数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 41-47

追加注文をもつ在庫モデルの最適政策について

大阪府立大学 (Osaka Prefecture University) 北條 仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学 (Osaka Prefecture University) 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

1. はじめに

これまでに研究されている追加注文を許す在庫問題では、追加発注はその時点における不足分のすべてあるいはその一部に対してバックログするように行われてきた。しかしながら、在庫維持費用が品切れ損失に比べて小さいならば、不足分より多くの量を追加発注することにより費用をさらに削減することができる。

本稿では、追加発注の量に制約がない在庫モデルを提案し、期待費用最小化の下での最適解について探究する。また、考えうる3つの戦略における最適政策の関係についても言及する。

2. モデル

2.1. モデルの説明

単一施設、単一製品における一期間在庫問題を考える。tを計画期間長とする。商品は期首および与えられた時点$t_0(0 \le t_0 \le t)$でのみ発注可能である。初期在庫量xから出発し、期首在庫レベルがSになるように発注され、瞬時に(リードタイム0で)満たされる。計画期間中、需要により在庫レベルが徐々に減少する。もし時点t_0で過剰需要が生じていると、量sを追加発注することができる。sに制限は無く、追加発注も瞬時に満たされる。期首の発注では単位当たりc_1の購入費用が課せられ、追加発注では単位当たりc_2の費用が課せられる。商品は単位当たり価格rで販売される。また、保持されている在庫には単位時間単位当たりの在庫維持費用hがかかり、不足分に対しては単位時間単位当たりの品切れ損失費用pがかかる。$g(x)$を$0 \le x \le 1$上で定義された$g(0)=0, g(1)=1$なるxの単調増加関数とする。期間のある時点Tまでの累積需要量は計画期間の総需要量bの関数であり、$g(T/t)b$と表される。ここに、確率的に変化するのは需要量のみであり、bは確率変数Bの実現値の1つである。$\phi(\cdot)$をbの確率密度関数とする。$G(x)=\int_0^x g(y)dy$ とおく。

費用や量に関するパラメータに対して、次のような仮定を与える。

$$\begin{cases} S \ge 0,\ s \ge 0,\ b \ge 0 \\ h > 0,\ p > 0,\ 0 < c_1 \le c_2 \le r \\ \left(1 - \frac{t_0}{t}\right) p + r - c_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.2. 目的

経営者による戦略の決定が期首に行わなければならないとき、以下の3つの戦略における期待総費用による比較について考える必要がある。

- 追加発注をしないNone戦略
- 時刻t_0に不足をしているならばsだけ補充するIf Shortages戦略
- 時刻t_0に必ずsだけ補充するAlways戦略

本稿では、総費用の最小化という評価基準の下で各戦略における最適発注量および最適追加発注量を求め、3つの戦略における最適政策の関係について探究する。

3. 定式化

3.1. If Shortages 戦略

2.1節で述べたモデルはIf Shortages戦略である。このモデルでは、需要量bに対して次のような5つの在庫推移の状態が存在する。

(I) $0 \le b \le S$

期首在庫量Sによりすべての需要が満たされる。過少需要のため、末期でも在庫を保持することになる。時点t_0での追加発注は行われない。

(II) $S < b \le S/g(t_0/t)$

時点t_0では在庫を所持しているため、追加発注は行われない。しかしながら、その後の需要により末期には在庫不足の状態となる。

(III) $b > (S+s)/g(t_0/t)$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。このとき、追加発注量sは時点t_0までの過剰需要の一部をバックログすることになる。

(IV) $\max\{S/g(t_0/t), S+s\} < b \le (S+s)/g(t_0/t)$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。このとき、時点t_0までの過剰需要を完全にバックログし、その上、在庫を保持することになる。しかしながら、その後の需要により末期には再び在庫不足の状態に陥る。

