

# Riemann 多様体上の非圧縮流体の幾何

三松 佳彦 (中央大学・理工学部)  
矢野 泰久 (宮崎県立都農高等学校)

## -1 序の前に

完全流体 (非圧縮・非粘性流体) の運動を記述する Euler 方程式は compact な Riemann 多様体の上でも Arnol'd により同様の形で成立することが示されている。一方、非圧縮流体が粘性を伴う場合の運動方程式は Navier-Stokes 方程式の名前でよく知られ、多くの (応用) 解析的研究がなされており、1 億円の懸賞がかけられた問題も有名である ([K] 参照) が、Riemann 多様体上で Navier-Stokes 方程式が正確に記述されたのは意外に最近のことらしく、M. E. Taylor [T1] (1992) によるようである ([T2] も参照されたし)。実は筆者たちは流体力学については全くの素人で、この Taylor の仕事を知らなかった。Arnol'd らによる微分位相幾何学的な流体力学の教科書 [A1] にも多様体上の Navier-Stokes 方程式には殆ど触れていない。自然にそれを求めてみたくなり、結果的には、恐らく Taylor と全く同じような思考のもとに同様な方法によって同じ結論に達した。ここではこれらについての報告をする。従って内容は新しい結果ではなく、Taylor の仕事の解説等ということになる。

東北大の長澤壯之氏には Taylor の仕事と Navier-Stokes 方程式の (弱) 解の構成などに関する氏のお仕事などについてご教示頂きました。この場を借りて改めてお礼を申し上げます。児玉大樹氏 (東大・数理) には viscosity (粘性摩擦) の本質を探るための多くの示唆的考察を提供して頂き、増田一男氏 (東工大・理) には微分幾何の計算の示唆を受けました。また、木村芳文氏 (名古屋大・多元数理) は 2000 年 12 月第 17 回 ENCOUNTER with MATHEMATICS “流体力学—ぐるぐるぎりぎりの流体数学” に於いて、集会の organize のみならず、Navier-Stokes 方程式についての大変素晴らしい入門的講義をして頂きました。以上の方々への感謝の意をここに表します。

本稿の内容は、第二著者の修士論文 [Y] とその後の発展をまとめたものでもある。

## 0 序

本稿では、閉 Riemann 多様体上の非圧縮流体の運動方程式の記述と、その背後の幾何的構造を考察するのだが、何故 “閉 (= compact かつ境界が無い)” なのか? そうでなくて

も良いのか?という問題は、保存則等の最初におく物理的仮定?をどう数学的に捉えるかということにも関連しており、以外と奥が深いようである。

ここではポテンシャル等の外力は考えない。流体も均一なものしか考えない。実際筆者たちが興味を持っているのは現実を反映する物理学ではなくその幾何的な側面である。我々にとっての元々の動機は3次元多様体のトポロジーとその上の非圧縮流の関係にあった。そういう分野では“発散のないベクトル場”と呼ぶ。特にこれらの asymptotic linking なる概念に強い興味を持っている。これは流体物理の世界では“helicity”という名で呼ばれる概念である。本稿ではこの方面には立ち入らないが、asymptotic linking と3次元多様体上の接触構造や葉層構造論との一つの関わりについては [M] に述べられている。

本稿の内容を簡単にまとめてみると以下のようになる。閉 Riemann 多様体上での粘性のない完全流体の方程式 (所謂 Euler 方程式) は Arnol'd [A1], [A2], [AK] により得られている (Ebin-Marsden [EM] も参照されたし)。釈迦に説法の観はあるが、本稿では先ずその導出の考え方を簡単に復習してみる (§1)。

次に Killing ベクトル場を初期条件におくと Euler 方程式の定常流が得られることを観察する (§1)。

ここまで分かると、Navier-Stokes 方程式を書き下したくなる。何故ならば、Killing ベクトル場=無限小等長変換においては流体があたかも凍りついているようなものだから、粘性摩擦が起こり得ず、Euler 方程式で定常流なら Navier-Stokes 方程式でも定常流になる筈だからである。(方程式さえ書ければ定理が待っている?)

そこで粘性項を書き下そうとするのだが、Euler 方程式の場合、空間変数による微分を Riemann 接続による共変微分として解釈し直せば、euclid 空間上での Euler 方程式がそのままの形で Riemann 多様体上での Euler 方程式になる。Navier-Stokes 方程式の場合、その中の Euler 方程式の部分 (即ち空間変数についての1階微分の項) は同様でよいが、粘性項の Laplacian を雑に解釈しようすると不都合 (Killing ベクトル場の場合に粘性項が必ずしも消えない) が生じる。この事態を冷静に観察すると、euclid 空間上でも粘性項はどうやら粘性摩擦自体はうまく表しておらず、その結果生じた力だけを記述していることに気づく。従って、その背後の幾何的メカニズム (実は粘性摩擦そのもの) を調べる (§3) ことにより Riemann 多様体上での粘性項を書き下すことができるようになる (§4)。Navier-Stokes 方程式は運動方程式ではあるが、粘性摩擦は記述していないことに注意しなければならない。このことを象徴する簡単な例も幾つか考えてみたい (§2)。

