数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 108-111

ホモトピー球面上の自由な S^1 作用について

北田泰彦 (横浜国立大学)

高次元 (5 次元以上) の閉多様体で球面と同じホモトピー型を持つ多様体 (以下ホモトピー球面と呼ぶ) が自由な S^1 作用を持つか否かを決定する問題を次元が $4k+1$ 次元の場合に考える。異種のホモトピー球面の中で、境界を持つ次元が 1 つ高い平行可能な多様体 (接束が自明な多様体) の境界となるものは具体的な構成法も良く知られ、ホモトピー球面の中でも、標準的な球面に近い性質を持つことが多いと考えられてきた。例えば、有限巡回群はこのようなホモトピー球面に対する自由な作用を持つことが知れている。しかし、最も簡単なコンパクト・リー群である S^1 すら 9 次元の Kervaire 球面 (Kervaire 不変量 1 の枠付けられた (framed) 多様体の境界となるホモトピー球面) には自由に作用しないようである。このことは Brumfiel [1] が示したが、その詳しい計算は文献からは読み取りにくい。そこで、今回はこの事実を再確認すると同時に、9 次元以外の場合にも通用するような方法を探り、予想

> $4k+4$ が 2 のべきでないとき、$(4k+1)$ 次元の Kervaire 球面は自由な S^1 作用を持たない。

を検証したい。とはいえ、上の予想をいきなり一般の次元で証明しようとするのでなく、9 次元の次には、17 次元、21 次元を計算機の手を借りてでも計算を行い、それらの結果から一般の $4k+1$ 次元の証明のヒントを得るのが賢明であろう。計算は多項式環の範囲のものであり、市販されている数式処理ソフトが使えると思う。

ここで使用するいくつかの記号を導入しておく。$\mathbf{C}^{n+1}$ 内の単位球面 S^{2n+1} 上の標準的な自由な S^1 作用による商空間は n 次元複素射影空間であり、これを $\mathbf{CP}(n)$ で表す。$\mathbf{CP}(n)$ から $2n$ 次元の円板 D^{2n} の内部を除いたものを $\mathbf{CP}(n)_0$ で表す。これは境界のある多様体で、$\mathbf{CP}(n-1)$ の上の複素 Hopf 直線束の単位円板束に微分同相である。

W^{4k+2} を境界がホモトピー球面であるような枠付けられた多様体とし、その境界のホモトピー球面 Σ^{4k+1} 上に自由な S^1 作用が与えられている状況を考える。このとき商空間 $Q^{4k}=\Sigma^{4k+1}/S^1$ は $\mathbf{CP}(2k)$ とホモトピー同値な多

様体である。またこれらを含んだホモトピー同値

$$f_0 : N^{4k+2} = \Sigma^{4k+1} \times_{S^1} D^2 \longrightarrow \mathbf{CP}(2k+1)_0$$

が考えられる。この N と W を境界 Σ で張り合わせることにより、手術データである幾何学的法写像 (束データは省略)

$$f : M^{4k+2} = N \cup_\Sigma W \longrightarrow \mathbf{CP}(2k+1)$$

が得られる。この M^{4k+2} は W の点のうち、境界点で S^1 作用の同一軌道に属するものを同一視した空間と同相である。このホモトピー同値に対応するホモトピー的な法不変量を $\varphi \in [\mathbf{CP}(2k+1), F/O]$ とする。この法写像の手術障害 $\sigma(\varphi)$ は $L_{4K+2}(1) \cong \mathbf{Z}/2$ に属し、W の Kervaire 不変量 $c(W)$ で与えられるのは単連結手術理論の教えるところである。すなわちこの障害は Σ^{4k+1} が標準的な球面の時は 0 であり、Kervaire 球面のときには 0 でない。これまでの議論を抽象化して、法写像 $\varphi \in [\mathbf{CP}(2k+1), F/O]$ が与えられたとすると、これを $\mathbf{CP}(2k+1)_0$ に制限した法写像は $\mathbf{CP}(2k+1)_0$ とホモトピー同値な境界付の多様体 N' によって実現できる。しかしその境界であるホモトピー球面が自由な S^1 作用を持つためには余次元 2 の手術問題の障害 (指数) $\sigma(\varphi|\mathbf{CP}(2k)) \in L_{4k}(1) \cong \mathbf{Z}$ が消える必要がある。以上の考察から、前述の予想は次のように言い替えられる。