(V) $S/g(t_0/t) < b \le S+s$

時点t_0において不足状態にあるため、sだけ追加発注される。この追加発注量sが十分大きいため、末期までの需要をすべて満たすことになる。

時点Tにおける在庫量$Q(T)$は、(I),(II)のとき、

$$Q(T) = S - g(T/t)b,\ 0 \le T \le t$$

と書け、(III)-(V)のとき、

$$Q(T) = \begin{cases} S - g(T/t)b,\ 0 \le T \le t_0 \\ S + s - g(T/t)b,\ t_0 < T \le t \end{cases}$$

と書ける。$C(S,s;b)$を需要量がbである時の総期待費用、$C_i(S,s;b), i=1,\dots,5$を各在庫状態に対応する総期待費用とすると、これらは以下のように表される：

$$C(S,s;b) = \begin{cases} C_1(S,s;b),\ 0 \le b \le S \\ C_2(S,s;b),\ S < b \le S/g(t_0/t) \\ C_3(S,s;b),\ b > (S+s)/g(t_0/t) \\ C_4(S,s;b),\ \max\{S/g(t_0/t), S+s\} < b \le (S+s)/g(t_0/t) \\ C_5(S,s;b),\ S/g(t_0/t) < b \le S+s \end{cases}$$

そこで

$$\begin{aligned}
C_1(S,s;b) &= [c_1+h]S - [hG(1)+r]b - c_1x, \\
C_2(S,s;b) &= [c_1-p-r]S + (h+p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1) - c_1x, \\
C_3(S,s;b) &= [c_1-p-r]S + (h+p)\{Sg^{-1}(S/b) - bG(g^{-1}(S/b))\} + pbG(1) \\
&\quad +[c_2-r-p(1-t_0/t)]s - c_1x, \\
C_4(S,s;b) &= [c_1-p-r]S + (h+p)[S\{g^{-1}(S/b) + g^{-1}((S+s)/b) - t_0/t\} + sg^{-1}((S+s)/b) \\
&\quad -b\{G(g^{-1}(S/b)) + G(g^{-1}((S+s)/b)) - G(t_0/t)\}] + pbG(1) - [ht_0/t+p+r-c_2]s \\
&\quad -c_1x, \\
C_5(S,s;b) &= [c_1-pt_0/t+h(1-t_0/t)]S + (h+p)[Sg^{-1}(S/b) + b\{G(t_0/t) - G(g^{-1}(S/b))\}] \\
&\quad +[h(1-t_0/t)+c_2]s - [hG(1)+r]b - c_1x
\end{aligned}$$

総費用 $C(S,s;b)$ の期待値 $E[C(S,s;B)]$ は

$$E[C(S,s;B)] = \begin{cases} E_1[C(S,s;B)], & S+s \le S/g(t_0/t) \\ E_2[C(S,s;B)], & S+s > S/g(t_0/t) \end{cases}$$

であり、

$$\begin{aligned} E_1[C(S,s;B)] &= \int_0^S C_1(S,s;b)\phi(b)db + \int_S^{S/g(t_0/t)} C_2(S,s;b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{S/g(t_0/t)}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S,s;b)\phi(b)db + \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S,s;b)\phi(b)db, \\ E_2[C(S,s;B)] &= \int_0^S C_1(S,s;b)\phi(b)db + \int_S^{S/g(t_0/t)} C_2(S,s;b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{S/g(t_0/t)}^{S+s} C_5(S,s;b)\phi(b)db + \int_{S+s}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S,s;b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S,s;b)\phi(b)db \end{aligned}$$

により計算される。

$E_1[C(S,s;B)], E_2[C(S,s;B)]$ は与えられた S に対して s の連続凸関数である。また、与えられた s に対して S の連続関数であるが、直線 $S = sg(t_0/t)/(1-g(t_0/t))$ 上の点で微分可能でない。さらに

$$\frac{\partial}{\partial s}E_1[C(S,s;B)]\bigg|_{s=0} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}E_2[C(S,s;B)]\bigg|_{s=\infty} > 0$$

