数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 11-18

離散戸田格子系列と直交多項式について

辻本 諭
Satoshi Tsujimoto
(tujimoto@i.kyoto-u.ac.jp)

京都大学大学院情報学研究科
Graduate School of Informatics , Kyoto University

1 はじめに

時間連続の可積分系と直交多項式との関連性は, 今までにも様々な観点から研究がなされてきた. 特に半無限格子上の戸田方程式と直交多項式との関係はよく知られており, いくつもの興味深い結果が与えられている.

本稿では, 特にモーメントの離散パラメータ変形を通し, 双直交多項式の満たす関係式について考察する. そこで, 半無限格子上の離散戸田格子系列を与え, 双直交多項式との関連をみていく. ここでは Kato-Aomoto[1] による 4 項間漸化式を満たす多項式に対する考察も与えている.

まず無限格子上の離散戸田格子系列 [8] を与える. Ueno-Takasaki[9] により導入された演算子

$$W^{(\infty)} = 1 + w_1^{(\infty)} e^{-\partial_s} + w_2^{(\infty)} e^{-2\partial_s} + w_3^{(\infty)} e^{-3\partial_s} + \cdots \tag{1a}$$

$$W^{(0)} = w_0^{(0)} + w_1^{(0)} e^{\partial_s} + w_2^{(0)} e^{2\partial_s} + w_3^{(0)} e^{3\partial_s} + \cdots \tag{1b}$$

を用い, 演算子 $\Delta_{k_n}, \Delta_{l_n}, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n$ を

$$\begin{aligned}
\Delta_{k_n} &= \frac{1}{a_n}(e^{\partial_{k_n}} - 1), \qquad \Delta_{l_n} = \frac{1}{b_n}(e^{\partial_{l_n}} - 1) \\
\mathcal{B}_n &= (\mathcal{L}_n)_{\geq 0}, \qquad \mathcal{C}_n = (\mathcal{M}_n)_{<0} \\
\mathcal{L}_n &= e^{\partial_{k_n}} W^{(\infty)} e^{-\partial_{k_n}} e^{n\partial_s} W^{(\infty)-1} \\
&= e^{n\partial_s} + u_1^{(n)} e^{(n-1)\partial_s} + u_2^{(n)} e^{(n-2)\partial_s} + u_3^{(n)} e^{(n-3)\partial_s} + \cdots \\
\mathcal{M}_n &= e^{\partial_{l_n}} W^{(0)} e^{-\partial_{l_n}} e^{-n\partial_s} W^{(0)-1} \\
&= v_0^{(n)} e^{-n\partial_s} + v_1^{(n)} e^{(1-n)\partial_s} + v_2^{(n)} e^{(2-n)\partial_s} + v_3^{(n)} e^{(3-n)\partial_s} + \cdots
\end{aligned}$$

により定義すると,

$$\Delta_{k_n}\left(W^{(\infty)}\right) = \mathcal{B}_n W^{(\infty)} - e^{\partial_{k_n}} W^{(\infty)} e^{-\partial_{k_n}} e^{n\partial_s} \tag{2a}$$

$$\Delta_{l_n}\left(W^{(\infty)}\right) = \mathcal{C}_n W^{(\infty)} - e^{\partial_{l_n}} W^{(\infty)} e^{-\partial_{l_n}} e^{-n\partial_s} \tag{2b}$$

$$\Delta_{k_n}\left(W^{(0)}\right) = \mathcal{B}_n W^{(0)} - e^{\partial_{k_n}} W^{(0)} e^{-\partial_{k_n}} e^{n\partial_s} \tag{2c}$$

$$\Delta_{l_n}\left(W^{(0)}\right) = \mathcal{C}_n W^{(0)} - e^{\partial_{l_n}} W^{(0)} e^{-\partial_{l_n}} e^{-n\partial_s} \tag{2d}$$

と表すことができる. 差分演算子 A に対し, $(A)_{\geq 0}, (A)_{<0}$ はそれぞれ e^{∂_s} の 0 乗をふくむ正べき部分, e^{∂_s}

