数理解析研究所講究録 1245 巻 2002 年 1-15

Crystal Bases and Twining Characters

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)
筑波大学大学院 数学研究科
Graduate School of Mathematics,
University of Tsukuba
sagaki@math.tsukuba.ac.jp

内藤 聡 (Satoshi NAITO)
筑波大学 数学系
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba
naito@math.tsukuba.ac.jp

http://www.math.tsukuba.ac.jp/~sagaki/
からプレプリントをダウンロード可能 (2001 年 9 月現在)

0 Introduction.

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ を, 有限集合 I で添字付けられた symmetrizable generalized Cartan matrix $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ に付随した $\mathbb{Q}$ 上の Kac-Moody algebra とし, $\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra, W を Weyl 群とする. また $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra, すなわち, $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}$ の positive root space 達で生成される $\mathfrak{g}$ の subalgebra とする.

$\omega : I \to I$ を全単射で, 任意の $i, j \in I$ に対して, $a_{\omega(i),\omega(j)} = a_{ij}$ であるものとしよう. このとき, ω は, $\mathfrak{g}$ の自己同型 $\omega \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ で, $\mathfrak{g}$ の triangular decomposition を保つものを誘導する. $\omega^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ を, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$ に対して, $(\omega^*(\lambda))(h) := \lambda(\omega(h))$ で定め,

$$(\mathfrak{h}^*)^0 := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \omega^*(\lambda) = \lambda\}, \qquad \widetilde{W} := \{w \in W \mid \omega^* w = w\omega^*\}$$

とおく. この $(\mathfrak{h}^*)^0$ に含まれる元を symmetric weight と呼ぶ.

λ を symmetric dominant integral weight とし, $L(\lambda) = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{h}^*} L(\lambda)_\chi$ を highest weight λ の irreducible highest weight $\mathfrak{g}$-module とする. ここで, $L(\lambda)_\chi$ は $L(\lambda)$ の χ-weight space である. このとき, 線形自己同型 $\tau_\omega : L(\lambda) \to L(\lambda)$ で,

$$\begin{cases} \tau_\omega(xv) = \omega^{-1}(x)\tau_\omega(v) & \text{for } \ x \in \mathfrak{g},\ v \in L(\lambda), \\ \tau_\omega(v_\lambda) = v_\lambda & \text{for } \ v_\lambda \in L(\lambda)_\lambda, \end{cases}$$

を満たすものが存在することが知られている. この τ_ω を用いて, $L(\lambda)$ の twining character $\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda))$ を次の式で定義する.

$$\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)) := \sum_{\chi\in(\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\tau_\omega|_{L(\lambda)_\chi}\big)e(\chi).$$

さらに $w \in \widetilde{W}$ に対して, lowest weight $w(\lambda)$ の Demazure module $L_w(\lambda) := U(\mathfrak{b})L(\lambda)_{w(\lambda)} \subset L(\lambda)$ は τ_ω-stable であることがわかる. そこで, $L_w(\lambda)$ の twining character を上と同様に

$$\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda)) := \sum_{\chi\in(\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\tau_\omega|_{L_w(\lambda)_\chi}\big)e(\chi).$$

で定義する.

twining character の概念は [FSS] および [FRS] において導入された. その論文において, $\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda))$ が, orbit Lie algebra と呼ばれる Kac-Moody algebra の irreducible highest weight module の (通常の) character を用いて表されることが示された. また, [KN] において, $\mathfrak{g}$ が有限次元の場合に, $\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda))$ に対しても同様の事が成立することが, 代数幾何的な手法を用いて示された.

本小論説では, これらの公式の, path model や crystal base, global base といった組み合わせ論的な道具を用いた別証明について解説する.

Notation. Kac-Moody algebra に関する記号をまとめておこう. 詳しい定義などは, [Kac] や [MP] などを参照.

$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$: symmetrizable generalized Cartan matrx (GCM) with $\#(I) < \infty$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$: Kac-Moody algebra/$\mathbb{Q}$ associated to A

$\mathfrak{h}$: Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$

$\{\alpha_i\}_{i\in I}$: the set of simple roots, $\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$: the set of simple coroots

$\{x_i, y_i\}_{i\in I}$: Chavalley generators, where $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ and $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$

$\mathfrak{n}_+$: the sum of positive root spaces

$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$: Borel subalgebra of $\mathfrak{g}$

Δ_+^{re} : the set of positive real roots, $\beta^\vee$: the dual root of $\beta \in \Delta^{\mathrm{re}}$

r_β : the reflection with respect to $\beta \in \Delta^{\mathrm{re}}$

W : Weyl group of $\mathfrak{g}$

$M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{Q}_\lambda$: Verma module of highest weight λ

$N(\lambda)$: the maximal proper submodule of $M(\lambda)$

$L(\lambda) = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} L(\lambda)_\chi$: irreducible highest weight module of highest weight λ

$L_w(\lambda) := U(\mathfrak{b}) L(\lambda)_{w(\lambda)}$: Demazure module of lowest weight $w(\lambda)$ in $L(\lambda)$, where λ is a dominant integral weight, $w \in W$

1 The Twining Characters.

始めに twining character について復習する (cf. [FSS] and [FRS]).