記号:  $M$ :  $n$  次元コンパクト Riemann 多様体,

$$\mathcal{X}(M) = \{M \text{ 上の } C^\infty \text{ ベクトル場}\},$$

$$\mathcal{X}_d(M) = \{X \in \mathcal{X}; \operatorname{div}(X) = 0\},$$

- $\nabla$  : 接束  $TM$  (適宜余接束  $T^*M$  と同一視) の Riemann 接続,  
 $\Delta$  : 関数に作用する Laplacian,  
 $\Delta^f = d\delta + \delta d$  : (1 階の) 微分形式に作用する Laplacian,  
 $\Delta^s = -\nabla^* \nabla$  : (1 階の) 微分形式に作用する Bochner's Laplacian,  
 $\mathcal{G} = \text{Diff}(M, d\text{vol}) =$  体積要素  $d\text{vol}$  を保つ  $M$  の微分同相のなす群,  
 $\mathfrak{g} = \mathcal{X}_d(M)$  :  $\mathcal{G}$  の Lie 環,  
 $(X, Y)_x$  : 多様体  $M$  上の各点  $x$  における接ベクトル同士の内積,  
 $\langle X, Y \rangle = \int_M (X, Y)_x d\text{vol}(x)$  :  $\mathfrak{g}$  の内積、即ち  $\mathcal{G}$  の右不変 Riemann 計量  
 $\flat : \mathcal{X} \rightarrow \Omega^1$  : Riemann 計量による同一視 i.e.,  $X^\flat(\cdot) = (X, \cdot)$   
 $\flat : \mathcal{X}_d \rightarrow \Omega^1/d\Omega^0$  : 上を制限したもの

## 1 非粘性流体 : Euler 方程式

流体の方程式は、各流体粒子の運動に対する運動方程式としてではなく、速度場  $X(t)$  の時間微分に関する方程式として表すのが普通である。 $\mathbb{R}^n$  上での所謂 Euler 方程式は、圧力関数  $p$  と  $X$  の連立方程式として

$$\frac{dX}{dt} = -\nabla_X X - \text{grad} p, \quad \text{div} X(t) = 0$$

と表される。しかし、我々は幾何学者なので、 $X(t) \in \mathcal{X}_d$  として  $\mathcal{X}_d$  上の方程式 (ベクトル場) と考え、第 1 式のみを以て Euler 方程式と呼ぼう。 $\mathbb{R}^n$  上では運動量保存則とエネルギー保存則から導くことができる。

一方、通常、多様体上では '運動量保存' の解釈に困難がある (異なる点の接空間を標準的に同一視する方法がない) ようなので、何らかの別の原理を認めて使わねばならない。(但し、筆者はこの困難についてはよく考えてみるべきだと思っている。それについては後に述べるつもりである。)

### 1.1 Euler-Poincaré 方程式

Arnol'd は [A1], [A2] において、剛体の回転運動を記述する Euler-Poincaré 方程式を Riemann 多様体  $M$  の体積要素を保つ微分同相の群  $\mathcal{G}$  に適用することにより Euler 方程式を得ている。そこで先ず  $\mathbb{R}^3$  の原点に重心を固定された 3 次元の剛体の回転運動の運動方程式を思い出してみる。

剛体の回転 (位置) は  $G = SO(3)$  の元によって記述される。つまり回転運動は  $SO(3)$  内の曲線  $\gamma(t)$  として表される。従って (角) 速度ベクトルは素材には  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}G$  であるが、その瞬間に起こっている原点を通るある軸周りの無限小回転運動として捉えようとすれば、 $\omega_s = \dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t)^{-1} = R_{\gamma^{-1}*} \dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{so}(3)$  がそれを与える。一方、座標軸を最初から剛体にへばりつけておくと、即ち、剛体に乗っかっている人から見れば、角速度ベク

トルは  $\omega_c = \gamma(t)^{-1} \cdot \dot{\gamma}(t) = L_{\gamma^{-1}*} \dot{\gamma}(t) \in so(3)$  で与えられる。前者を空間座標、後者を剛体座標による角速度ベクトルという。これらは勿論 adjoint により  $Ad_\gamma \omega_c = \omega_s$  という関係にある。

剛体座標では各軸回りの慣性モーメントにより Lie 環  $so(3)$  に左不変な内積  $\langle, \rangle$  が定まる。即ち、 $m_c = A(\dot{\gamma}(t)) = \langle \dot{\gamma}(t), \cdot \rangle \in so(3)^*$  が剛体座標での角運動量、 $E = \frac{1}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$  が運動エネルギーである。空間座標での角運動量は勿論  $m_s = Ad_{\gamma^{-1}}^* m_c$  で与えられ、これを ( $A^{-1}$  を使わず)  $\mathbb{R}^3$  の普通の内積を使ってもう一度  $so(3)$  の元と見なしたものが実際の幾何的な角運動量に他ならない。

