数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 79-86

Notes on the Heinz-Kato-Furuta-Uchiyama inequality

棚橋 浩太郎 東北薬科大学
内山 敦 東北大学
内山 充 福岡教育大学

[概要] ヒルベルト空間上の作用素不等式である Heinz-Kato 不等式は T. Furuta, M. Uchiyama によって拡張された。ここではこれらの拡張が semi-operator monotone function のクラスまで拡張できることと、ある意味で、このクラスが最善の拡張であることを証明する。

[本論] 複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とおく。次の作用素不等式は Heinz-Kato 不等式 ([5, 6]) とよばれ、Schwatz 不等式の一般化である。

[定理 (HK)] $T \in B(\mathcal{H}), 0 \le A, B \in B(\mathcal{H})$ とする。もし

$$\|Tx\| \le \|Ax\|, \|T^*y\| \le \|By\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

ならば

$$|\langle Tx, y\rangle| \le \|A^\alpha x\|\|B^{1-\alpha}y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H},\ \alpha \in [0,1]$$

が成り立つ。

T. Furuta [3] はこの不等式を次のように拡張した。

[定理 (HKF)] $T = U|T| \in B(\mathcal{H})$ と極分解し $0 \le A, B \in B(\mathcal{H})$ とする。もし

$$\|Tx\| \le \|Ax\|, \|T^*y\| \le \|By\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

ならば

$$|\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y\rangle| \le \|A^\alpha x\|\|B^\beta y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

$$\alpha, \beta \in [0,1],\ 1 \le \alpha + \beta$$

が成り立つ。

[注意 1] 結論を

$$|\langle U|T|^{\alpha+\beta}x, y\rangle| \le \|A^{\alpha}x\|\|B^{\beta}y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

と書き直せば α, β の範囲は

$$\alpha, \beta \in [0, 1]$$

と拡張できる。

[証明] (Case $\beta \neq 0$)
$\|Tx\| \le \|Ax\|, \|T^*y\| \le \|By\|$ より

$$|T|^2 = T^*T \le A^2, |T^*|^2 = TT^* \le B^2$$

である。よって Löwner-Heinz inequality から

$$|T|^{2\alpha} \le A^{2\alpha}, |T^*|^{2\beta} \le B^{2\beta}$$

なので

$$\begin{aligned} |\langle U|T|^{\alpha+\beta}x, y\rangle| &= |\langle |T^*|^{\beta}U|T|^{\alpha}x, y\rangle| \\ &= |\langle U|T|^{\alpha}x, |T^*|^{\beta}y\rangle| \\ &\le \|U|T|^{\alpha}x\|\||T^*|^{\beta}y\| \\ &= \||T|^{\alpha}x\|\||T^*|^{\beta}y\| \\ &\le \|A^{\alpha}x\|\|B^{\beta}y\| \end{aligned}$$

となる。

(Case $\beta = 0$)
$|T|^{\beta} \to U^*U, |T^*|^{\beta} \to UU^*$ ($\beta \to +0$) strongly なので $|T|^0 = U^*U$ and $|T^*|^0 = UU^*$ と考える。
このとき

$$U|T|^0 = UU^*U = |T^*|^0U$$

となって、後は $\beta = 0$ の場合の証明と同様である。

更に M. Uchiyama [7] は次のように拡張した。

[定理 (HKFU)] $T = U|T| \in B(\mathcal{H}), 0 \leq A, B \in B(\mathcal{H})$ とする。連続関数 $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は operator monotone on $(0, \infty)$ とする。もし

$$\|Tx\| \leq \|Ax\|, \|T^*y\| \leq \|By\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

ならば

$$|\langle Uf(|T|)g(|T|)x, y\rangle| \leq \|f(A)x\|\|g(B)y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