まず $\omega : I \to I$ を bijection で,

$$a_{\omega(i), \omega(j)} = a_{ij} \quad \text{for all} \quad i, j \in I \tag{1.1}$$

を満たすものとする. すなわち, ω は GCM A の Dynkin 図形のグラフ自己同型である. このとき, ω は $\mathfrak{g}$ の (Lie 代数としての) 自己同型 $\omega \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ で, $\omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ および

$$\begin{cases} \omega(x_i) = x_{\omega(i)} & \text{for} \quad i \in I, \\ \omega(y_i) = y_{\omega(i)} & \text{for} \quad i \in I, \\ \omega(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\omega(i)}^\vee & \text{for} \quad i \in I \end{cases}$$

を満たすものを誘導する (see [S, §1.1] and [FSS, §3.2]). $\omega^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ を

$$(\omega^*(\lambda))(h) := \lambda(\omega(h)) \quad \text{for} \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, h \in \mathfrak{h} \tag{1.2}$$

で定め,

$$(\mathfrak{h}^*)^0 := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \omega^*(\lambda) = \lambda\}, \qquad \widetilde{W} := \{w \in W \mid \omega^* w = w \omega^*\} \tag{1.3}$$

とおく. $(\mathfrak{h}^*)^0$ の元は symmetric weight と呼ばれる.

$P \subset \mathfrak{h}^*$ を, ω^*-stable な integral weight lattice で, すべての $i \in I$ に対して $\alpha_i \in P$ であるものとし, $P_+ := \{\lambda \in P \mid \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, {}^\forall i \in I\}$ とおく. highest weight $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ の Verma module $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{Q}_\lambda$ に対して, 次の線形自己同型を考えよう:

$$\omega^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}_\lambda} : M(\lambda) \to M(\lambda). \tag{1.4}$$

このとき, $M(\lambda)$ の maximal proper submodule $N(\lambda)$ は, この線形自己同型で不変であることが容易に分かる. したがって, $\omega^{-1}\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}_\lambda}$ は, $L(\lambda)=M(\lambda)/N(\lambda)$ 上の線形自己同型 $\tau_\omega : L(\lambda) \to L(\lambda)$ を誘導する.

Remark 1.1. i) $\tau_\omega : L(\lambda) \to L(\lambda)$ は次の性質を持つ唯一つの $L(\lambda)$ の線形変換であることが知られている (see [N1, Lemma 4.1] or [NS2, Lemma 2.2.3]):

$$\begin{cases} \tau_\omega(xv)=\omega^{-1}(x)\tau_\omega(v) & \text{for } x\in\mathfrak{g},\, v\in L(\lambda), \\ \tau_\omega(v_\lambda)=v_\lambda & \text{for } v_\lambda\in L(\lambda)_\lambda. \end{cases}$$

ii) $\tau_\omega(L(\lambda)_\chi)=L(\lambda)_{\omega^*(\chi)}$ for all $\chi\in\mathfrak{h}^*$.

この τ_ω を用いて, $L(\lambda)$ の twining character $\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda))$ を次の式で定める.

$$\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)) := \sum_{\chi\in(\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\tau_\omega|_{L(\lambda)_\chi}\big)e(\chi). \tag{1.5}$$

また, $w\in\widetilde{W}$ のとき, Demazure module $L_w(\lambda) := U(\mathfrak{b})L(\lambda)_{w(\lambda)}$ は τ_ω-stable である. そこで, $L_w(\lambda)$ の twining character $\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda))$ を上と同様に

$$\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda)) := \sum_{\chi\in(\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\tau_\omega|_{L_w(\lambda)_\chi}\big)e(\chi). \tag{1.6}$$

で定める. 我々の目標は, これらの twining character を crystal base, global base といった組み合わせ論的な道具を用いて決定することである. どちらも同様の方法で示すことが出来るので, 以下では Demazure module $L_w(\lambda)$ の場合を中心に説明する.

2 ORBIT LIE ALGEBRAS.

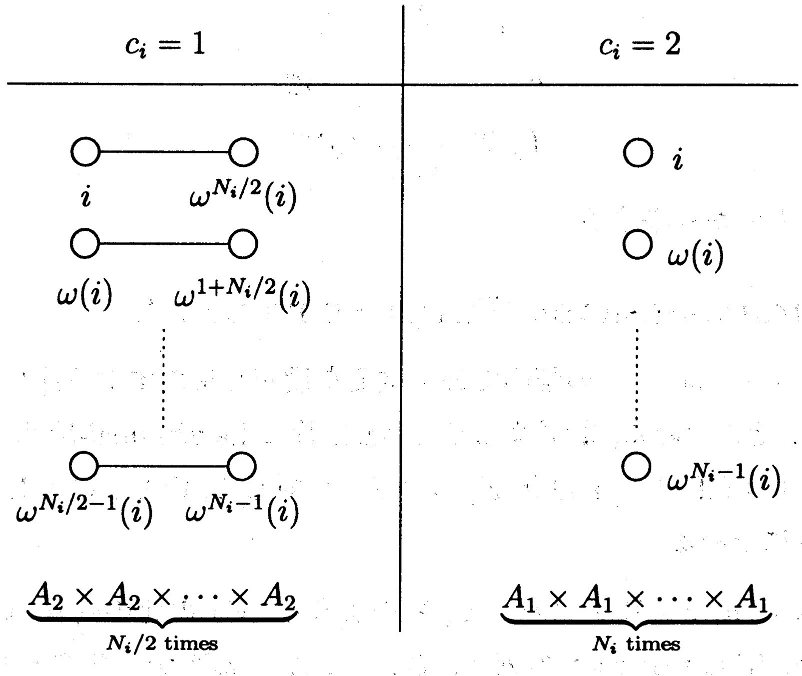
このセクションでは, 定理の主張を述べるために必要な orbit Lie algebra について復習する. 詳細は [FRS] および [FSS] を参照.