の負べきの部分を表す. また (2) 式から離散化された Zakharov-Shabat 方程式

$$
\begin{aligned}
&(1+a_n\mathcal{B}_n(k_m+1,k_n))(1+a_m\mathcal{B}_m(k_m,k_n))\\
&\qquad=(1+a_m\mathcal{B}_m(k_m,k_n+1))(1+a_n\mathcal{B}_n(k_m,k_n))\\
&(1+b_n\mathcal{C}_n(l_m+1,l_n))(1+b_m\mathcal{C}_m(l_m,l_n))\\
&\qquad=(1+b_m\mathcal{C}_m(l_m,l_n+1))(1+b_n\mathcal{C}_n(l_m,l_n))\\
&(1+a_n\mathcal{B}_n(k_n,l_m+1))(1+b_m\mathcal{C}_m(k_n,l_m))\\
&\qquad=(1+b_m\mathcal{C}_m(k_n+1,l_m))(1+a_n\mathcal{B}_n(k_n,l_m))
\end{aligned}
$$

が得られる.

2 半無限戸田格子ヒエラルキー

連続系の場合 [2, 6] を参考にし, 半無限格子上の離散戸田格子系列を, 初期値データからなる半無限行列

$$
m_\infty=\begin{pmatrix}\mu_{00} & \mu_{01} & \mu_{02} & \cdots\\ \mu_{10} & \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots\\ \mu_{20} & \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots\end{pmatrix},\qquad \det|\mu_{ij}|_{0\le i,j\le n}\neq 0
$$

から導出する. $k=\{k_1,k_2,\dots\},l=\{l_1,l_2,\dots\}$ を離散変数として半無限行列 m_∞ の変換を

$$
m_\infty(k,l)\equiv\prod_{n=1}^{\infty}(\Lambda^n-a_nI)^{k_n}\ m_\infty\ \prod_{n=1}^{\infty}((\Lambda^{\mathsf{T}})^n-b_nI)^{l_n} \tag{3}
$$

$$
I=(\delta_{ij})_{i,j\ge0},\ \ \Lambda=(\delta_{i,j+1})_{i,j\ge0} \tag{4}
$$

により定める. これにより $m_\infty(k,l)$ の要素 $\mu_{ij}(k,l)$ は

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu_{ij}}^{k_m}&=\mu_{i+m,j}-a_m\mu_{i,j}\\
\overline{\mu_{ij}}^{l_n}&=\mu_{i,j+n}-b_n\mu_{i,j}
\end{aligned}
$$

の関係式を満たす. (ここで $\overline{f(x)}^{x}=e^{\frac{\partial}{\partial x}}f(x)=f(x+1)$ の記号法を用いた.)

次に, 半無限行列 m_∞ の LU 分解を考える. 行列 m_∞ を下三角行列 S_1^{-1} と上三角行列 S_2 により

$$
m_\infty(k,l)=S_1^{-1}(k,l)S_2(k,l) \tag{5}
$$

と分解する. この際, 下三角行列の対角成分を 1 に決めると分解は一意に決まる. (3) 式を

$$
m_\infty(0,0)=\prod_{n=1}^{\infty}(\Lambda^n-a_nI)^{-k_n}m_\infty(k,l)\prod_{n=1}^{\infty}((\Lambda^{\mathsf{T}})^n-b_nI)^{-l_n}
$$

と変形し,

$$
\begin{aligned}
&S_1(k,l)\prod_{n=1}^{\infty}(\Lambda^n-a_nI)^{k_n-k'_n}S_1^{-1}(k',l')\\
&\quad=S_2(k,l)\prod_{n=1}^{\infty}((\Lambda^{\mathsf{T}})^n-b_nI)^{l'_n-l_n}S_2^{-1}(k',l')
\end{aligned} \tag{6}
$$

を得る．さらに (6) 式をシフト演算子に対する公式

$$\overline{fg}^{k_n} + a_n fg = \overline{f}^{k_n}(\overline{g}^{k_n} - a_n g) - a_n(\overline{f}^{k_n} - f)g$$
$$fg + b_n\overline{fg}^{l_n} = f(g - b_n\overline{g}^{l_n}) - b_n(f - \overline{f}^{l_n})\overline{g}^{l_n}$$