を満たす。よって $(0,\infty)$ 上に $\frac{\partial}{\partial s}E[C(S,s;B)] = 0$ を満たす唯一の最適解 s^* が存在し、$[0,\infty)$ 上に最適解 S^* が存在する。

3.2. None 戦略

時刻 t_0 で追加発注を行わないモデルをNone戦略とよぶ。追加発注を考えていないNone戦略の推移状態は(I)および(II)のみで与えられるので、None戦略の総費用 $C(S,s;b)$ の期待値 $E[C(S,s;B)]$ は

$$\begin{aligned} E[C(S,s;B)] &= E_3[C(S,s;B)] \\ &= \int_0^S C_1(S,s;b)\phi(b)db + \int_S^{\infty} C_2(S,s;b)\phi(b)db \end{aligned}$$

となる。

$E_3[C(S,s;B)]$ は S の凸関数であり、

$$\frac{d}{dS}E_3[C(S,s;B)]\bigg|_{S=0} < 0, \quad \frac{d}{dS}E_3[C(S,s;B)]\bigg|_{S=\infty} > 0$$

を満たすので、$(0,\infty)$ 上に $\frac{d}{dS}E[C(S,s;B)] = 0$ を満たす唯一の最適解 S^0 が存在する。

3.3. Always 戦略

時刻 t_0 に必ず追加発注をするモデルをAlways戦略とよぶ。Always戦略ではIf Shortages戦略における状態(I),(II)の代わりに次のような推移状態が現れる。

(I') $0 \le b \le \min\{S/g(t_0/t), S+s\}$

期首在庫量Sおよび追加発注量sにより需要量bすべてが満たされる。常に在庫を保持している状況である。

(II') $S+s<b\leq S/g(t_0/t)$

時点t_0に在庫を保持しているにもかかわらず、追加発注を行う。しかしながら、その後の需要により末期には在庫不足の状態となる。

時点Tにおける在庫量$Q(T)$は、(I'),(II')のとき、

$$Q(T)=\begin{cases} S-g(T/t)b, & 0\leq T\leq t_0 \\ S+s-g(T/t)b, & t_0<T\leq t \end{cases}$$

と書ける。各在庫状態に対応する総期待費用$C_i(S,s;b), i=1',2'$は以下のようになる：

$$\begin{aligned} C_{1'}(S,s;b) &= [c_1+h]S+[h(1-t_0/t)+c_2]s-[hG(1)+r]b-c_1x, \\ C_{2'}(S,s;b) &= [c_1-p-r]S+[c_2-ht_0/t-p-r]s+(h+p)(S+s)g^{-1}((S+s)/b) \\ &\quad +\{pG(1)-(h+p)G(g^{-1}((S+s)/b))\}b-c_1x \end{aligned}$$

このとき、Always戦略の総費用$C(S,s;b)$の期待値$E[C(S,s;B)]$は

$$E[C(S,s;B)]=\begin{cases} E_4[C(S,s;B)], & S+s\leq S/g(t_0/t) \\ E_5[C(S,s;B)], & S+s>S/g(t_0/t) \end{cases}$$

であり、

$$\begin{aligned} E_4[C(S,s;B)] &= \int_0^{S+s} C_{1'}(S,s;b)\phi(b)db+\int_{S+s}^{S/g(t_0/t)} C_{2'}(S,s;b)\phi(b)db \\ &\quad +\int_{S/g(t_0/t)}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S,s;b)\phi(b)db+\int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S,s;b)\phi(b)db, \\ E_5[C(S,s;B)] &= \int_0^{S/g(t_0/t)} C_{1'}(S,s;b)\phi(b)db+\int_{S/g(t_0/t)}^{S+s} C_5(S,s;b)\phi(b)db \\ &\quad +\int_{S+s}^{(S+s)/g(t_0/t)} C_4(S,s;b)\phi(b)db+\int_{(S+s)/g(t_0/t)}^{\infty} C_3(S,s;b)\phi(b)db \end{aligned}$$