以下では $\omega : I \to I$ は次の条件 (L) を満たしているとする:

$$\textbf{(L)}\quad c_i := \sum_{k=0}^{N_i-1} a_{i,\omega^k(i)} = 1 \text{ or } 2 \quad \text{for all } i\in I. \tag{2.1}$$

ここで, $N_i := \#\{\omega^k(i) \mid k\geq 0\}$ である. この条件 (L) は linking condition (see [FSS, §2.2]) と呼ばれている.

Remark 2.1 ([FSS, §2.2]). ω が linking condition (L) を満たしているとき, $i \in I$ を通る ω-orbit に対応する A の Dynkin diagram の subdiagram は次のいずれかの形をしている:



$\widehat{I}$ を I における ω-orbit の完全代表系とし, 行列 $\widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})_{i,j\in\widehat{I}}$ を次で定義する.

$$\widehat{a}_{ij} := \frac{2}{c_j} \sum_{k=0}^{N_j-1} a_{i,\omega^k(j)}. \tag{2.2}$$

このとき, $\widehat{A}$ は $\widehat{I}$ の取り方によらないことが容易に分かる.

Proposition 2.2 ([FSS, §2.2]). ω が linking condition (L) を満たしているならば, $\widehat{A}$ は symmetrizable GCM となる. □

この $\widehat{A}$ に付随した Kac-Moody algebra を $\widehat{\mathfrak{g}}$ と表し, orbit Lie algebra と呼ぶ. 以下では, $\widehat{\mathfrak{g}}$ に関連した対象を $\widehat{\ }$ で表すことにする. 例えば....

$\widehat{\mathfrak{h}}$: the Cartan subalgebra of $\widehat{\mathfrak{g}}$, $\{\widehat{\alpha}_i\}_{i\in I}$: the set of simple roots

$\widehat{W}$: Weyl group of $\widehat{\mathfrak{g}}$

$\widehat{L}(\widehat{\lambda})$: irreducible highest weight $\widehat{\mathfrak{g}}$-module of highest weight $\widehat{\lambda} \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$

$\widehat{L}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda})$: Demazure module of lowest weight $\widehat{w}(\widehat{\lambda})$ in $\widehat{L}(\widehat{\lambda})$ for $\widehat{\mathfrak{g}}$,

where $\widehat{\lambda}$ is a dominant integral weight, $\widehat{w} \in \widehat{W}$

などである. また, 次の命題が成立することが知られている.

Proposition 2.3 ([FRS, Lemma 2.3]). 線形同型写像 $P_{\omega}^{*}:\widehat{\mathfrak{h}}^{*}\to(\mathfrak{h}^{*})^{0}$ および群同型写像 $\Theta:\widehat{W}\to\widetilde{W}$ で, 任意の $\widehat{w}\in\widehat{W}$ に対して,

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\widehat{w}"] \arrow[d, "P_{\omega}^{*}"'] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[d, "P_{\omega}^{*}"] \\ (\mathfrak{h}^{*})^{0} \arrow[r, "\Theta(\widehat{w})\cdot"'] & (\mathfrak{h}^{*})^{0} \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

が可換になるものが存在する. □

3 Lakshmibai-Seshadri Paths Fixed by ω^{*}.

このセクションでは, 我々の証明で最も重要な役割を果たす [NS1] の主結果について説明する. そのために, まずは path model, 特に Lakshmibai-Seshadri path について復習しよう (cf. [Li1] and [Li2]). $\lambda\in P_{+}$ に対して, $W\lambda$ 上の "Bruhat order" $\geq$ を次のように定める:

Definition 3.1. $\mu,\nu\in W\lambda$ に対して, 次のような $W\lambda$ の元の列 $\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_s\in W\lambda$ および positive real root の列 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s\in\Delta_{+}^{\mathrm{re}}$ が存在するとき, $\mu\geq\nu$ と定める: (1) $\nu_0=\mu$, $\nu_s=\nu$, (2) $\nu_i=r_{\beta_i}(\nu_{i-1})$, (3) $\nu_{i-1}(\beta_i^{\vee})<0$. また, $\mathrm{dist}(\mu,\nu)$ で, このような列の長さ s の最大値と定める.

次に "a-chain" の定義を復習しよう.

Definition 3.2. $\mu,\nu\in W\lambda$, $0<a<1$ とする. $W\lambda$ の元の列 $\mu=\mu_0>\mu_1>\cdots>\mu_t=\nu$ が, 各 $i=1,2,\dots,t$ に対して $\mathrm{dist}(\mu_i,\mu_{i-1})=1$ を満たし, さらに $\mu_i=r_{\beta_i}(\mu_{i-1})$ となる $\beta_i\in\Delta_{+}^{\mathrm{re}}$ に対して, $a\mu_i(\beta_i^{\vee})\in\mathbb{Z}$ となるとき, この列を (μ,ν) に対する a-chain という.