を用いて変形し，$k' \to k, l' \to l$ とすることにより半無限離散戸田格子系列

$$a_n(S_1 - \overline{S_1}^{k_n}) = \mathcal{B}_n S_1 - \overline{S_1}^{k_n}\Lambda^n \tag{7a}$$
$$\overline{S_2}^{k_n} + a_n S_2 = \mathcal{B}_n S_2 \tag{7b}$$
$$S_1 - \overline{S_1}^{l_n} = \mathcal{C}_n\overline{S_1}^{l_n} \tag{7c}$$
$$-(\overline{S_2}^{l_n} + b_n S_2) = \mathcal{C}_n\overline{S_2}^{l_n} - S_2(\Lambda^{\mathsf{T}})^n \tag{7d}$$

が得られる．ここで

$$\mathcal{B}_n = (\overline{S_1}^{k_n}\Lambda^n S_1^{-1})_{\geq 0}, \qquad \mathcal{C}_n = (S_2(\Lambda^{\mathsf{T}})^n\overline{S_2^{-1}}^{l_n})_{<0}$$

とする．

3 双直交多項式

本節では，Adler-Moerbeke[2] に従い，行列の LU 分解から，関連する双直交多項式を導く．さらに前節で得られた半無限離散戸田格子系列を用い，その双直交多項式の満たす関係式のいくつかを与える．

まず半無限行列 $A = (a_{ij})_{i,j\geq 0}$ の LU 分解を与える．ここで $A_n = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq n-1}, \det A_n \neq 0$ とし，A から次のような下三角行列 $S(A)$ と対角行列 $h(A)$ を定義する．

$$S(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ \frac{\tilde{A}_2^{1,2}}{|A_1|} & 1 & 0 & \\ \frac{\tilde{A}_3^{1,3}}{|A_2|} & \frac{\tilde{A}_3^{2,3}}{|A_2|} & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_i^{j,k} = \mathrm{Cofactor}(A_i)_{j,k} \tag{8}$$

$$h(A) = \mathrm{diag}(h_0, h_1, h_2, \cdots), \qquad h_i = \frac{\det A_{i+1}}{\det A_i} \tag{9}$$

これらを用いると A の LU 分解は，

$$A = S^{-1}(A)h(A)(S^{-1}(A^{\mathsf{T}}))^{\mathsf{T}}$$

と表される．また前節の m_∞ の LU 分解 (5) は

$$S_1 = S(m_\infty)$$
$$S_2 = h(m_\infty)(S^{-1}(m_\infty^{\mathsf{T}}))^{\mathsf{T}}$$

である．

次に内積を

$$\langle f, g\rangle = \langle f(z_1)\,g(z_2)\rangle = \int_{\Re^2} dz_1 dz_2 \rho(z_1, z_2) f(z_1) g(z_2),$$

と定義し, モーメント行列 m_n

$$m_n = (\mu_{ij})_{0\le i,j\le n-1} = (\langle z_1^i z_2^j \rangle)_{0\le i,j\le n-1}, \qquad \det|m_n| \neq 0$$

を導入する. このモーメント行列の LU 分解は

$$\begin{aligned} m_\infty &= S_1^{-1} S_2 \\ &= S^{-1}(m_\infty) h(m_\infty) (S^{-1}(m_\infty^{\mathsf{T}}))^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

となる.

