta_2)} \quad (1)$$

$$D_{(0,r_1)}, D_{(r_2,\infty)}, C_{(\theta_2,\pi)} \subset I(q) \quad (2)$$

とすることができる。

また一方、内部平衡点における実固有値に対する固有空間に接している多様体 Γ_ϵ (これは $\Pi_A < 0$ の場合には、内部平衡点の一次元安定多様体と一致する) に対しては、ある円筒状の近傍 $n(\Gamma_\epsilon)$ が存在して、その中に初期値をもつ任意の解の ω -極限集合が内部平衡点となるようにできる。

ここで次の領域 J_ϵ を考える

$$J_\epsilon := \bigcup_{r'_2, \theta'} \bigcap_{r'_1} \{ x \in (\mathbf{R}_+^3)^\circ : x \in D_{(r'_1, r'_2)} \cap C_{(0, \theta')} \subset n(\Gamma_\epsilon) \}.$$

ϵ を 0 に近づけることより、 r'_1 はいくらでも 0 に近く、また r'_2 はいくらでも大きく、そして θ' はいくらでも π に近い値としてとることができる。すなわち、任意の $r_1, r_2 (> 0)$ と $\theta_1 (\in (0, \pi))$ に対して、ある ϵ が存在して、 $0 < r'_1 < r_1 < r_2 < r'_2 < \infty$ そして $0 < \theta_1 < \theta' < \pi$ とできる。ゆえにつぎが成り立つようにできることが分かる

$$C_{(0, \theta_1)} \subset \{ x \in \mathbf{R}_+^3 : x \in I(q)_\epsilon \cup J_\epsilon \} \subset \{ x \in \mathbf{R}_+^3 : x \in I(q)_\epsilon \cup n(\Gamma_\epsilon) \}. \quad (3)$$

以上の (1), (2) そして (3) をまとめると、 $(\mathbf{R}_+^3)^\circ$ に初期値をもつ任意の解 ψ の ω -極限集合、すなわち大域アトラクタは内部平衡点となる。

系の条件が異なり $\Pi_A < 0$ である場合にも、同様の証明を行うことから、(Γ_ϵ を除いたところでの) 大域アトラクタがヘテロクリニックサイクルとなることが分かる。
(証明終り)

7. 極限閉軌道の存在と分岐構造

系 (LV) において、座標の相似変換により一般性を失うことなく $a_{ii} = -1$ ($i = 1, 2, 3$) とできるので、以下これを仮定し、さらに簡単のため $\gamma_1 x_1^* = \gamma_2 x_2^* = \gamma_3 x_3^*$ という条件を仮定する。ここで (x_1^*, x_2^*, x_3^*) は内部平衡点の座標をしめす。このとき次が成り立つ。

定理 2 [U]. 系 (LV) においてパラメータが次の条件 (C1)' と (C2)' を満たしているとする。

$$(C1)' \quad 1 + \prod_{i=1}^3 (1 + a_{i,i-1}) > 0, \quad (C2)' \quad 8 + \prod_{i=1}^3 a_{i,i-1} < 0.$$

そして $a_{i,i+1}$ ($i = 1, 2, 3$) が 0 に十分近い負の値をもつとき、 ω -極限集合は閉軌道を含み、この閉軌道の存在は強靱的なものである。