> $\varphi \in [\mathbf{CP}(2k+1), F/O]$ で $\sigma(\varphi) \neq 0$ かつ $\sigma(\varphi|\mathbf{CP}(2k)) = 0$ なるものは存在しない。

$\sigma(\varphi)$ は Kervaire 障害、$\sigma(\varphi|\mathbf{CP}(2k))$ は指数障害という異質の障害であるので、この種の問題を扱うときどんな既知の事実があるか、知っておく必要がある。Kervaire 障害を決定する Kervaire 類 $k_{2^{j+1}-2} \in H^*(F/O; \mathbf{Z}/2)$ と 指数障害を定める Pontrjagin 類 $p_i \in H^*(F/O; \mathbf{Z})$ について、Sullivan による次の結果がある (Wall の教科書 [6], 14C 章参照)。

定理 (Sullivan) 法写像 $\varphi \in [\mathbf{CP}(n), F/O]$ に対して $\varphi^*(k_2)$ がゼロとなる必要十分条件は φ の表すベクトル束データの $\mathbf{CP}(n)$ の接束との差の部分の第 1 Pontrjagin 類が 16 の倍数であることである。

このベクトル束の差は完全系列

$$[\mathbf{CP}(n), F/O] \xrightarrow{i_*} [\mathbf{CP}(n), BSO] = \widetilde{KO}(\mathbf{CP}(n)) \xrightarrow{j_*} [\mathbf{CP}(n), BSF] = \tilde{J}(\mathbf{CP}(n))$$

において $i_*(\varphi)$ で与えられる。

Sullivan の公式 [3] から法写像 $\varphi \in [\mathbf{CP}(2k+1), F/O]$ の Kervaire 障害は $\sigma(\varphi) = \kappa(\nu_2(k+1)+1, \varphi)$ で与えられる。ただし、$\kappa(j,\varphi) \in \mathbf{Z}/2$ は $\varphi^*(k_{2^{j+1}-2})$ がゼロのとき 0、非ゼロのとき 1 を表し、$\nu_2(m)$ は m の 2 位数である。

k が偶数のとき、$\sigma(\varphi) = \kappa(1,\varphi)$ であり、その値は第 1 Pontrjagin 類から定まるが、k が奇数の場合には、$j \neq 1$ の $\kappa(j,\varphi)$ が現れる。このままでは k_2 は直接関係しないが、$k+1$ が 2 の冪でない場合には、この公式に現れ得るすべての $\kappa(j,\varphi)$ の値は等しいことが知れているので ([2],[4])、$\kappa(1,\varphi)$ のみを調べればよい。

φ の $[\mathbf{CP}(2k+1), F/O]$ の像 $i_*(\varphi)$ により 2 つの手術障害 $\sigma(\varphi), \sigma(\varphi|\mathbf{CP}(2k))$ は定まるが、これは $i_*(\varphi)|\mathbf{CP}(2k) \in [\mathbf{CP}(2k), BSO]$ により定まる。$\sigma(\varphi|\mathbf{CP}(2k))$ は

$$\frac{1}{8}\langle L(\tau(\mathbf{CP}(2k)))(L(i_*(\varphi)|\mathbf{CP}(2k)) - 1), [\mathbf{CP}(2k)]\rangle \in \mathbf{Z}$$

で与えられる。ここに $L()$ は Hirzebruch の L 類である。このようにして、我々は予想の第二のいいかえを得る：

> J 写像 $\widetilde{KO}(\mathbf{CP}(2k+1)) \to \tilde{J}(\mathbf{CP}(2k+1))$ の核に属する仮想ベクトル束 ζ に対し、
> $$\langle L(\tau(\mathbf{CP}(2k)))(L(\zeta|\mathbf{CP}(2k)) - 1), [\mathbf{CP}(2k)]\rangle = 0$$
> が成り立てば、ζ の第 1 Pontrjagin 類 $p_1(\zeta)$ は 16 で割り切れる。