次のようなモニックな多項式 $p_i(z, A)$ を考える.

$$p_i(z, A) = \frac{1}{\det A_i} \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & A_i & & z \\ & & & \vdots \\ \hline a_{i0} & \cdots & a_{i,i-1} & z^i \end{array} \right), \qquad p_0 = 1$$

さらに $\chi(z) = (1, z, z^2, \ldots)^{\mathsf{T}}$ を用いると多項式 $p_i(z, A)$ を縦に並べたベクトルは

$$S(A)\chi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ \frac{\tilde{A}_2^{1,2}}{|A_1|} & 1 & 0 & \\ \frac{\tilde{A}_3^{1,3}}{|A_2|} & \frac{\tilde{A}_3^{2,3}}{|A_2|} & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0(z, A) \\ p_1(z, A) \\ p_2(z, A) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

で与えられる. ここで m_∞ から 1 組の多項式を

$$\begin{aligned} P^{(1)}(z_1) &= S(m_\infty)\chi(z_1) = S_1 \chi(z_1) \\ P^{(2)}(z_2) &= S(m_\infty^{\mathsf{T}})\chi(z_2) = h(S_2^{-1})^{\mathsf{T}} \chi(z_2) \end{aligned}$$

により定義する. この多項式 $\{p_i^{(1)}(z_1)\}_{i=0}^\infty$, $\{p_i^{(2)}(z_2)\}_{i=0}^\infty$ は

$$\begin{aligned} h(m_\infty) &= S(m_\infty) m_\infty S(m_\infty^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \\ &= S(m_\infty) \langle \chi(z_1) \chi(z_2)^{\mathsf{T}} \rangle S(m_\infty^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \\ &= \langle P^{(1)}(z_1) (P^{(2)}(z_2))^{\mathsf{T}} \rangle \end{aligned}$$

より, 直交関係

$$\langle p_i^{(1)}, p_j^{(2)} \rangle = h_i \delta_{ij}$$

を有す双直交多項式である. ここで $\langle A \rangle = (\langle a_{ij} \rangle)_{i,j\ge 0}$.

以下では, 双直交多項式 $p_i^{(1)}, p_j^{(2)}$ の満たす関係式を半無限離散戸田格子系列 (7) から導く. (7) 式と

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= \mathcal{B}_n - a_n I \\ \mathcal{L}_n &= \mathcal{C}_n + I \end{aligned}$$

から

$$\overline{S_1}^{k_n} (\Lambda^n - a_n I) = \mathcal{R}_n S_1 \tag{10a}$$

$$\overline{S_2}^{k_n} = \mathcal{R}_n S_2 \tag{10b}$$

$$S_1 = \mathcal{L}_n \overline{S_1}^{l_n} \tag{10c}$$

$$S_2((\Lambda^{\mathsf{T}})^n - b_n I) = \mathcal{L}_n \overline{S_2}^{l_n} \tag{10d}$$

が得られる. ここで

$$\Lambda\chi(z) = z\chi(z)$$

に注意すると, (10a) 式と (10c) 式から $P^{(1)}(z_1)$ に対する関係式

$$(z_1^n - a_n)\overline{P^{(1)}(z_1)}^{k_n} = \mathcal{R}_n P^{(1)}(z_1) \tag{11a}$$

$$P^{(1)}(z_1) = \mathcal{L}_n \overline{P^{(1)}(z_1)}^{l_n} \tag{11b}$$

が得られる. ここで従属変数 $I_i^{(n,j)}, V_i^{(n,j)}$ $(0 \le i, 0 \le j \le n)$ を

$$\mathcal{R}_n = \begin{pmatrix} I_0^{(n,0)} & \cdots & I_0^{(n,n-1)} & 1 & & & \\ & I_1^{(n,0)} & \cdots & I_1^{(n,n-1)} & 1 & & \\ & & I_1^{(n,0)} & \cdots & I_2^{(n,n-1)} & \ddots & \\ & & & \ddots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$= (\overline{S_1}^{k_n}\Lambda^n S_1^{-1})_{\ge 0} - a_n I$$

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ V_1^{(n,1)} & 1 & & & & & \\ \vdots & V_2^{(n,1)} & 1 & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ V_n^{(n,n)} & & & & 1 & & \\ & V_{n+1}^{(n,n)} & & & & 1 & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= (S_2(\Lambda^{\mathsf{T}})^n \overline{S_2^{-1}}^{k_n})_{<0} + I$$

により導入しておく.