Definition 3.3. $W\lambda$ の元の列 $\underline{\nu}:\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_s$ と, 有理数の列 $\underline{a}:0=a_0<a_1<\cdots<a_s=1$ の組 $\pi=(\underline{\nu};\underline{a})$ が, shape λ の Lakshmibai-Seshadri path (L-S path) であるとは, 各 $i=1,2,\dots,s-1$ に対して, (ν_i,ν_{i+1}) に対する a_i-chain が存在するときに言う. また, この $\pi=(\underline{\nu};\underline{a})$ に対して, 次の区分的に線形で連続な写像 $\pi:[0,1]\to\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}P$ を対応させる:

$$\pi(t)=\sum_{i=1}^{j-1}(a_i-a_{i-1})\nu_i+(t-a_{j-1})\nu_j \quad \text{if} \quad a_{j-1}\leq t\leq a_j. \tag{3.1}$$

shape λ の L-S path 全体の集合を $\mathbb{B}(\lambda)$ で表す.

次に root operator の定義を復習しよう (cf. [Li1] and [Li2]). $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ および $i \in I$ に対して,

$$h_i^\pi(t) := (\pi(t))(\alpha_i^\vee), \qquad m_i^\pi := \min\{h_i^\pi(t) \mid t \in [0,1]\} \tag{3.2}$$

と定める. また, 適当な symbol θ を 1 つ準備する (crystal の理論における 0).

raising root operator $e_i : \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\} \to \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\}$ は以下のように定義される. まず $e_i\theta := \theta$ と定め, また $m_i^\pi > -1$ となる $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対しても, $e_i\pi := \theta$ と定める. $m_i^\pi \leq -1$ のときは

$$\begin{aligned} t_1 &:= \min\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = m_i^\pi\}, \\ t_0 &:= \max\{t' \in [0,t_1] \mid h_i^\pi(t) \geq m_i^\pi + 1, \ {}^\forall t \in [0,t']\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

とおき,

$$(e_i\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & \text{if } \ 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi - 1)\alpha_i & \text{if } \ t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{if } \ t_1 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

と定義する.

lowering root operator $f_i : \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\} \to \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\}$ も同様に定義される. まず, $f_i\theta := \theta$ とし, また $h_i^\pi(1) - m_i^\pi < 1$ となる $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対しても, $f_i\pi := \theta$ と定める. $h_i^\pi(1) - m_i^\pi \geq 1$ の場合は

$$\begin{aligned} t_0 &:= \max\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = m_i^\pi\}, \\ t_1 &:= \min\{t' \in [t_0,1] \mid h_i^\pi(t) \geq m_i^\pi + 1, \ {}^\forall t \in [t',1]\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

とおき,

$$(f_i\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & \text{if } \ 0 \leq t \leq t_0, \\ \pi(t) - (h_i^\pi(t) - m_i^\pi)\alpha_i & \text{if } \ t_0 \leq t \leq t_1, \\ \pi(t) - \alpha_i & \text{if } \ t_1 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

と定義する.

Remark 3.4. $\mathbb{B}(\lambda)$ には, root operator $e_i, f_i : \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\} \to \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\theta\}$ をそれぞれ raising operator, lowering operator とし, $\mathrm{wt} : \mathbb{B}(\lambda) \to P$ を $\mathrm{wt}(\pi) := \pi(1)$ で定めることによって, normal crystal の構造が入ることが知られている (cf. [Li2]).

$$\mathbb{B}_w(\lambda) := \{(\nu_1, \ldots ; \underline{a}) \in \mathbb{B}(\lambda) \mid \nu_1 \leq w(\lambda)\} \tag{3.7}$$

とおく. このとき, 次の定理が成立する.

Theorem 3.5 ([Li2]). 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して, $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ が存在して, $\pi = f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_k} \pi_\lambda$ となる. ここで, $\pi_\lambda(t) := (\lambda; 0, 1) = t\lambda$ である. また, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ が, 任意の $i \in I$ に対して, $e_i \pi = \theta$ を満たすならば, $\pi = \pi_\lambda$ である. さらに,

$$\sum_{\pi \in \mathbb{B}(\lambda)} e(\pi(1)) = \mathrm{ch}\, L(\lambda), \qquad \sum_{\pi \in \mathbb{B}_w(\lambda)} e(\pi(1)) = \mathrm{ch}\, L_w(\lambda) \tag{3.8}$$

が成立する. □

さて, $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ とし, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して, $(\omega^*(\pi))(t) := \omega^*(\pi(t))$ と定義する. このとき, $\mathbb{B}(\lambda)$ および $\mathbb{B}_w(\lambda)$, $w \in \widetilde{W}$, は ω^*-stable であることが分かる (cf. [NS1, Lemma 3.1.1]). ここで,

$$\mathbb{B}^0(\lambda) := \{\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \mid \omega^*(\pi) = \pi\}, \qquad \mathbb{B}^0_w(\lambda) := \mathbb{B}_w(\lambda) \cap \mathbb{B}^0(\lambda) \tag{3.9}$$