が成り立つ。

この論文では、定理 (HKFU) を満たす連続関数 f, g のクラスは semi-operator monotone on $(0, \infty)$ まで拡張できることを示し、ある意味でこれが最善の拡張であることを示す。また、定理 (HK) の直接的なある拡張を示す。

[定義 2] 連続関数 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が semi-operator monotone on (a, b) とは $\{f(t^{\frac{1}{2}})\}^2$ が operator monotone on (a^2, b^2) のときをいう。

[注意 3] 連続関数 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が operator monotone on (a, b) なら semi-operator monotone on (a, b) である。しかし、逆は成立しない。例えば $f(t) = \{\log(1 + t^2)\}^{\frac{1}{2}}$ は semi-operator monotone on $(0, \infty)$ であるが operator monotone on $(0, \infty)$ ではない。

J. S. Aujla [1], J. I. Fujii, M. Fujii [2] は semi-operator monotone on $(0, \infty)$ のある種の特徴付けを行った。特に J. I. Fujii, M. Fujii [2] では、もっと一般に n-operator monotone の特徴付けも与えられている。

[補題 4] 連続関数 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が semi-operator monotone on (a, b) となる必要十分条件は f が第 1 象限に解析接続できて、第 1 象限を第 1 象限に移すことである。

[証明] 関数 f は semi-operator monotone on (a, b) とする。すると

$$g(t) = \{f(t^{\frac{1}{2}})\}^2, \quad t \in (a^2, b^2)$$

で定まる関数は operator monotone on (a^2, b^2) である。よって $g(t)$ の解析接続

$$g(z) = \{f(z^{\frac{1}{2}})\}^2, \quad z \in \Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi\}$$

は上半平面 Π_+ を上半平面 Π_+ に移す。よって

$$\Pi_+ \ni z \to f(z^{\frac{1}{2}})$$

は上半平面 Π_+ で解析的で

$$f(z^{\frac{1}{2}}) \in \Pi_1 = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\}$$

となる。従って f は第1象限 Π_1 に解析接続できて、$f(\Pi_1) \subset \Pi_1$ となる。逆は明らかである。

M. Uchiyama [7] の証明をみると、実は f, g が semi-operator monotone の性質しか用いていない。よって f, g は semi-operator monotone と条件を弱めても定理 (HKFU) は成り立つ。ここでは、本質的な部分の簡単な証明を与える。

[定理 5] $T = U|T| \in B(\mathcal{H}), 0 \le A, B \in B(\mathcal{H})$ とする。連続関数 $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は semi-operator monotone on $(0, \infty)$ とする。もし

$$\|Tx\| \le \|Ax\|, \|T^*y\| \le \|By\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

ならば

$$|\langle Uf(|T|)g(|T|)x, y\rangle| \le \|f(A)x\|\|g(B)y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

が成り立つ。

[証明] 仮定より $|T|^2 \le A^2, |T^*|^2 \le B^2$ なので

$$\{f(|T|)\}^2 \le \{f(A)\}^2, \{g(|T^*|)\}^2 \le \{g(B)\}^2$$

である。よって

$$\begin{aligned}
|\langle Uf(|T|)g(|T|)x, y\rangle| &= |\langle g(|T^*|)Uf(|T|)x, y\rangle| \\
&= |\langle Uf(|T|)x, g(|T^*|)y\rangle| \\
&\le \|f(|T|)x\|\|g(|T^*|)y\| \\
&\le \|f(A)x\|\|g(B)y\|
\end{aligned}$$

となる。

次に定理 (HK) の直接的なある拡張を行う。

[補題 6] 連続関数 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が semi-operator monotone on $(0,\infty)$ で $f(t)\not\equiv 0$ on $(0,\infty)$ とする。このとき関数 $\tilde{f}(t)=t/f(t)$ も semi-operator monotone on $(0,\infty)$ である。