外力が無いので運動は角運動量保存則に従い、それは運動方程式を与える。勿論、これは空間座標で見た方が分かり易く、

$$\frac{dm_s}{dt} = 0$$

という至って簡単な式で与えられる。これを adjoint の関係を使って書き直すと Euler-Poincaré 方程式

$$\frac{dm_c}{dt} = ad_{\omega_c}^* m_c$$

を得る。更にこれは、

$$\langle [\xi, \eta], \zeta \rangle = \langle B(\zeta, \xi), \eta \rangle$$

によって定まる Lie 環  $so(3)$  上の双線形形式  $B : so(3) \times so(3) \rightarrow so(3)$  を用いると、容易に Lie 環の上の運動方程式に書き換えることができる。即ち；

$$\frac{d\omega_c}{dt} = B(\omega_c, \omega_c)$$

以上は、Lie 群  $G$  に左不変な Riemann 計量  $\langle, \rangle$  を与えればいつでもできる。(但し、以下で流体力学に応用するときは、色々な記法の慣習に馴染みやすいので、左不変と右不変を入れ替える。) コンパクトな Riemann 多様体  $M$  に対し、無限次元 Lie 群  $\mathcal{G}$  とその Lie 環  $\mathcal{X}_d$  についてこれをこの方程式を適用してみる。  $X, Y \in \mathcal{X}_d$  に対し、Riemann 接続の対称 (torsion free) 性より  $\langle B(X, X), Y \rangle = \langle [X, Y], X \rangle = \langle \nabla_X Y, X \rangle - \langle \nabla_Y X, X \rangle$  と表示し、 $M$  上での積分を考えれば第2項は0、第1項は  $-\langle \nabla_X X, Y \rangle$  に置き換えられる。従って、任意の  $Y \in \mathcal{X}_d$  (注意!  $\forall Y \in \mathcal{X}$  ではない!!) に対して、

$$\langle B(X, X), Y \rangle = -\langle \nabla_X X, Y \rangle$$

が得られる。これは、 $\mathcal{X}_d$  の任意の元、即ち、任意の非圧縮流  $X$  に対して Lie 環  $\mathcal{X}_d$  内の Euler-Poincaré 方程式が、適当な (定数の差を除いて一意的に決まる) 圧力関数  $p$  により

$$\frac{dX}{dt} = -\nabla_X X - \text{grad } p$$

と表されることを意味する。 $-grad p$  を付加することは内積  $\langle, \rangle$  に関する  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{X}_d$  への直交射影に他ならず、無限次元で双対を経由したことの代償である。より具体的には

$$-p = grad^{-1}(\nabla_X X) = \Delta^{-1}(div \nabla_X X)$$

に他ならない。

## 1.2 その他の記述法

一般に Lie 群  $G$  とその上の左不変な Riemann 計量に対し、左不変な Lagrangian  $L$  を与えると、 $G$  上の質点の運動  $\gamma(t)$  を記述する Euler-Lagrange 方程式や Lagrangian  $L$  による変分原理自体を、単位元の接空間 (即ち Lie 環  $\mathfrak{g}$ ) 上に reduce できる。即ち、 $G$  上の質点の運動  $\gamma(t)$  を  $\mathfrak{g}$  上の運動  $\omega(t) = L_{\gamma(t)^{-1}}\dot{\gamma}(t)$  に書き換えると、Lagrangian  $l = L|_{\mathfrak{g}}$  による変分原理として同値な結果が得られる。これは系の左不変性から当然の帰結である。ここで  $\mathfrak{g}$  上で書いた Euler-Lagrange 方程式を元来 Euler-poincaré 方程式と呼んだ (のだと思う)。(これらの一般論については Marsden-Ratiu の教科書 [MR] に解説されている。)

剛体運動の場合も、閉 Riemann 多様体上の完全流体の場合も、 $L = -$  運動エネルギーとした場合に他ならない。(但し既に注意したように、流体力学の場合は '右不変' から始める。)

一方、Hamilton 系としての記述もできる。よく知られているように、Lie 環の双対  $\mathfrak{g}^*$  には Lie-Poisson 構造と呼ばれる Poisson 構造が入り、これの symplectic 葉は coadjoint orbit に他ならない。運動エネルギーを Hamiltonian としてこの Poisson 構造での Hamilton の運動方程式を書き下せば、それが (角) 運動量  $m_c \in \mathfrak{g}^*$  の運動方程式に他ならない。

更に次のように考えることもできる。剛体の場合は配位空間を  $G = SO(3)$  として考えたように、流体力学の場合も速度場ではなく流体の流れ自体を微分同相  $\gamma(t) \in G$  として考えると、Euler 方程式は、右不変計量  $\langle, \rangle$  をもつ無限次元多様体  $G$  の測地流を与えているに他ならない。但し、ここでは少し注意が必要で、 $G$  が無限次元なので位相的にかなり非完備であり、測地流といってもそれを生成するベクトル場が与えられているだけである。『この測地流がベクトル場として完備である』と主張することは『Euler 方程式は任意の初期条件に対して時間大域解を持つ』と主張することに他ならないからである。

(角) 運動量保存を Lie 環の言葉で述べて  $\mathcal{X}_d$  に移し替えても、運動エネルギーをもとにした変分原理によっても、微分同相を質点と考えて質点の運動の古典的な記述をしても結論は総て一致する。流体力学の場合、 $G$  の非コンパクト性、無限次元性、非完備性に

より、本当の意味での保存量は運動方程式を書くのに十分なほどには存在しないが、理論形式だけは適用することができた。この裏には多様体上の質点の運動についても拡張された意味の運動量保存があつて、以上で見たことはそれから導かれる、と考えるのが自然のように思われる。

### 1.3 Euler 方程式の定常解

$X = X(0) \in \mathcal{X}$  の軌道が総て測地線であれば  $\nabla_X X = 0$  であるから  $p = 0$  として  $X$  は定常解となる。例えば、標準的な計量を持つ  $T^3$  上のベクトル場  $X = f(z)\frac{\partial}{\partial x} + g(z)\frac{\partial}{\partial y}$  (但し、 $f(z), g(z)$  は勝手な  $z$  だけの関数) がそうである。