$\widetilde{KO}(\mathbf{CP}(n))$ については [5] の 定理 6.18 等にまとまった記述がある。$\mathbf{CP}(n)$ 上の Hopf 複素直線束を η とし、$\omega = r(\eta - 1_C)$ (r は実化作用子) とするとき、$\widetilde{KO}(\mathbf{CP}(n))$ は $n \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ のとき $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{[n/2]}$ で自由に生成される。また $\omega^{[n/2]+1} = 0$ である。$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ のとき、$\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{[n/2]}, \omega^{[n/2]+1}$ で生成され、関係式は $2\omega^{[n/2]+1} = 0$ および $\omega^{[n/2]+2} = 0$ である。J 写像の核は m を奇数として、$(\psi_R^m - 1)$ の像の奇数倍で生成される。ここで ψ_R^m は実 Adams 作用素を表す。我々には奇数成分は関係なく、2 成分のみで議論できるので、以下すべて 2 で局所化したものとする。$\widetilde{KO}(\mathbf{CP}(n))$ における実 Adams 作用素の作用は

$$T_m(t + t^{-1} - 2) = t^m + t^{-m} - 2$$

を満たす m 次多項式により $\psi_R^m(\omega) = T_m(\omega)$ で与えられる。また、$x = c_1(\eta) \in H^2(\mathbf{CP}(n); \mathbf{Z})$ とするとき、$\psi_R^m(\omega)$ の 全 Pontrjagin 類は $1 + m^2x^2$ で与えら

[$k=2$ の場合の計算]

簡単な計算の結果、J 写像の核は (2 局所的に) $\zeta_1 = 16\omega + 2\psi_R^2(\omega)$, $\zeta_2 = 8\psi_R^2(\omega)$ で生成されることがわかる。したがって、J 写像の核に属する一般の仮想ベクトル束 $\zeta = m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2$ の Pontrjagin 類は

$$p(\zeta) = (1+x^2)^{16m_1}(1+4x^2)^{2m_1+8m_2}$$

すなわち

$$p_1(\zeta) = 8(3m_1 + 4m_2)x$$
$$p_2(\zeta) = 288m_1^2 + 768m_1m_2 + 512m_2^2 - 24m_1 - 64m_2$$

を得る。

$$L(\tau(\mathbf{CP}(4))) = \left(\frac{x}{\tanh x}\right)^5 = 1 + \frac{5}{3}x^2 + x^4$$
$$L(\zeta) - 1 = \frac{1}{3}p_1(\zeta) + \frac{1}{45}(7p_2(\zeta) - p_1(\zeta)^2)$$

により $\mathbf{CP}(4)$ での指数障害がゼロとなる条件を求めると、

$$90m_1 + 240m_1m_2 + 160m_2^2 + 27m_1 + 22m_2 = 0$$

を得る。この式から、m_1 は偶数でなければならないが、このとき $p_1(\zeta)$ は 16 で割り切れる。すなわち前ページの言い替えが $k=2$ の場合には成り立つ。

$\mathbf{CP}(5)$ では手計算でも出来たが、これと同じような計算を $\mathbf{CP}(9)$, $\mathbf{CP}(11)$ で行い、予想を検証すると同時に、計算のなかで本質的でない部分を切り除く作業をするのがよいと思われる。

References

[1] Brumfiel, G., *Homotopy equivalences of almost smooth manifolds*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 381–407.

[2] Kitada, Y., *Kervaire's obstructions of free actions of finite cyclic groups on homotopy spheres*, in "Current Trends in Transformation Groups", 117–128, K-monographs in mathematics, Kluwer Academic Publisher, 2002 Netherlands.

[3] Rourke, C. P. and Sullivan, D. P., *On the Kervaire obstruction*, Ann. Math. **94** (1971), 397–413.

[4] Stolz, S., *A note on conjugation involutions on homotopy complex projective spaces*, Japanese J. Math. **12** (1986), no.1, 69–73.

[5] 戸田, 三村, ホモトピー論、紀伊國屋数学叢書 3, 1975.

[6] Wall, C. T. C., *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, London, 1970.