数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 42-45

2つのパラメーターを持つカルタン行列について

On Cartan matrices with two parameters

東京医科歯科大学教養部　清田正夫

Tokyo Medical and Dental University, College of Liberal Arts and Sciences
Masao KIYOTA

1 序文

G を有限群、F を標数 $p>0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。B を FG のブロックとする。$S_1,\ldots,S_l$ $(l=l(B))$ を B に属す単純 FG 加群とし、P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij}=dim_F Hom_{FG}(P_i,P_j)$ をカルタン不変数と呼び、$l\times l$ 行列 $C=(c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。

以下、カルタン行列 $C=(c_{ij})$ を特別な形に決めたとき、ブロック B の構造についてどんなことがいえるかを調べる。ブロック B の構造として、ここでは次の不変量を考える。

$l(B)$: B に属す単純 FG 加群の個数。

$k(B)$: B に属す通常既約指標の個数。

$|D|$: B の不足群 D の位数。

カルタン行列 C の単因子。

カルタン行列 C の固有値。

これらの不変量の間の関係について様々な研究がなされてきた。たとえば $k(B)$ と $|D|$ については Brauer による有名な予想がある。

（Brauer 予想）　$k(B)\leq|D|$ が成立するか？

カルタン行列 C の単因子や固有値については次の事実が知られている。

（事実1）C の行列式 $detC$ は p べきである。

（事実2）C の最大の単因子は $|D|$ と一致していて、他の単因子はすべて $|D|$ より小さい。

（事実3）C の固有値はいずれも正の実数で、その最大固有値は単根である。これを C の Frobenius 固有値と呼び、$\rho(C)$ で表す。

C の固有値について、村井、和田、清田は [K-M-W] で次の2つを予想した。

（予想1）　もし $\rho(C)=|D|$ ならば C の固有値全体と C の単因子全体は一致するか？

（予想２）　もし $\rho(C)$ が整数ならば、$\rho(C) = |D|$ となるか？

[K-M-W] において (1) G が p 可解群のとき、(2) $D \trianglelefteq G$ のとき、(3) B が有限型や tame 型のときには（予想１）が成立することが確かめられている。また（予想２）は (2) や (3) の場合には正しい。G が p 可解群のときでも（予想２）は証明されていない（と思われる）。

以下、カルタン行列 C が、l 次単位行列 I 、成分がすべて１の l 次正方行列 J 、および正整数 a, b を用いて

$$C = (a-b)I + bJ$$

と表されている場合について、上の３つの予想の証明を試みる。簡単のため、上式の右辺を $C(a,b)$ とおく。すなわち $C(a,b)$ は対角成分がすべて a でそれ以外の成分が b となる l 次正方行列である。

p 可解群 G の巡回ブロック B （不足群 D が巡回群となるブロック）は上の形のカルタン行列を持つブロックの典型例のひとつである。実際このとき $C = C(m+1, m)$ となることが知られている。ここで m は等式

$$ml = |D| - 1$$

を満たす整数で、巡回ブロック B の重複度と呼ばれている。

さて $C = C(a,b)$ のとき、(Brauer 予想)、（予想１）および（予想２ ）は成立するのだろうか？結論を先に述べると、(Brauer 予想 ）と（予想１）は証明できる。また（予想２）は $l = l(B)$ が p と素ならば正しい。特に、G が p 可解群ならば（予想２）は成立する。

2　補題

以下、序文の記号をそのまま用いる。すなわち　B を有限群 G の p ブロックとし、D, C をそれぞれ B の不足群、カルタン行列とする。また $C = C(a,b)$ と仮定する。このときカルタン行列 C の固有値は直ちに計算できる。

補題１　カルタン行列 $C = C(a,b)$ の固有値全体は

$$\rho(C) = a + (l-1)b,\ a-b,\ \ldots,\ a-b$$

である。

補題１と序文の事実１を使うと次が得られる。

補題２　$C = C(a,b)$ のとき、整数 s, t $(s > t \geq 0)$ が存在して

$$a = \frac{p^s + (l-1)p^t}{l},\ b = \frac{p^s - p^t}{l}$$

と書ける。

補題2で整数 s,t は $s>t\geq 0$ を満たす任意の組が実現可能である。実際、任意の非負整数 α 、任意の正整数 β および $p-1$ の任意の約数 l に対し、$G=Z_{p^\alpha}\times(Z_{p^\beta}:Z_l)$, $B=FG$ とおけば、ブロック B のカルタン行列 C は $C(\{p^{\alpha+\beta}+(l-1)p^\alpha\}/l, (p^{\alpha+\beta}-p^\alpha)/l)$ となる。(序文の最後の例を参照せよ。)
さて、カルタン行列 C の単因子は次の補題で与えられる。

補題3　カルタン行列 $C=C(a,b)$ の単因子全体は

$$g,\ a-b,\ \ldots,\ a-b,\ \frac{(a-b)\{a+(l-1)b\}}{g}=|D|$$

である。ここで $g=g.c.d.(a,b)$ とおく。

(証明)　まず補題2より3数 $g,\ a-b,\ (a-b)\{a+(l-1)b\}/g$ はいずれも p べきとなることに注意する。あとは行列 C をユニモジュラー変形して対角行列

$$Diag\{g,\ a-b,\ \ldots,\ a-b,\ \frac{(a-b)\{a+(l-1)b\}}{g}\}$$

が得られることを示す。変形手順の詳細は省く。

補題4　$C=C(a,b)$ のとき次の (1) から (4) はすべて同値である。
(1) C の固有値全体と C の単因子全体は一致する。
(2) $\rho(C)=|D|$ が成立する。
(3) $g.c.d.(a,b)=a-b$ が成立する。
(4) $g.c.d.(p,l)=1$ が成立する。

(証明) 補題1と補題3から、(1) 、(2) および (3) の同値性が出る。補題2に注意すると (3) と (4) の同値性が導かれる。

3　予想

以上の準備のもとで、カルタン行列 $C=C(a,b)$ を持つブロックについて序文で述べた予想を検証する。(予想1)、(予想2) については、補題4から次が成立する。

命題1　$C=C(a,b)$ のとき (予想1) が成立する。

命題2　$C=C(a,b)$ のとき次の (1) と (2) は同値である。
(1) (予想2) が成立する。

(2) $g.c.d.(p,l)=1$ が成立する。

$C=C(a,b)$ のときは $\rho(C)$ が常に整数となることを注意する。また次の結果も証明できる。

命題3　$C=C(a,b)$ のとき B に属す任意の単純 FG 加群 S_i の高さは0である。　すなわち

$$(dim_F S_i)_p = |G:D|_p$$

が成り立つ。

命題3より次の結果が得られる。

命題4　G が p 可解群で $C=C(a,b)$ のとき $\rho(C)=|D|$ が成立する。

命題2と命題4から次が自然に予想される。

（予想3）　$C=C(a,b)$ のとき $l(B)$ は p と素であるか？

最後に（Brauer 予想）に関しては、和田倶幸氏による不等式

$$k(B) \leq tr(C) - (c_{12}+c_{23}+\cdots+c_{l-1,l})$$

と補題2、補題3を使って次の結果が証明される。

命題5　$C=C(a,b)$ のとき、$k(B)\leq|D|$ が成立する。つまり（Brauer 予想）は $C=C(a,b)$ のとき正しい。

参考文献

[K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, to appear in J. of Algebra