とおく. [NS1] の主結果は次の定理である:

Theorem 3.6 ([NS1, Theorem 3.2.4]). $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$, $w \in \widetilde{W}$ とし, $\widehat{\lambda} := (P^*_\omega)^{-1}(\lambda)$, $\widehat{w} := \Theta^{-1}(w)$ とおく. このとき,

$$\mathbb{B}^0(\lambda) = P^*_\omega(\widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda})), \qquad \mathbb{B}^0_w(\lambda) = P^*_\omega(\widehat{\mathbb{B}}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda})) \tag{3.10}$$

が成立する. ここで, $\widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda})$ は orbit Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ に関する shape $\widehat{\lambda}$ の L-S path 全体の集合であり, $\widehat{\mathbb{B}}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda}) := \{(\widehat{\nu}_1, \ldots ; \underline{\widehat{a}}) \in \widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda}) \mid \widehat{\nu}_1 \preceq \widehat{w}(\widehat{\lambda})\}$ ($\preceq$ は $\widehat{W}\widehat{\lambda}$ 上の Bruhat order) である. また $\widehat{\pi} \in \widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda})$ に対して, $(P^*_\omega(\widehat{\pi}))(t) := P^*_\omega(\widehat{\pi}(t))$ と定める. □

この定理の証明について簡単に説明しよう. まず $i \in \widehat{I}$ に対して, ω-root operator $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ を次で定義する (cf. Remark 2.1).

$$\widetilde{X}_i := \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{N_i/2} (X_{\omega^k(i)} X^2_{\omega^{k+N_i/2}(i)} X_{\omega^k(i)}) & \text{if } c_i = 1, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{N_i} X_{\omega^k(i)} & \text{if } c_i = 2. \end{cases} \tag{3.11}$$

ここで X は e または f を表している．このとき，Theorem 3.5 と直接の計算から次が可換であることがわかる (cf. [NS1, Theorem 3.1.2]):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^0(\lambda) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbb{B}^0(\lambda) \cup \{\theta\} \\ {\scriptstyle P^*_\omega}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle P^*_\omega} \\ \widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda}) & \xrightarrow[\widehat{f}_i]{} & \widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda}) \cup \{\theta\} \end{array} \tag{3.12}$$

ここで $\widehat{f}_i$ は orbit Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ に関する (lowering) root operator であり，また $P^*_\omega(\theta) := \theta$ と定める．したがって，特に $\mathbb{B}^0(\lambda) \supset P^*_\omega(\widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda}))$ となる．一方で，任意の $\pi \in \mathbb{B}^0(\lambda)$ が，$\pi = \tilde{f}_{i_1}\tilde{f}_{i_2}\cdots\tilde{f}_{i_k}\pi_\lambda$ の形に表せることが示せ，このことと上の可換図式から，逆の包含関係も分かり，$\mathbb{B}^0(\lambda) = P^*_\omega(\widehat{\mathbb{B}}(\widehat{\lambda}))$ が得られる．2 番目の等式 $\mathbb{B}^0_w(\lambda) = P^*_\omega(\widehat{\mathbb{B}}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda}))$ は次の命題から明らかである． □

Proposition 3.7 ([NS1, Lemma 3.2.3]). $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$, μ, $\nu \in W\lambda \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ とし，$\widehat{\lambda} := (P^*_\omega)^{-1}(\lambda)$, $\widehat{\mu} := (P^*_\omega)^{-1}(\mu)$, $\widehat{\nu} := (P^*_\omega)^{-1}(\nu)$ とおく．このとき，$W\lambda$ において，$\mu \geq \nu$ であることと，$\widehat{W\lambda}$ において，$\widehat{\mu} \succeq \widehat{\nu}$ であることは同値である． □

Theorem 3.5 および Theorem 3.6 から

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathbb{B}^0_w(\lambda)} e(\pi(1)) &= P^*_\omega\Bigg(\sum_{\widehat{\pi} \in \widehat{\mathbb{B}}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda})} e(\widehat{\pi}(1))\Bigg) \quad \text{by Theorem 3.6} \\ &= P^*_\omega(\mathrm{ch}\,\widehat{L}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda})) \quad \text{by Theorem 3.5} \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる．この式の左辺が $\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda))$ と一致することを示すのだが，そのために量子群の表現論，特に crystal base および global base を用いる．

4 The q-Twining Characters.

$U_q(\mathfrak{g}) = \langle x_i, y_i, q^h \mid i \in I, h \in P^\vee \rangle$ を $\mathfrak{g}$ に付随した $\mathbb{Q}(q)$ 上の量子群とし，$U_q^+(\mathfrak{g})$ を x_i 達で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の subalgebra とする．ここで，$P^\vee \subset \mathfrak{h}$ は P の dual lattice である．このとき，(Dynkin) diagram automorphism $\omega : I \to I$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の ($\mathbb{Q}(q)$-algebra としての) 自己同型 $\omega_q \in \mathrm{Aut}(U_q(\mathfrak{g}))$ で，

$$\begin{cases} \omega_q(x_i) = x_{\omega(i)} & \text{for } i \in I, \\ \omega_q(y_i) = y_{\omega(i)} & \text{for } i \in I, \\ \omega_q(q^h) = q^{\omega(h)} & \text{for } h \in P^\vee \end{cases}$$