閉 Riemann 多様体の単位接球面束上の測地流は、底空間の Riemann 接続から決まる全空間の標準的計量に関して任意の軌道が測地線となる。双曲空間の測地流は特に Anosov 流となることで知られているが、測地流ではない Anosov 流の中にもそのようなクラスがある。 $T^2$  に  $A \in SL(2; \mathbb{Z})$  (但し  $\text{tr } A > 2$ ) を作用させ、mapping torus として得られる 3次元多様体  $M = T^2 \times_A S^1$  上に suspension に沿ったベクトル場を定義するとよく知られた Anosov 流が得られる。これも、 $M$  の Riemann 計量を然るべくとれば総ての軌道が測地線となる。

もう一つ定常解を与える流れのクラスがある。

**定理 1.1**  $X = X(0) \in \mathcal{X}$  が Killing ベクトル場であれば  $p = \frac{1}{2}(X, X)$  として Euler 方程式の定常解を与える。

これは 2通りの方法で証明できる。第一の方法 ([Y]) では、上で触れた Euler-Poincaré の方程式の右辺  $B(X, X)$  を  $\mathcal{X}_d^*$  上で直接計算すると直ぐに  $B(X, X)^b = 0$  を得る。このとき、これを  $\mathcal{X}_d$  上に戻すと、 $p = \frac{1}{2}(X, X)$  であることも解る。

運動エネルギー密度  $p = \frac{1}{2}(X, X)$  は勿論  $X$  の第一積分の一つだから、その臨界点集合も流れで保たれる。そこでは  $\nabla_X X = 0$  ということになるので、次の微分幾何ではよく知られた事実が系として得られる。

**系 1.2** 閉 Riemann 多様体上の Killing ベクトル場には測地的軌道が存在する。

定理の第二の証明では、この系の普通の微分幾何的な証明をもとにする。Riemann 接続が (i) 対称であること、(ii) 計量と両立していること、および、Killing ベクトル場による Riemann 計量の Lie 微分が消えることにより次の重要な基礎事実が容易に示せる。

**補題 1.3** “ベクトル場  $X$  が Killing”  $\Leftrightarrow$  “ $\nabla_X : TM \rightarrow TM$  は交代テンソル”

これは粘性流体の粘性摩擦を考察するのにも重要な基礎となる。これより直ぐに、Killing ベクトル場  $X$  に対して “ $\text{grad}_{\frac{1}{2}}(X, X) = -\nabla_X X$ ” が判り、特に “ $p = \frac{1}{2}(X, X)$  (= 運動エネルギー汎関数)” として定理と系を得る。

## 2 $\mathbb{R}^n$ 上の Navier-Stokes 方程式と例

$\mathbb{R}^n$  上の粘性流体の運動を表す Navier-Stokes 方程式は次のように記述される。

$$\frac{dX}{dt} = -\nabla_X X - \text{grad} p + \nu \Delta X$$

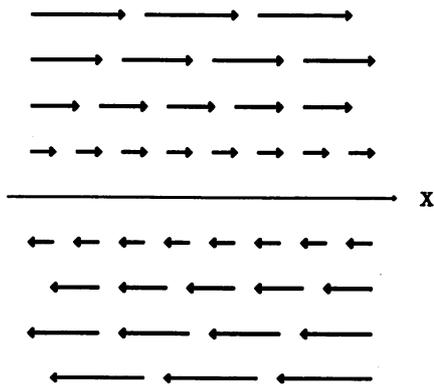
$\nu$  は動粘性率、又は粘性係数などと呼ばれ、 $\Delta$  はベクトル場の各成分に普通の Laplacian として作用する。つまり、[Navier-Stokes 方程式の右辺] = [Euler 方程式の右辺] + [粘性項] となる。以下面倒なときは  $\nu = 1$  とすることもある。

Riemann 多様体上の Navier-Stokes 方程式を書き下すために、 $\mathbb{R}^n$  上での Navier-Stokes 方程式の粘性項の Laplacian を適当に解釈すればよいのではないかと想像されるが（実際、Taylor [T1] 以前にはそう考えられていたふしもある）、実は余りうまくいきそうにない。直ぐに思いつくのはベクトル場を Riemann 計量により 1 階の微分形式と見なして微分形式に対する Laplacian  $\Delta^f = d\delta + \delta d$  で代用する、若しくは、Bochner 型 Laplacian  $\Delta^s = -\nabla^* \nabla$  で代用するというものである。然し乍ら、例えば、前者の場合、2 次元以上の球面などの 1 次元コホモロジーの消えている多様体では調和 1 形式が 0 しかないので、Killing ベクトル場もないことになってしまう。後者の場合は Killing ベクトル場は平行なベクトル場のみという結論に至り、やはり不整合である。第 2 筆者の修士論文においては実験的な計算により Bochner 型 Laplacian を Ricci 作用素で補正すると良いのではないかと予想しており、実際それは正しい。