また (10b) 式と (10d) 式から, $P^{(2)}(z_2)$ に対する関係式

$$h\mathcal{R}_n^{\mathsf{T}}\, \overline{h^{-1}P^{(2)}(z_2)}^{k_n} = P^{(2)}(z_2) \tag{12a}$$

$$\overline{h\mathcal{L}_n^{\mathsf{T}}}^{l_n} h^{-1}P^{(2)}(z_2) = (z_2^n - b_n)\overline{P^{(2)}(z_2)}^{l_n} \tag{12b}$$

が得られる. ここでも新たな従属変数 $J_i^{(n,j)}, W_i^{(n,j)}$ $(0 \le i, 0 \le j \le n)$ を

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = \begin{pmatrix} J_0^{(n,0)} & & & \\ \vdots & J_1^{(n,0)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ J_n^{(n,n)} & & & \ddots \\ & J_{n+1}^{(n,n)} & & & \ddots \\ & & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix} = h\mathcal{R}_n^{\mathsf{T}}\, \overline{h^{-1}}^{k_n}$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_n = \begin{pmatrix} W_0^{(n,0)} & \cdots & \cdots & W_0^{(n,n)} & & \\ & W_1^{(n,0)} & \cdots & & W_1^{(n,n)} & \\ & & W_2^{(n,0)} & & & \ddots \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix} = \overline{h\mathcal{L}_n^{\mathsf{T}}}^{l_n} h^{-1}$$

により導入する. ここで $J_i^{(n,0)}, W_i^{(n,n)}\quad (i=0,1,2,\ldots)$ はそれぞれ恒等的に 1 である.

$$J_i^{(n,0)} = h_i I_i^{(n,0)} \overline{h_i^{-1}}^{k_n} = h_i (\overline{S_2}^{k_n} S_2^{-1})_{ii} \overline{h_i^{-1}}^{k_n} = 1$$
$$W_i^{(n,n)} = \overline{h_i}^{l_n} V_{n+i}^{(n,n)} h_{n+i}^{-1} = \overline{h_i}^{l_n} h_{n+i} \overline{h_i^{-1}}^{l_n} h_{n+i}^{-1} = 1$$

4 様々な漸化式

ここまでの議論では, 一般のモーメント行列を扱っていたが, 本節では次のような制限条件の下で成立する漸化式について考察する.

$$\overline{\mu_{i,j}}^{k_m} = \overline{\mu_{i,j}}^{l_n}, \qquad a_m = b_n$$

この時,

$$\overline{p_j^{(1)}}^{k_m} = \overline{p_j^{(1)}}^{l_n}, \quad \overline{p_j^{(2)}}^{k_m} = \overline{p_j^{(2)}}^{l_n}$$

が成立. 以下, いくつかの場合に対して具体的に漸化式を求めていく.

- $\overline{\mu_{i,j}}^{k_1} = \overline{\mu_{i,j}}^{l_1}$
  この時 $\mu_{i+1,j} = \mu_{i,j+1}$ より, $\mu_{i,j} = \mu_{i+1,j-1} = \mu_{i+j,0}$ である. 行列 m_∞ は
  $$m_\infty = (\mu_{i+j,0})_{i,j\geq 0}$$
  と表され $(m_\infty)^{\mathsf{T}} = m_\infty, P^{(1)} = P^{(2)}$ である. (11) 式より
  $$(x-a_1)\overline{p_n^{(1)}(x)}^{k_1} = I_n^{(1,0)} p_n^{(1)}(x) + p_{n+1}^{(1)}(x) \tag{13}$$
  $$p_n^{(1)}(x) = V_n^{(1,1)} \overline{p_{n-1}^{(1)}(x)}^{l_1} + \overline{p_n^{(1)}(x)}^{l_1} \tag{14}$$
  が得られる. $\overline{p_n^{(1)}(x)}^{k_1} = \overline{p_{n-1}^{(1)}(x)}^{l_1}$ を用い $\overline{p_n^{(1)}(x)}^{k_1}$ を消去すると $p_n^{(1)}(x)$ に対する三項間漸化式
  $$xp_n^{(i)}(x) = p_{n+1}^{(i)}(x) + \alpha_n p_n^{(i)}(x) + \beta_n p_{n-1}^{(i)}(x) \quad \text{for } i=1,2.$$
  が求まる. ここで (13) 式は Christoffel 変換 [3], (14) 式は Geronimus 変換と呼ばれる.