を満たすものを誘導することがわかる ([S, Lemma 1.3.1]). さらに $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ のとき, §1 での Lie algebra の場合と同様にして, irreducible highest weight $U_q(\mathfrak{g})$-module $V(\lambda)$ の線形自己同型 $\tau_{\omega_q} : V(\lambda) \to V(\lambda)$ で,

$$\begin{cases} \tau_{\omega_q}(xv) = \omega_q^{-1}(x)\tau_{\omega_q}(v) & \text{for } x \in U_q(\mathfrak{g}),\, v \in V(\lambda), \\ \tau_{\omega_q}(v_\lambda) = v_\lambda & \text{for } v_\lambda \in V(\lambda)_\lambda. \end{cases}$$

を満たすものを得ることが出来る. この τ_{ω_q} を用いて, $V(\lambda)$ の q-twining character $\mathrm{ch}_q^\omega(V(\lambda))$ を次で定義する.

$$\mathrm{ch}_q^\omega(V(\lambda)) := \sum_{\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\tau_{\omega_q}|_{V(\lambda)_\chi}\big) e(\chi). \tag{4.1}$$

また, $w \in \widetilde{W}$ のとき, quantum Demazure module $V_w(\lambda) := U_q^+(\mathfrak{g})V(\lambda)_{w(\lambda)}$ は τ_{ω_q}-stable であることが分かる. そこで, $V_w(\lambda)$ の q-twining character を

$$\mathrm{ch}_q^\omega(V_w(\lambda)) := \sum_{\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0} \mathrm{tr}\big(\tau_{\omega_q}|_{V_w(\lambda)_\chi}\big) e(\chi). \tag{4.2}$$

で定める. ここで, トレース $\mathrm{tr}\big(\tau_{\omega_q}|_{V(\lambda)_\chi}\big)$ および $\mathrm{tr}\big(\tau_{\omega_q}|_{V_w(\lambda)_\chi}\big)$ は, 定義から明らかに $\mathbb{Q}(q)$ の元であるが, 簡単な議論から $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ の元であることが分かる. さらに次の Proposition が成立する.

Proposition 4.1 ([S, Proposition 2.2.3]). 任意の $\chi \in (\mathfrak{h}^*)^0$ に対して,

$$\mathrm{tr}\big(\tau_{\omega_q}|_{V(\lambda)_\chi}\big)\Big|_{q=1} = \mathrm{tr}\big(\tau_\omega|_{L(\lambda)_\chi}\big), \qquad \mathrm{tr}\big(\tau_{\omega_q}|_{V_w(\lambda)_\chi}\big)\Big|_{q=1} = \mathrm{tr}\big(\tau_\omega|_{L_w(\lambda)_\chi}\big) \tag{4.3}$$

が成立する. したがって, 特に

$$\mathrm{ch}_q^\omega(V(\lambda))\Big|_{q=1} = \mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)), \qquad \mathrm{ch}_q^\omega(V_w(\lambda))\Big|_{q=1} = \mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda)) \tag{4.4}$$

である. □

5 Crystal Bases and Global Bases.

$\lambda \in P_+$ に対して, $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ を $V(\lambda)$ の crystal base とし, $\{G(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$ を global base とする. すなわち, $G(b) \in V(\lambda)_{\mathrm{wt}(b)}$ であり,

$$V(\lambda) = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}(\lambda)} \mathbb{Q}(q)G(b) \tag{5.1}$$

である. また, quantum Demazure module に関しては, 次の定理が知られている:

Theorem 5.1 ([Kas3]). 各 $w \in W$ に対して, $\mathcal{B}(\lambda)$ の部分集合 $\mathcal{B}_w(\lambda)$ で,

$$V_w(\lambda) = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}_w(\lambda)} \mathbb{Q}(q)G(b) \tag{5.2}$$

となるものが存在する. □

以下では, 断らない限り, $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$, $w \in \widetilde{W}$ であるとする. crystal base や global base と τ_{ω_q} の関係を観ていこう. まず, (lowering) Kashiwara operator $F_i : V(\lambda) \to V(\lambda)$ と, τ_{ω_q} の関係は次の通りである:

Lemma 5.2 ([S, Lemma 3.2]). $\tau_{\omega_q} \circ F_i = F_{\omega^{-1}(i)} \circ \tau_{\omega_q}$

したがって, $\mathcal{L}(\lambda)$ は τ_{ω_q}-stable である. さらに $\overline{\tau}_{\omega_q} : \mathcal{L}(\lambda)/q\mathcal{L}(\lambda) \to \mathcal{L}(\lambda)/q\mathcal{L}(\lambda)$ を τ_{ω_q} から誘導された $\mathcal{L}(\lambda)/q\mathcal{L}(\lambda)$ の線形自己同型とすると, $\mathcal{B}(\lambda)$ は $\overline{\tau}_{\omega_q}$-stable であることがわかる. また次の Lemma が成立する.

Lemma 5.3 (cf. [S, Lemma 3.3]). $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ および $w \in \widetilde{W}$ のとき, $\mathcal{B}_w(\lambda)$ は $\overline{\tau}_{\omega_q}$ で不変である.