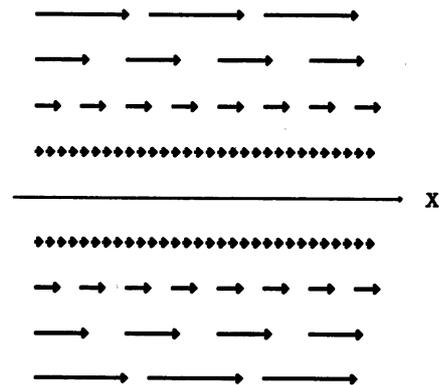
その議論は次節以降に譲り、ここでは  $\mathbb{R}^2$  上での Navier-Stokes 方程式の解の具体例により基礎的な問題点を観察してみる。元々  $\mathbb{R}^n$  上では余り深く考えなくても運動方程式（粘性項）が求まってしまったことがかえって良くなかったのではないかと想像される。

**例 2.1**  $\mathbb{R}^2$  上の Navier-Stokes 方程式を、初期条件  $X(0) = y \frac{\partial}{\partial x}$  に対して解いてみる。係数が 1 次関数であること、各流線が測地線であることなどから、これは定常解である。然し乍ら、この流体に粘性摩擦が生じていない筈がない。にもかかわらず、粘性による力は働いていない。各点ごとのエネルギー散逸も方程式の右辺からは判らない。

**例 2.2** 今度は初期条件を  $X(0) = y^2 \frac{\partial}{\partial x}$  としてみる。解は、容易に判るように  $X(t) = (y^2 + 2\nu t) \frac{\partial}{\partial x} = X(0) + 2\nu t \frac{\partial}{\partial x}$  となる。粘性力が常に一様に  $x$ -軸方向に  $2\nu$  の大きさに働いている。然し乍ら、後で判るように、 $x$ -軸上では粘性摩擦は生じていない。



例 2.1



例 2.2

この様に、粘性摩擦が起こる場所と粘性力が働く場所は一致しない。Navier-Stokes 方程式の粘性項は粘性力しか記述していないからである。粘性により運動エネルギーも輸送されている。上の例では、全運動エネルギーは無限大で、例 2.1 では粘性による力は生じていないにも拘わらずどこでも一様にエネルギーが散逸している。これは  $y \sim \pm\infty$  から  $y = 0$  に向かってエネルギーが輸送されているからであるが、

粘性流体の運動を理解するには、やはり粘性摩擦そのものをしっかり理解する必要があるようで、またそれによるエネルギー散逸も重要であろう。それを幾何的に理解しないと Riemann 多様体上で粘性項を記述することができそうにない。次節からはそれを試みる。

### 3 粘性摩擦とエネルギー散逸

#### 3.1 粘性摩擦の発生

流体に粘性摩擦が生じる原因は、流体粒子間の距離が変化すること、即ち、速度場が Killing ベクトル場でないことによると考えられる。

先ず、流体粒子の大きさなどは不問に付して考えてみる。何れ、幾何としての仮想的な流体力学に興味を持っているので、現実のことは考えず、最終的には極端に理想的な状況を考えることになる。

例えば次のようなバネ・モデルを考えてみる。適当な距離にある粒子同士はバネで結ばれているとする。即ち、バネには粒子間距離による potential を想定する。非等長な流れによりある時刻に良い距離関係 (potential をの意味で安定な距離) にあった粒子同士の距離が離れていったとする。その粒子間の potential は取りあえず上がるが、距離がもっと離れるとバネが切れてしまい、近くにきた別の粒子とのバネの組み替えが起こる。このときのびきったバネの potential が解放されて運動エネルギーに変換されるべきだ (超微視的に見るとそうなっているかも知れない) が、流体が非圧縮なので、余り勝手に動け

ない。つまり、流体の（非）圧縮性が観測されない程度の超微視的レベルでの振動エネルギー（即ち熱）に変換されて（そのうち熱も放射され）失われてしまう。バネが縮むときも同様のことが考えられる。

以上のプロセスは、我々が幾何的な理想的流体力学を目指す以上、実際に見える、または、計算しなければいけないような空間的スケールで起こってはいけない。即ち、“超準解析に於ける無限少量”のスケールで起こっている、と考えるのが妥当と思われる。従って、特に、これらに関する計算は多様体の曲率などは一切無視してよく、ユークリッド空間、若しくはその点に於ける接空間内での計算として宜しい。

まとめてみると、流体の流れが等長変換で無い分、バネ potential が必ず熱エネルギーとして散逸し、流体の運動としては運動エネルギーを失っていく。これが粘性摩擦である。然らば、流体の速度場  $X$  に対してそれが Killing ベクトル場からどれだけ遠いかを測れればよいことになる。補題 1.3 をもう一度思い出してみよう。

**補題 3.1** “ベクトル場  $X$  が Killing”  $\Leftrightarrow$  “ $\nabla X : TM \rightarrow TM$  は交代テンソル”

そこで、 $X \in \mathcal{X}$  に対して

$$SX := \nabla X \text{ の対称部分}$$

$$AX := \nabla X \text{ の交代部分}$$

とおく。勿論、“ $X$  が Killing  $\Leftrightarrow AX = 0$ ”である。ここで、 $X \in \mathcal{X} = \mathfrak{X}(TM)$  に対してその共変微分  $\nabla X$  は  $\Gamma(TM \otimes T^*M)$  の切断であるが、計量により  $T^*M$  と  $TM$  を同一視することにより  $\nabla X, SX, AX$  は  $\Gamma(TM \otimes TM)$  の元と考えている。