[証明] 仮定より $\left\{f(t^{\frac{1}{2}})\right\}^2$ は operator monotone on $(0,\infty)$ であるから

$$0<f(t^{\frac{1}{2}}),\quad t\in(0,\infty)$$

となる。従って

$$\left\{\tilde{f}(t^{\frac{1}{2}})\right\}^2=\frac{t}{\left\{f(t^{\frac{1}{2}})\right\}^2},\quad t\in(0,\infty)$$

となるので [4 Corollary 2.6] より $\tilde{f}(t)$ は semi-operator monotone on $(0,\infty)$ である。

[定理 7] $T=U|T|\in B(\mathcal{H}),0\le A,B\in B(\mathcal{H})$ とする。連続関数 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は semi-operator monotone on $(0,\infty)$ で $f(t)\not\equiv 0$ on $(0,\infty)$ とする。もし $\|Tx\|\le\|Ax\|,\|T^*y\|\le\|By\|,\quad\forall x,y\in\mathcal{H}$ ならば $\tilde{f}(t)=t/f(t)$ とおくとき

$$|\langle Tx,y\rangle|\le\|f(A)x\|\|\tilde{f}(B)y\|,\quad\forall x,y\in\mathcal{H}$$

が成り立つ。

[証明] 補題 6 から $\tilde{f}(t)$ は semi-operator monotone on $(0,\infty)$ である。よって、定理 5 から

$$\begin{aligned}|\langle Tx,y\rangle|&=|\langle U|T|x,y\rangle|\\&=|\langle Uf(|T|)\tilde{f}(|T|)x,y\rangle|\\&\le\|f(A)x\|\|\tilde{f}(B)y\|,\quad\forall x,y\in\mathcal{H}\end{aligned}$$

となる。

[例 10] 例えば $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ は semi-operator monotone on $(0,\infty)$ なので、もし $\|Tx\|\le\|Ax\|,\|T^*y\|\le\|By\|\quad\forall x,y\in\mathcal{H}$ ならば

$$|\langle Tx,y\rangle|\le\|\sqrt{1+A^2}x\|\|\frac{B}{\sqrt{1+B^2}}y\|$$

が成り立つ。

次に定理 5 の結論が成り立つためには semi-operator monotone on $(0,\infty)$ という条件は本質的なものか調べよう。もし

$$f(t)=0, \quad \forall t\in(a,b)$$

となる区間 (a,b) があれば

$$g(t)=\begin{cases}\text{any}, & t\in(a,b)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

と定めると

$$f(t)g(t)\equiv 0 \ \text{ on } (0,\infty)$$

となる。このとき定理 5 の結論は明らかに成り立つが、この場合はつまらないので排除しよう。すると

$$f(t)g(t)\not\equiv 0 \quad \text{on } (0,\infty)$$

ならば、定理 5 の結論を満たす関数 f,g は semi-operator monotone on $(0,\infty)$ に限ることがいえる。

[定理 8] 連続関数 $f,g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は $f(t)g(t)\not\equiv 0$ on $(0,\infty)$ とする。もし f,g が次の条件 9 を満たせば f,g は semi-operator monotone on $(0,\infty)$ である。

[条件 9] もし $T=U|T|, 0\le A,B, \|Tx\|\le\|Ax\|, \|T^*y\|\le\|By\|, \quad \forall x,y\in\mathcal{H}$ ならば $\quad |\langle Uf(|T|)g(|T|)x,y\rangle|\le\|f(A)x\|\|g(B)y\|, \quad \forall x,y\in\mathcal{H}$ が成り立つ。

[証明] 仮定より $f(a)g(a)>0$ となる $a\in(0,\infty)$ が存在する。そこで開区間 (c,d) を a を含み

$$0<f(t),g(t), \quad \forall t\in(c,d)$$

となる最大の開区間とする。まず f,g は (c,d) で semi-operator monotone であることを示す。

関数 $\tilde f(t)=\{f(t^{\frac12})\}^2, \tilde g(t)=\{g(t^{\frac12})\}^2,\ t\in(c^2,d^2)$ を考える。さて $C\le D, \sigma(C), \sigma(D)\subset(c^2,d^2)$ とする。すると $C, D, g(C^{\frac12})$ は可逆であ