- $\overline{\mu_{i,j}}^{k_1} = \overline{\mu_{i,j}}^{l_2}$
  この時 $\mu_{i+1,j} = \mu_{i,j+2}$ より, $\mu_{i,j} = \mu_{i-1,j+2} = \mu_{0,2i+j}$ となり
  $$m_\infty = (\mu_{0,2i+j})_{i,j\geq 0}$$
  である. (11) 式と (12) 式より
  $$(z_1-a_1)\overline{p_n^{(1)}(z_1)}^{k_1} = I_n^{(1,0)} p_n^{(1)}(z_1) + p_{n+1}^{(1)}(z_1) \tag{15a}$$
  $$p_n^{(1)}(z_1) = V_n^{(2,2)} \overline{p_{n-2}^{(1)}(z_1)}^{l_2} + V_n^{(2,1)} \overline{p_{n-1}^{(1)}(z_1)}^{l_2} + \overline{p_n^{(1)}(z_1)}^{l_2} \tag{15b}$$
  $$(z_2^2-b_2)\overline{p_n^{(2)}(z_2)}^{l_2} = J_n^{(2,0)} p_n^{(2)}(z_2) + J_n^{(2,1)} p_{n+1}^{(2)}(z_2) + p_{n+2}^{(2)}(z_2) \tag{15c}$$
  $$p_n^{(2)}(z_2) = W_n^{(1,1)} \overline{p_{n-1}^{(1)}(z_2)}^{k_1} + \overline{p_n^{(2)}(z_2)}^{k_1} \tag{15d}$$

得られ, $\overline{p_n^{(1)}(z_1)}^{k_1}$ を消去すると Kato-Aomoto[1] の四項間漸化式

$$z_1 p_j^{(1)}(z_1) = p_{j+1}^{(1)}(z_1) + \alpha_j p_j^{(1)}(z_1) + \beta_j p_{j-1}^{(1)}(z_1) + \gamma_j p_{j-2}^{(1)}(z_1)$$
$$z_2^2 p_{j-1}^{(2)}(z_2) = p_{j+1}^{(2)}(z_2) + \widetilde{\alpha}_j p_j^{(2)}(z_2) + \widetilde{\beta}_j p_{j-1}^{(2)}(z_2) + \widetilde{\gamma}_j p_{j-2}^{(2)}(z_2)$$

の導出がなされた.

ここでさらに条件を課したモーメント行列 Γ

$$\Gamma = (\gamma_{i,j})_{i,j\geq 0};\begin{cases} \bmod (2i+j,3)=0 & \gamma_{ij}=\nu_{2i+j} \\ \bmod (2i+j,3)\neq 0 & \gamma_{ij}=0 \end{cases}$$

を考える. この行列 Γ から得られる多項式を

$$q^{(1)}(z_1) = S(\Gamma)\chi(z_1)$$
$$q^{(2)}(z_2) = S(\Gamma^{\mathsf{T}})\chi(z_2)$$

と定義する. また $I_j^{(3,1:\Gamma)}, I_j^{(3,2:\Gamma)}, V_j^{(6,5:\Gamma)}, \ldots$ は 0 となるため, (11) 式から

$$(z_1^3 - a_3)\overline{q_j^{(1)}}^{k_3} = I_j^{(3,0:\Gamma)} q_j^{(1)} + q_{j+3}^{(1)} \tag{16a}$$
$$q_j^{(1)} = \overline{q_j^{(1)}}^{l_6} + V_j^{(6,3:\Gamma)}\overline{q_{j-3}^{(1)}}^{l_6} + V_j^{(6,6:\Gamma)}\overline{q_{j-6}^{(1)}}^{l_6} \tag{16b}$$