PROOF. [S, Lemma 3.3] では, 次のセクションで説明する $\mathcal{B}(\lambda)$ と $\mathbb{B}(\lambda)$ の間の (crystal としての) 同型定理や, $\mathbb{B}_w(\lambda)$ が ω^*-stable であることなどを用いて証明しているが, ここでは $\mathcal{B}_w(\lambda)$ の持つ性質のみを用いて証明してみよう.

まず, 簡単な計算で $\omega^* r_i (\omega^*)^{-1} = r_{\omega^{-1}(i)}$ が成立することが分かる (see [N1, Lemma 3.1.3]). したがって, 任意の $w \in W$ に対して, $w^\omega := \omega^* w (\omega^*)^{-1} \in W$ となることに注意する.

さて Lemma の主張を示すためには次を示せば十分である:

$$\overline{\tau}_{\omega_q}(\mathcal{B}_w(\lambda)) = \mathcal{B}_{w^\omega}(\lambda) \quad \text{for all} \quad w \in W. \tag{5.3}$$

まず, $w(\lambda) = \lambda$ の場合は上の式は明らかである. $w \in W$ を $w(\lambda) \neq \lambda$ であるものとし, $w'(\lambda) < w(\lambda)$ となる任意の $w' \in W$ に対して, (5.3) が成立したとする (帰納法の仮定). まず $w(\lambda) \neq \lambda$ であるから, $r_i w(\lambda) < w(\lambda)$ となる $i \in I$ が存在することが分かる. このとき, [Kas3, Proposition 3.2.3] より,

$$\mathcal{B}_w(\lambda) = \bigcup_{k \geq 0} F_i^k \mathcal{B}_{r_i w}(\lambda) \setminus \{0\} \tag{5.4}$$

が成立する. ここで, 帰納法の仮定と Lemma 5.2 を使うと,

$$\overline{\tau}_{\omega_q}(\mathcal{B}_w(\lambda)) = \bigcup_{k\geq 0} F^k_{\omega^{-1}(i)}\mathcal{B}_{r_{\omega^{-1}(i)}w^\omega}(\lambda) \setminus \{0\} \tag{5.5}$$

となる. よって, 再び [Kas3, Proposition 3.2.3] を使うと, (5.5) の右辺が $\mathcal{B}_{w^\omega}(\lambda)$ になることが分かり, 帰納法より Lemma の主張が得られる. □

global base と τ_{ω_q} の関係は次の Lemma で与えられる:

Lemma 5.4 ([S, Lemma 3.4]). 任意の $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ に対して, $\tau_{\omega_q}(G(b)) = G(\overline{\tau}_{\omega_q}(b))$ が成立する. したがって, $\tau_{\omega_q}(G(b)) = G(b)$ であるための必要十分条件は $b \in \mathcal{B}^0(\lambda) := \left\{b \in \mathcal{B}(\lambda) \mid \overline{\tau}_{\omega_q}(b) = b\right\}$ であることである. □

Lemma 5.3 および Lemma 5.4 から, $V_w(\lambda)$ の (weight vector からなる) 基底である $\left\{G(b) \mid b \in \mathcal{B}_w(\lambda)\right\}$ が τ_{ω_q} で不変であることが分かった.

6 Isomorphism Theorem.

まず, shape λ の L-S path の集合 $\mathbb{B}(\lambda)$ には root operator e_i, f_i をそれぞれ raising operator, lowering operator とし, $\mathrm{wt} : \mathbb{B}(\lambda) \to P$ を $\mathrm{wt}(\pi) := \pi(1)$ で定めることにより, crystal の構造が入っていたことを思いだそう. この crystal structure に関して, 次の定理が成立する (cf. Theorem 3.5)

Theorem 6.1 ([Jo], [Kas4], et al.). crystal base $\mathcal{B}(\lambda)$ と path model $\mathbb{B}(\lambda)$ は, crystal として同型である. □

この同型を与える写像を $\Phi : \mathcal{B}(\lambda) \to \mathbb{B}(\lambda)$ とすると, $\Phi(\mathcal{B}_w(\lambda)) = \mathbb{B}_w(\lambda)$ が成立することが知られている ([La]). さらに root operator と ω^* の交換関係 (see [NS1, Lemma 3.1.1]) および Kashiwara operator と τ_{ω_q} との交換関係 (Lemma 5.2) から

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_w(\lambda) & \xrightarrow{\tau_{\omega_q}} & \mathcal{B}_w(\lambda) \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ \mathbb{B}_w(\lambda) & \xrightarrow[\omega^*]{} & \mathbb{B}_w(\lambda) \end{array} \tag{6.1}$$

が可換になることが分かる. したがって, 次の Corollary が得られる:

Corollary 6.2. $\Phi(\mathcal{B}^0_w(\lambda)) = \mathbb{B}^0_w(\lambda)$. □

7 Twining Character Formulas.

まず Lemma 5.4 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big(\tau_{\omega_q}|_{V_w(\lambda)_\chi}\big) &= \#\big\{G(b) \mid \tau_{\omega_q}(G(b)) = G(b),\, b \in \mathcal{B}_w(\lambda)_\chi\big\} \\ &= \#\big\{b \in \mathcal{B}^0_w(\lambda) \mid \mathrm{wt}(b) = \chi\big\}.\end{aligned}$$