る。$T=C^{\frac{1}{2}}, A=D^{\frac{1}{2}}, B=C^{\frac{1}{2}}$ として条件 9 を用いると

$$\begin{aligned}\|f(D^{\frac{1}{2}})x\|\|g(C^{\frac{1}{2}})y\| &\geq |\langle f(C^{\frac{1}{2}})g(C^{\frac{1}{2}})x, y\rangle| \\ &= |\langle f(C^{\frac{1}{2}})x, g(C^{\frac{1}{2}})y\rangle|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\|f(C^{\frac{1}{2}})x\| \leq \|f(D^{\frac{1}{2}})x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

であるから

$$\tilde{f}(C) = \{f(C^{\frac{1}{2}})\}^2 \leq \{f(D^{\frac{1}{2}})\}^2 = \tilde{f}(D)$$

となって $f(t)$ は semi-operator monotone on (c,d) である。$g(t)$ も同様である。

次に $c=0, d=\infty$ を示す。もし、$d<\infty$ なら $f(d)=0$ or $g(d)=0$ である。しかし、f, g は正で semi-operator monotone on (c,d) であるから $0<f(d)$ and $0<g(d)$ である。これは矛盾である。

次に $0<c$ とする。すると $f(c)=0$ or $g(c)=0$ である。この場合は $f(0)g(0)=0$ である。なぜなら $f(0)g(0)>0$ とすると前半の議論から

$$f(t)>0, g(t)>0, \quad \forall t \in (0,\infty)$$

となるからである。ここで

$$A=B=\begin{pmatrix}\sqrt{2}c & 0 \\ 0 & c\end{pmatrix}, \quad T=\frac{2c}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

とおくと $0 \leq A, B, T$ で $T^2 \leq A^2 = B^2$ である。そこで $x=y=\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$ に対して条件 9 を用いると

$$\langle Uf(|T|)g(|T|)x, y\rangle = \frac{1}{2}f\left(\frac{2c}{\sqrt{3}}\right)g\left(\frac{2c}{\sqrt{3}}\right) \neq 0,$$

$$\|f(A)x\|\|g(B)y\| = \left\|\begin{pmatrix}0 \\ f(c)\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}0 \\ g(c)\end{pmatrix}\right\| = 0$$

となって矛盾である。

[系 13] 連続関数 $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は

$$f(t)g(t) = t, \quad \forall t \in (0, \infty)$$

を満たすとする。もし f, g が次の条件 14 を満たせば f, g は semi-operator monotone on $(0, \infty)$ である。

[条件 14] もし $T \in B(\mathcal{H}), 0 \leq A, B \in B(\mathcal{H}), \|Tx\| \leq \|Ax\|, \|T^*y\| \leq \|By\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$ ならば

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \|f(A)x\|\|g(B)y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

が成り立つ。

参考文献

[1] J. S. Aujla, *Perturbation bounds for certain operator functions,* Math. Inequal. Appl., **4** (2001), 609–617.

[2] J. I. Fujii and M. Fujii, *An analogue to Hansen's theory of generalized Löwner's functions,* Math. Japonica, **35** (1990), 327–330.

[3] T. Furuta, *An extension of the Heinz-Kato theorem,* Proc. Amer. Math. Soc., **120** (1994), 785–787.

[4] E. Hansen and G. K. Pedersen, *Jensen's inequality for operators and Löwer's theorem,* Math. Ann., **258** (1982), 229–241.

[5] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,* Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

[6] T. Kato, *Notes on some inequalities for linear operators*, Math. Ann., **125** (1952), 208–212.

[7] M. Uchiyama, *Further extension of the Heinz-Kato-Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (1999), 2899–2904.