が得られ, $\overline{q_j^{(1)}}^{k_3}$ を消去すると

$$z_1^3 q_j^{(1)}(z_1) = q_{j+3}^{(1)}(z_1) + A_j q_j^{(1)}(z_1) + B_j q_{j-3}^{(1)}(z_1) + C_j q_{j-6}^{(1)}(z_1) \tag{17}$$

となる. (17) 式は, $\mu_n = \nu_{3n}$ とみなすと $p_j^{(1)}(z_1^3)$ に対する 4 項間漸化式とみなすことが可能であり, $p_j^{(1)}, q_j^{(1)}$ の間には

$$q_{3n}^{(1)}(z_1) = p_n^{(1)}(z_1^3)$$
$$q_{3n+1}^{(1)}(z_1) = z_1 p_n^{(1)}(z_1^3)\Big|_{\mu_i \to \mu_{i+1}}$$
$$q_{3n+2}^{(1)}(z_1) = z_1^2 p_n^{(1)}(z_1^3)\Big|_{\mu_i \to \mu_{i+2}}$$

の関係がある. さらに (15a) を用いて

$$(z_1^3 - a_1)\overline{p_j^{(1)}(z_1^3)}^{k_1} = I_j^{(1,0)} p_j^{(1)}(z_1^3) + p_{j+1}^{(1)}(z_1^3) \tag{18a}$$
$$z_1 q_{3j+2}^{(1)}(z_1) = I_j^{(1,0)} q_{3j}^{(1)}(z_1) + q_{3j+3}^{(1)}(z_1) \tag{18b}$$

が得られる. この (16a), (18b) 式は離散 hungry Lotka-Volterra 方程式のラックス・ペアを与えている.

また $q_{3j}^{(2)}$ に対しては

$$z_2^2 q_{3j+1}^{(2)}(z_2) = J_j^{(1,0)} q_{3j}^{(2)}(z_2) + q_{3j+3}^{(2)}(z_2)$$

が導かれる.

- $\overline{\mu_{i,j}}^{k_m} = \overline{\mu_{i,j}}^{l_n}$ 同様な手続きに従うと $m+n+1$ 項間漸化式

$$z_1^m p_{j+n}^{(1)}(z_1) = p_{j+n+m}^{(1)}(z_1) + \alpha_j^{(1)} p_{j+n+m-1}^{(1)}(z_1) + \cdots + \alpha_j^{(n+m)} p_j^{(1)}(z_1)$$
$$z_2^n p_{j+m}^{(2)}(z_2) = p_{j+n+m}^{(2)}(z_2) + \tilde{\alpha}_j^{(1)} p_{j+n+m-1}^{(2)}(z_2) + \cdots + \tilde{\alpha}_j^{(n+m)} p_j^{(2)}(z_2)$$

が得られる.

参考文献

[1] Y. Kato and K. Aomoto, Jacobi-Perron algorithms, bi-orthogonal polynomials and inverse scattering problems, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984)635.

[2] M.Adler and P.V.Moerbeke, String-orthogonal polynomials, string equations, and 2-Toda symmetries, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 50 (1997)241.

[3] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, New York: Gordon and Breach (1978).

[4] R. Hirota and S. Tsujimoto, Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations, J. Phys. Soc. Jpn. 64 (1995)3125.

[5] V. Spiridonov and A. Zhedanov, Discrete-time Volterra chain and classical orthogonal polynomials, J.Phys.A: Math. Gen. 30 (1997)8272.

[6] 高崎金久,「可積分系の世界–戸田格子とその仲間–」共立出版 (2001).

[7] 辻本 諭, 近藤弘一, 離散方程式の分子解と直交多項式, 数理解析研究所講究録 1170 (2000) 1.

[8] S. Tsujimoto, On a discrete analogue of the two-dimensional Toda lattice hierarchy, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 38 (2002)113.

[9] Ueno, K. and Takasaki,K., The Toda lattice hierarchy, in *Group Representa tions and Systems of Differential Equations*, Adv.Stud. in Pure Math., 4, Kinokuniya, Tokyo, 1984, 1–139.