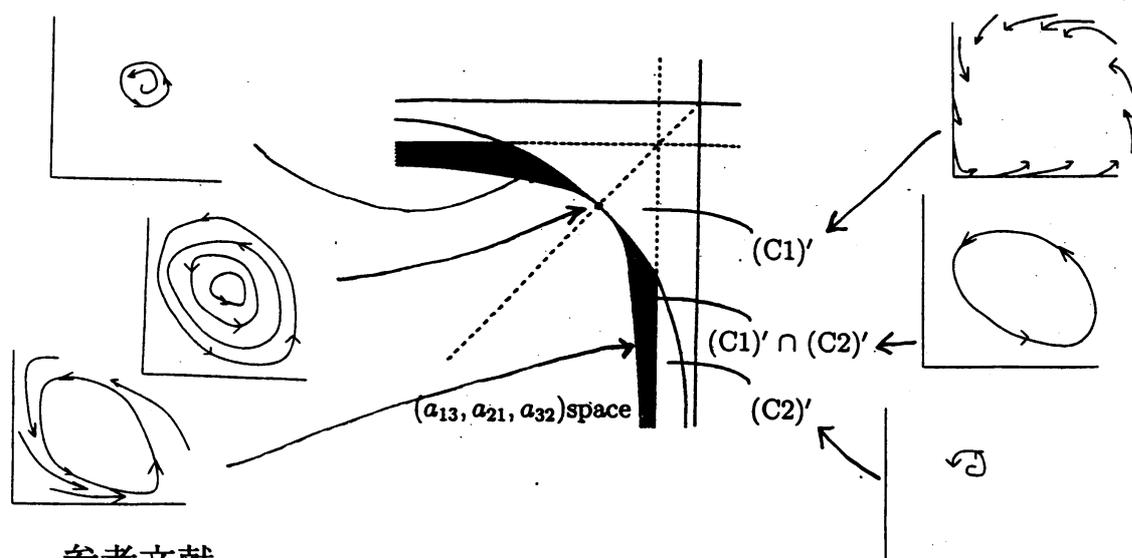
パラメータ空間 (a_{13}, a_{21}, a_{32}) 内の分岐構造から、条件 (C1)' を満たす集合の境界と条件 (C2)' をみたす集合の境界とで示される分岐曲面が $a_{13} = a_{21} = a_{32}$ を満たす

ところで接していることがわかり、これらの条件を同時に満たす集合はその分岐点で丁度存在しなくなることが分かる。この余次元のより高い分岐点の存在が、ホップ分岐とヘテロクリニックな分岐が縮退する状況をつくっている。この分岐点を通らずに上の2つの分岐曲面を横切るようにパラメータを動かすことから、演題に示した分岐過程をつくることができる。なお定理2の条件は次のように弱められる

$$(C1) \quad \prod_A > 0,$$

$$(C2) \quad \left(\sum_i \gamma_i x_i^* a_{ii} \right) \left\{ \sum_{i \neq j} \gamma_i \gamma_j x_i^* x_j^* (a_{ii} a_{jj} - a_{ij} a_{ji}) \right\} + \left(\prod_i \gamma_i x_i^* \right) \det A < 0.$$

この条件のもとで、平衡点以外の極限集合が $(\mathbf{R}_+^3)^\circ$ に存在している。さらに $a_{i,i+1} \nearrow 0$ ($i = 1, 2, 3$) とすると系は競争系になり、その極限集合は閉軌道を含むことになる。これらの極限集合が存在している状態空間内の領域を、ある程度特定することもできる ([U])。最後に定理2のかたちに簡単化された、パラメータ空間内の分岐図を示す。



参考文献

- [CHW] C.-W. Chi, S.-B. Hsu and L.-I. Wu, *On the asymmetric May-Leonard model of three competing species*, SIAM J. Appl. Math. 58 (1998), 211–226.
- [H] M. W. Hirsch, *Systems of differential equations which are competitive or cooperative I: Limit sets*, SIAM J. Math. Anal. 13 (1982), 167–179.
- [HS] J. Hofbauer and K. Sigmund, “The Theory of Evolution and Dynamical Systems”, Cambridge Univ. Press, Cambridge / New York, 1988.
- [U] T. Uno, *Robustness and global behavior of 3-dimensional Lotka-Volterra equations*, Nonlinear Analysis 47 (2001), 1309–1320.
- [UO] T. Uno and K. Odani, *On a Lotka-Volterra model which can be projected to a sphere*, Nonlinear Analysis 30 (1997), 1405–1410.
- [DZ] P. van den Driessche and M. L. Zeeman, *Three-dimensional competitive Lotka-Volterra systems with no periodic orbits*, SIAM J. Appl. Math. 58 (1998), 227–234.