**定義 3.2**  $\nu$  を動粘性率として、 $\nu \cdot SX$  を（速度場  $X$  を持つ）非圧縮流体の粘性摩擦 (viscosity friction) と呼ぶ。

**例 3.3** (1) 前節の例 2.1 のベクトル場  $X = y \frac{\partial}{\partial x}$  に対しては

$$\nabla X = \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy \cong \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y}$$

$$SX = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy + \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有分解: } \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{固有値 } \frac{1}{2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{固有値 } -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(1) 前節の例 2.2 のベクトル場  $X = y^2 \frac{\partial}{\partial x}$  に対しては

$$\nabla X = 2y \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy \cong 2y \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y}$$

$$SX = y\left(\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy + \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx\right) = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有分解: } \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{固有値 } y \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{固有値 } -y \end{cases}$$

$SX$  は  $X$  の各点に於ける並進成分と回転成分を取り除いたものを表すに他ならない。上の例では、直感的には粘性摩擦が  $x$ -軸と平行に生じるように感じるかも知れない（実際粘性力はそうである）が、固有分解で解る通り、粘性摩擦自体はそうではなく、本質的な伸び縮みの方向を示している。

### 3.2 粘性によるエネルギー散逸

さて、速度場  $X$  の各点に於ける粘性摩擦  $SX$  からそれによるエネルギー散逸を計算しよう。即ち、 $SX$  の各点に於けるノルムを然るべく与えることに他ならない。（以下しばらくは、面倒なので動粘性率  $\nu = 1$  とする。）

与えられた点  $P$  において接空間  $T_P M$  に  $SX$  を対角化する正規直交座標  $(x_1, \dots, x_n)$  を与える。そこで  $SX = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$  とすれば、 $SX$  が生成する流れは  $\sigma = \sum a_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  であって、これが点  $P$  において  $X$  から並進成分と回転成分を取り除いた線形部分に他ならない。バネ・ポテンシャルは何れ半径にしか依らないのだから、各半径  $d$  の球面上  $S^{n-1}(d)$  でのバネ・ポテンシャルに対する流れの仕事率は定数倍を無視すると

$$S^{n-1}(d) \text{ 上での仕事率} = \text{定数} \times \int_{S^{n-1}(d)} (\sigma, \mathbf{n})^2 d\text{vol}$$

となる。但しここで、 $\mathbf{n}$  は球面の外向き単位法ベクトルである。これを更に半径  $d$  について積分したものがこの点  $P$  におけるエネルギー散逸率（密度）である。積分は更に定数倍を無視すれば半径に依らず

$$\int_{S^{n-1}(d)} (\sigma, \mathbf{n})^2 d\text{vol} = \int_{S^{n-1}(d)} \left(\sum a_i x_i\right)^2 d\text{vol} = a_i \text{ 達の対称 2 次式}$$

となる。対称 2 次式の空間は  $s_2 = \sum a_i^2$  と  $\sigma_2 = \sum_{i < j} a_i a_j$  とで張られるが、いま、流体が非圧縮であるため  $\sigma_1 = \sum a_i = \text{div} X = 0$  なので、正の定数倍をのぞいてこの二つは一致し、

$$U_P = \text{点 } P \text{ における仕事率} = \text{定数} \times \sum a_i^2 = \text{定数} \times \|SX_P\|^2$$

となる。 $\|SX_P\|$  は正規直交基底による  $SX_P$  のふつうの 2 乗ノルム（作用素としての 2 乗ノルム）で、正規直交基底の取り方に依らない。これまで無視してきた定数はすべて動粘性率  $\nu$  に取り込むことにする。以上により次が得られたことになる。

命題 3.4  $\nu U = \nu \|SX\|^2$  は各点各時刻に於ける粘性によるエネルギー散逸を与える。

この  $U_P$  は非圧縮流  $X$  によって与えられる  $M$  上の関数となる。

定義 3.5  $\mathcal{X}_d$  上の関数

$$U(X) = \int_M U(X) dvol = \|SX\|_{L^2}^2 = \langle SX, SX \rangle$$

を  $TG$  上の関数とも考え、(無限小) 散逸ポテンシャル, Rayleigh 関数などと呼ぶ。 $TG$  上の関数と考えると、各ファイバー  $T_\gamma G = \mathcal{X}_d$  上の非負 2 次形式である。

注意 3.6 (1) “Rayleigh 関数” という用語は [AKN] に従った。[AKN] では、有限次元の configuration space  $M$  上の質点の運動が、各接空間  $T_x M$  上に定義された非負 (半正定値) 2 次形式の接空間方向の勾配ベクトル場 (の  $-1$  倍) として与えられる力を受ける場合に、その 2 次形式を  $TM$  上の関数と見てそう呼んでいる。質点が空気抵抗などの流体抵抗を (低速で) 受けているような場合が典型例である。その場合、外力のない運動方程式 (Euler-Lagrange 方程式) にこの分の力を付け加えればよい訳だが、その処方箋を無限次元化して  $G$  を配位空間とする力学系と見て同じことをすれば、Navier-Stokes 方程式が求まる。これは次節で見る。

(2)  $U$  の計算で流体が非圧縮であること ( $div X = 0$ ) を使った。この仮定がないとかなり複雑になるようである。つまり圧縮粘性流体の運動方程式の導出ははるかに面倒ということになるらしい。次節でもこの仮定が本質的に使われる場面があるので注意されたし。