により計算される。

しかしながら、$E_4[C(S,s;B)]=E_5[C(S,s;B)]$となり、$E_4[C(S,s;B)], E_5[C(S,s;B)]$は与えられた$s$に対して$S$の連続凸関数であり、与えられた$S$に対して$s$の連続凸関数である。また、

$$\left.\frac{\partial}{\partial S}E_4[C(S,s;B)]\right|_{S=\infty}>0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial s}E_5[C(S,s;B)]\right|_{s=\infty}>0$$

を満たす。従って$[0,\infty)$上に唯一の最適解S^1が存在し、$[0,\infty)$上に唯一の最適解s^1が存在する。

4. 解析

4.1. 最適追加発注量の関係

If Shortages戦略の最適追加発注量s^*とAlways戦略の最適追加発注量s^1の関係について調べる。両戦略において期首発注量Sは与えられた定数として扱う。

If Shortages戦略は$E_1[C(S,s;B)]$あるいは$E_2[C(S,s;B)]$のどちらか1つに唯一の最適解s^*をもつ。

(1)$S+s^*\leq S/g(t_0/t)$のとき

If Shortages 戦略の最適解 s^* は $\dfrac{\partial}{\partial s}E_1[C(S,s;B)] = 0$ を満たす。この値を $E_4[C(S,s;B)]$ の s-偏導関数に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}E_4[C(S,s;B)]\bigg|_{s=s^*} &= [(1-t_0/t)\,h+c_2]\int_0^{S+s^*}\phi(b)db - [(1-t_0/t)\,p+r-c_2]\int_{S+s^*}^{S/g(t_0/t)}\phi(b)db \\ &\quad +(h+p)\int_{S+s^*}^{S/g(t_0/t)}\left\{g^{-1}\left((S+s^*)/b\right)-t_0/t\right\}\phi(b)db\end{aligned}$$

を得る。このとき、以下のことが成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial s}E_4[C(S,s;B)]\bigg|_{s=s^*}\begin{cases} <0 & \Rightarrow \quad s^*<s^1 \\ =0 & \Rightarrow \quad s^*=s^1 \\ >0 & \Rightarrow \quad s^*>s^1\end{cases}$$

(2) $S+s^* > S/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 s^* は $\dfrac{\partial}{\partial s}E_2[C(S,s;B)] = 0$ を満たす。この値を $E_5[C(S,s;B)]$ の s-偏導関数に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial s}E_5[C(S,s;B)]\bigg|_{s=s^*} = [(1-t_0/t)\,h+c_2]\int_0^{S/g(t_0/t)}\phi(b)db \;\geq\; 0$$

を得る。従って $s^1 \leq s^*$ が成り立つ。

4.2. 最適発注量の関係

すべての戦略上において追加発注量 s は固定されていると仮定する。

まず、None 戦略の最適発注量 S^0 と Always 戦略の最適発注量 S^1 の関係について調べる。

(1) $S^0+s \leq S^0/g(t_0/t)$ のとき

None 戦略の最適解 S^0 は $\dfrac{d}{dS}E_3[C(S,s;B)] = 0$ を満たす。この値を $E_4[C(S,s;B)]$ の S-偏導関数に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial S}E_4[C(S,s;B)]\bigg|_{S=S^0} \geq 0$$

を得る。

(2) $S^0+s > S^0/g(t_0/t)$ のとき

(1) と同様、$\dfrac{d}{dS}E_3[C(S,s;B)] = 0$ を $E_4[C(S,s;B)]$ の S-偏導関数に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial S}E_4[C(S,s;B)]\bigg|_{S=S^0} \geq 0$$