である. したがって,

$$\mathrm{ch}^\omega_q(V_w(\lambda)) = \sum_{b\in\mathcal{B}^0_w(\lambda)} e(\mathrm{wt}(b))$$

となる. ここで, Corollary 6.2 を使うと,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^\omega_q(V_w(\lambda)) &= \sum_{b\in\mathcal{B}^0_w(\lambda)} e(\mathrm{wt}(b)) \\ &= \sum_{\pi\in\mathbb{B}^0_w(\lambda)} e(\pi(1)) \quad \text{by Corollary 6.2}\end{aligned}$$

となる. さらに Proposition 4.1 を用いると,

$$\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda)) = \sum_{\pi\in\mathbb{B}^0_w(\lambda)} e(\pi(1))$$

となる. これと, (3.13) をあわせると, 次の twining character formula が得られる (see also [KN]):

Theorem 7.1 ([S, Theorem 3.1]). $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$, $w \in \widetilde{W}$ とし, $\widehat{\lambda} := (P^*_\omega)^{-1}(\lambda)$, $\widehat{w} := \Theta^{-1}(w)$ とおく. このとき,

$$\mathrm{ch}^\omega(L_w(\lambda)) = P^*_\omega(\mathrm{ch}\,\widehat{L}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda})) \tag{7.1}$$

が成立する. □

前述したように, これと全く同様の方法で, 次の $\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda))$ に関する公式も得ることが出来る (see also [FSS] and [FRS]):

Theorem 7.2. $\lambda \in P_+ \cap (\mathfrak{h}^*)^0$ とし, $\widehat{\lambda} := (P^*_\omega)^{-1}(\lambda)$ とおく. このとき,

$$\mathrm{ch}^\omega(L(\lambda)) = P^*_\omega(\mathrm{ch}\,\widehat{L}(\widehat{\lambda})) \tag{7.2}$$

が成立する. □

Note: 本小論説や [NS1], [S] などでは, linking condition (L) を仮定しているが, J.-H. Kwon 氏の示唆により, 実はこの仮定は必要ではないことが分かった. 詳細は [NS3] を参照されたい.

REFERENCES.

[FRS] J. Fuchs, U. Ray, and C. Schweigert, *Some automorphisms of generalized Kac-Moody algebras*, J. Algebra **191** (1997), 518–540.

[FSS] J. Fuchs, B. Schellekens, and C. Schweigert, *From Dynkin diagram symmetries to fixed point structures*, Comm. Math. Phys. **180** (1996), 39–97.

[Ja] J.C. Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Jo] A. Joseph, *Quantum Groups and Their Primitive Ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 29, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Kac] V.G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras* (3rd edition), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[KN] M. Kaneda and S. Naito, *A twining character formula for Demazure modules*, preprint.

[KK] S.-J. Kang and J.-H. Kwon, *Graded Lie superalgebras, supertrace formula, and orbit Lie superalgebras*, Proc. London Math. Soc. **81** (2000), 675–724.

[Kas1] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), 465–516.

[Kas2] ———, *Global crystal bases of quantum groups*, Duke Math. J. **69** (1993), 455–485.

[Kas3] ———, *The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula*, Duke Math. J. **71** (1993), 839–858.

[Kas4] ———, *Similarity of crystal bases*, Lie Algebras and Their Representations (Seoul, 1995), pp. 177–186, Contemp. Math. Vol. 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Li1] P. Littelmann, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Invent. Math. **116** (1994), 329–346.

[Li2] ———, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. of Math. **142** (1995), 499–525.

[Li3] ———, *Characters of representations and paths in* $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, in Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 61, 1997, pp. 29–49.

[Li4] ———, *The path model, the quantum Frobenius map and standard monomial theory*, in "Algebraic Groups and their Representations" (R.W. Carter and J. Saxl, eds.), 1998, pp. 175–212.

[La] V. Lakshmibai, *Bases for quantum Demazure modules*, Representations of Groups (Banff, 1994), pp.199–216, CMS Conf. Proc. Vol.16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Lu] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progr. Math. Vol. 110, Birkhäuser, Boston, 1993.

[MP] R.V. Moody and A. Pianzola, *Lie Algebras with Triangular Decompositions*, Canadian Mathematical Society series of monographs and advanced texts, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[N1] S. Naito, *Twining character formula of Kac-Wakimoto type for affine Lie algebras*, preprint.

[N2] ———, *Twining characters and Kostant's homology formula*, preprint.

[N3] ———, *Twining characters, Kostant's homology formula, and the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution*, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[N4] ———, *Twining character formula of Borel-Weil-Bott type*, preprint.

[NS1] S. Naito and D. Sagaki, *Lakshmibai-Seshadri paths fixed by a diagram automorphism*, to appear in J. Algebra.

[NS2] ———, *Certain modules with twining maps and decomposition rules of Littelmann type*, preprint.

[NS3] ———, *Standard paths and standard monomials fixed by a diagram automorphism*, preprint.

[S] D. Sagaki, *Crystal bases, path models, and a twining character formula for Demazure modules*, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.