## 4 Compact Riemann 多様体上の Navier-Stokes 方程式

一般に、Riemann 多様体上の質点の運動などで、接空間上の 2 次形式で表されるエネルギー散逸を伴う運動は、その接空間での  $-gradient$  を運動方程式に付け加えればよい。このような理論形式の散逸関数を Rayleigh 関数と呼んだのであった ([AKN] 参照)。

我々の場合、配位空間  $G$  上での質点 (=微分同相) の運動として考え、各点 (=微分同相)  $\gamma$  での接空間  $T_\gamma G$  を自然な右移動で  $T_e G \cong \mathcal{X}_d$  と同一視する。Rayleigh 関数  $U(X)$  は、 $U(X) = \int_M (SX, SX)_x dvol(x) = \langle SX, SX \rangle$  により与えられている。これの  $\mathcal{X}_d$  上での勾配ベクトル場を求めればよい。

$X \in \mathcal{X}_d$  において  $Y \in \mathcal{X}_d$  方向の  $U$  の方向微分は

$$(YU)_X = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \langle S(X + \varepsilon Y), S(X + \varepsilon Y) \rangle = 2 \langle SX, SY \rangle$$

であるから、 $S: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM \otimes T^*M)$  の formal adjoint  $S^*$  を用いれば

$$\langle grad_X U, Y \rangle = (YU)_X = 2 \langle S^* SX, Y \rangle$$

となる。ここで、 $S^*SX \in \mathcal{X}_d$  となるかどうか判らない（一般には正しくない）ので、Euler 方程式の導出の最後でも圧力項による補正をしたように  $\langle, \rangle$  について  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{X}_d$  への正射影  $\Pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_d$  を施す必要がある。以上から次が得られた。

**命題 4.1**  $grad_X \mathcal{U} = 2\Pi(S^*SX)$  .

このままでは実用にならないのでもう少し計算してみる。次は実際の計算には有用である。

**注意 4.2 = 演習問題**

(1) 任意の  $X, Y, \in \mathcal{X}$  に対して  $\langle SX, AY \rangle = 0$  . よって特に、 $S^*SX = \nabla^*SX$  .

(2)  $-\nabla^* = \hat{\nabla} := tr \circ (\nabla \otimes \nabla)$  .

但しここで、 $tr$  は以下の作用素の系列の最後のもので、右二つの余接空間  $T^*M \otimes T^*M$  での計量による簡約である。

$$\Gamma(TM) \xrightarrow[\hat{\nabla}^*]{\nabla} \Gamma(TM \otimes T^*M) \xrightarrow{\nabla \otimes \nabla} \Gamma(TM \otimes T^*M \otimes T^*M) \xrightarrow{tr} \Gamma(TM)$$

従って、

**命題 4.3**  $-\mathit{grad}_X \mathcal{U} = 2\Pi(\hat{\nabla} \circ SX)$  .

となる。更に、Weizenböck の公式 ( $\Delta^s X = \Delta^f X + Ric(X)$ ) の証明と同じような計算 (例えば、[KK] を参照されよ) により次がわかる。

**命題 4.4**  $X \in \mathcal{X}_d$  に対し  $2\hat{\nabla} \circ SX = \Delta^s X + Ric(X) = \Delta^f X + 2Ric(X)$  .

これより閉 Riemann 多様体上の Navier-Stokes 方程式が得られる。

**定理 4.5 (閉 Riemann 多様体上の Navier-Stokes 方程式)**

$$\frac{dX}{dt} = -\nabla_X X - \mathit{grad} p_g + \nu(\Delta^s X + Ric(X) - 2\mathit{grad} p_v)$$

ここで、Euler 方程式に現れた圧力は  $p_g$ , 粘性項からきた圧力は  $p_v (= \Delta^{-1} \mathit{div} Ric(X))$  と表した。一緒にして一つの圧力として扱っても差し支えない (が、次の理由により分けてある)。

**注意 4.6** Einstein 多様体では粘性による圧力  $p_v$  は現れない。(実は Einstein であることと同値である。)

任意の  $X \in \mathcal{X}_d$  に対して  $\mathit{div} Ric(X) = 0$  が成り立つことが Einstein であることと同値なのである。一方、更に強く ( $\mathbb{R}^n$  などの) Ricci-平坦な多様体の場合、 $\Delta^f = \Delta^s = 2\hat{\nabla} \circ S$  となり、 $\mathit{div} \circ \Delta^f = \Delta \circ \mathit{div}$  は定義から直ちに従うので、直交射影の必要のないことは簡単に分かる。

系 4.7  $X \in \mathcal{X}_d$  が Navier-Stokes 方程式の定常流であることと  $X$  が Killing ベクトル場であることは同値である。

Killing なら粘性項が消え、Euler 方程式の定常解でもある。一方、Killing でなければ運動エネルギーが散逸し、定常解にはなり得ない。

## 4.1 反省

粘性項を Rayleigh 関数の gradient として求めた。そのために  $M$  上での積分を行った。そのために多様体  $M$  が compact であることを使った。境界がある場合も adjoint operator は境界からの寄与を受けてしまう。

一方、物理的な直観からすれば、粘性項は近傍だけから決まって然るべきではないだろうか？ 実際、adjoint operator も各点ごとに元の operator の jets さえ分かれば計算できるがこのことと同じことであろうか？

その根拠としては、各点においてその周りの小さな support を持つ test function (ベクトル場) に対してだけ計算すれば、adjoint operator を求めるには十分だからである。