を得る。(1),(2) より任意の s に対して $S^1 \leq S^0$ が成り立つ。

次に、If Shortages 戦略の最適発注量 S^* と Always 戦略の最適発注量 S^1 の関係について調べる。

(1) $S^*+s \leq S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^* の中に $\dfrac{\partial}{\partial S}E_1[C(S,s;B)] = 0$ を満たすものが存在するとする。この値を $E_4[C(S,s;B)]$ の S-偏導関数に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S}E_4[C(S,s;B)]\bigg|_{S=S^*} &= r\int_{S^*}^{S^*+s}\phi(b)db + (h+p)\int_{S^*}^{S^*+s}\left\{1-g^{-1}\left(S^*/b\right)\right\}\phi(b)db \\ &\quad +(h+p)\int_{S^*+s}^{S^*/g(t_0/t)}\left\{g^{-1}\left((S^*+s)/b\right)-g^{-1}\left(S^*/b\right)\right\}\phi(b)db\end{aligned}$$

$$+\left\{(h+p)\int_{t_0/t}^{g^{-1}((S^*+s)/S^*g(t_0/t))}\{S^*+s-g(x)S^*/g(t_0/t)\}\,dx\right.$$
$$\left.-\left[(1-t_0/t)\,p+r-c_2\right]s\right\}\phi\left(S^*/g(t_0/t)\right)/g(t_0/t) \qquad (1)$$

を得る。このとき、以下のことが成り立つ。

$$\left.\frac{\partial}{\partial S}E_4[C(S,s;B)]\right|_{S=S^*}\begin{cases}<0 & \Rightarrow \quad S^*<S^1\\ =0 & \Rightarrow \quad S^*=S^1\\ >0 & \Rightarrow \quad S^*>S^1\end{cases}$$

もし(1)式の最後の項が非負であると仮定するならば、$S^1\le S^*$が成り立つ。

(2) $S^*+s>S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^*の中に$\frac{\partial}{\partial S}E_2[C(S,s;B)]=0$を満たすものが存在するとする。この値を$E_4[C(S,s;B)]$ の S-偏導関数に代入すると

$$\left.\frac{\partial}{\partial S}E_4[C(S,s;B)]\right|_{S=S^*}\ge 0$$

を得る。従って $S^1\le S^*$である。

最後に、If Shortages 戦略の最適発注量 S^*と None 戦略の最適発注量 S^0の関係について調べる。

(1) $S^*+s\le S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^*の中に$\frac{\partial}{\partial S}E_1[C(S,s;B)]=0$を満たすものが存在するとする。この値を$E_3[C(S,s;B)]$ の導関数に代入すると

$$\left.\frac{d}{dS}E_3[C(S,s;B)]\right|_{S=S^*} = -(h+p)\int_{S^*/g(t_0/t)}^{(S^*+s)/g(t_0/t)}\left\{g^{-1}\left((S^*+s)/b\right)-\frac{t_0}{t}\right\}\phi(b)db$$
$$+\left\{(h+p)\int_{t_0/t}^{g^{-1}((S^*+s)/S^*g(t_0/t))}\{S^*+s-g(x)S^*/g(t_0/t)\}\,dx\right.$$
$$\left.-\left[(1-t_0/t)\,p+r-c_2\right]s\right\}\phi\left(S^*/g(t_0/t)\right)/g(t_0/t) \qquad (2)$$

を得る。このとき、以下のことが成り立つ。

$$\left.\frac{d}{dS}E_3[C(S,s;B)]\right|_{S=S^*}\begin{cases}<0 & \Rightarrow \quad S^*<S^0\\ =0 & \Rightarrow \quad S^*=S^0\\ >0 & \Rightarrow \quad S^*>S^0\end{cases}$$

もし(2)式の最後の項が非正であると仮定するならば、$S^*\le S^0$が成り立つ。

(2) $S^*+s>S^*/g(t_0/t)$ のとき

If Shortages 戦略の最適解 S^*の中に$\frac{\partial}{\partial S}E_2[C(S,s;B)]=0$を満たすものが存在するとする。これを$E_3[C(S,s;B)]$ の導関数に代入すると

$$\left.\frac{d}{dS}E_3[C(S,s;B)]\right|_{S=S^*}\le 0$$

を得る。従って $S^*\le S^0$が成り立つ。

これらの結果をまとめると次の定理が導かれる。

Theorem. S^0,S^*,S^1をそれぞれ None 戦略, If Shortages 戦略, Always 戦略における最適発注量、s^*,s^1をそれぞれ If Shortages 戦略, Always 戦略における最適追加発注量とする。任意の s^*に対して

$$A(S^*,s^*) = r\int_{S^*}^{S^*+s^*}\phi(b)db+(h+p)\int_{S^*}^{S^*+s^*}\left\{1-g^{-1}\left(S^*/b\right)\right\}\phi(b)db$$

$$
\begin{aligned}
& \quad +(h+p)\int_{S^*+s^*}^{S^*/g(t_0/t)} \left\{g^{-1}\left((S^*+s^*)/b\right) - g^{-1}\left(S^*/b\right)\right\}\phi(b)db, \\
B(S^*,s^*) &= (h+p)\int_{S^*/g(t_0/t)}^{(S^*+s^*)/g(t_0/t)} \left\{g^{-1}\left((S^*+s^*)/b\right) - \frac{t_0}{t}\right\}\phi(b)db, \\
M(S^*,s^*) &= \left\{(h+p)\int_{t_0/t}^{g^{-1}((S^*+s^*)/S^*g(t_0/t))} \left\{S^*+s^*-g(x)S^*/g(t_0/t)\right\}dx \right. \\
& \quad \left. - \left[(1-t_0/t)\,p + r - c_2\right]s^*\right\}\phi\left(S^*/g(t_0/t)\right)/g(t_0/t)
\end{aligned}
$$

とおく。このとき、以下の関係が成り立つ。

(I) $S^* = 0$ のとき

$$s^1 \le s^*, \quad 0 = S^* \le S^1 \le S^0$$

(II) $S^* \neq 0$ のとき

(1) $S^* + s^* \le S^*/g(t_0/t)$

$$\frac{\partial}{\partial s}E_4[C(S,s;B)]\bigg|_{s=s^*} \begin{cases} <0 & \Rightarrow \quad s^* < s^1 \\ =0 & \Rightarrow \quad s^* = s^1 \\ >0 & \Rightarrow \quad s^* > s^1 \end{cases}$$

(i) $M(S^*,s^*) \le -A(S^*,s^*) \quad \Rightarrow \quad S^* \le S^1 \le S^0$,

(ii) $-A(S^*,s^*) < M(S^*,s^*) < B(S^*,s^*) \quad \Rightarrow \quad S^1 < S^* < S^0$,

(iii) $M(S^*,s^*) \ge B(S^*,s^*) \quad \Rightarrow \quad S^1 \le S^0 \le S^*$,

(2) $S^* + s^* > S^*/g(t_0/t)$ のとき

$$s^1 \le s^*, \quad S^1 \le S^* \le S^0$$

5. まとめ

本稿では制約のない追加発注量をもつモデルを提案し、数学的定式化を行った。考えうる３つの戦略における期待総費用の性質を調べ、それらの最適政策の関係について探究した。結果としてIf Shortages戦略における期首発注量以外で一意性が示された。また、３つの戦略における最適発注量および最適追加発注量の大小関係を明確に示すことができた。今後の課題として、期待総費用の関係の探究、多期間問題における探究を残す。

参考文献

[1] 児玉正憲, 『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会 (1996).

[2] 徂徠,有薗,太田, 返却および追加注文を許す一期間モデルの解法, 日本経営工学会誌, Vol.37, No.2 (1986).

[3] Arrow K.J., Karlin S. and Scarf H., Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford, Calif., Stanford University Press (1958).

[4] Heymand D.P. and Sobel M.J., Handbooks in Operations Research and Management Science Vol.2, Elsevier Science Publishers (1990).

[5] Hohjo H. and Teraoka Y., On Some Inventory Control Models, Mathematica Japonica, Vol.48, No.1, 43-66 (1998).

[6] Kabak I.W., Partial Returns in the Single Period Inventory Model, IE News, Vol.19, No.2, (1984).