ところで、このことは (直交射影のことはさておき)、より一般に non-compact な Riemann 多様体上でも同じ表示で Navier-Stokes 方程式が成立する、ということの意味するのだろうか？ 特に、non-compact でも “完備かつ体積有限” なら直交射影も (それなりに) 定義できるので、方程式が書き下しても不思議はない。

一方、エネルギーの輸送については、Einstein もしくは Ricci 平坦な多様体の場合は直交射影がないので分かりやすそうであるが、一般の場合はどうなるであろう？ おそらく  $-SX \cdot X$  もしくはそれを補正したものが答えとなるはずなのだが。

## 5 補足

Compact な Riemann 多様体上の Euler 方程式と Navier-Stokes 方程式が分かったので、これを用いていろいろな問題を考えることができよう。大別して、 $M$  の (Riemann) 幾何に流体力学を応用してみることに、compact Riemann 多様体上で特徴的な流体力学の問題を考える方向とが挙げられよう。

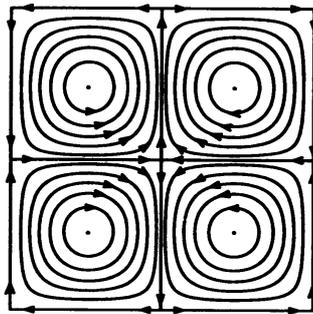
たとえば、Euler 方程式もしくは Navier-Stokes 方程式は無限次元ベクトル空間  $\mathcal{X}_d$  上のベクトル場を与える。これの力学系的考察から  $X$  の幾何の情報が得られるであろうか？ 自明な答えとして N-S 方程式の場合、不動点集合は { Killing ベクトル場 } となる。それ以外のところは大域解の問題も含めどうなるであろう？ 減衰して 0 に近づくと

renormalize して幾何の情報が取り出せるだろうか？

葉層構造  $\mathcal{F}$  などの構造を持つ多様体の場合、たとえば  $\mathcal{X}_d \cap \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$  に制限して考えるとどうであろうか？

但し、一般的に幾何固有の問題より流体力学の方が難しいので、易しい問題に難しい定式化を与えてしてしまう可能性が高い。

解析的な問題も考えてみる。Kolmogorov のエネルギー・カスケードは compact な多様体で考えるとどうであろう。たとえば §1.3 で紹介した代数的 Anosov 流の場合、Euler 方程式の定常解であるが、N-S 方程式に於いては、粘性力は一様に流線方向に発生し、 $X(t) = \exp(-ct)X(0)$  というように、そのままの姿で一様・指数的に減衰していく。このような例は 2 次元でも簡単に作れて、以下の図にあるような  $X(0) = \cos x \cdot \cos y \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \cdot \sin y \frac{\partial}{\partial y}$  を適当な周期の 2 次元トーラス上にとると、やはり、Euler 方程式に対しては定常流で、 $\Delta X = -X$  により 解は  $X(t) = \exp(-\nu t)X(0)$  となる。



このような例で考えると、周波数が多様体の形と合うとエネルギー・カスケードが崩れている。また、粘性が勝って乱流モードになる周波数大域についても、それに相当する空間スケールよりも直径の小さい多様体を考えると、その多様体には乱流しか存在しないような気がするが、動粘性率に対して小さい半径のトーラス上に、更に周期の小さい上の様な例を考えると、あながちそうともいえなくなる。

これらを考察すると、解析的な問題から再び幾何的な問題との関連が起こってくるようである。然し、流体力学についての全くの素人である筆者達はもう筆を置くべきである。

## 参考文献

- [A1] V. I. Arnol'd, Sur la Géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16 (1996), 319–361.
- [A2] V. I. アーノルド, 古典力学の数学的方法, 安藤 韶一, 蟹江 幸博, 丹羽 敏雄 訳, 岩波書店, (1980).

- [AK] V. I. Arnol'd & B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences 125, Springer-Verlag, (1998).
- [AKN] V. I. Arnol'd, V. V. Kozlov, & A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, 2nd ed., Dynamical Systems III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 3, Springer-Verlag, (1988, 1993).
- [EM] D. Ebin & J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Annals of Mathematics, 92 (1970), 102–163.
- [KK] 北原 晴夫 & 河上 肇, 調和積分論, 近代科学社, (1991).
- [K] 小藪 英雄, クレイ数学研究所ミレニアム懸賞問題解説 – Navier-Stokes 方程式, 数学 54-2 (近刊), 岩波書店, (2002).
- [MR] J. E. Marsden & T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, (1994).
- [M] Y. Mitsumatsu, *Linking Pairing, Foliated Cohomology, and Contact Structures*, A brief note for the minicourse in the Conference “Foliations and Geometry 2001” at PUC-Rio, (preprint) (2001) .
- [T1] M. E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*, Commun. P. D. E., 17 9&10 (1992), 1407–1456.
- [T2] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations III, Nonlinear Equations*, Applied Mathematical Sciences 117, Springer-Verlag New York (1996).
- [Y] 矢野 泰久, 『3次元多様体上の Euler 方程式の位相的研究』, 中央大学・理工学研究科 2000年度 修士論文.

Yoshihiko MITSUMATSU, e-mail : yoshi@math.chuo-u.ac.jp

Department of Mathematics, Chuo University, 1-13-27 Kasuga Bunkyo-ku, Tokyo,  
112-8551, Japan