数理解析研究所講究録 1293 巻 2002 年 150-153

Caloric morphisms on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ with respect to radial metrics

茨城大学・理学部　下村　勝孝 (Katsunori Shimomura)
Faculty of Science
Ibaraki University

ここでは，$M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(n \geqq 2)$ 上に radial な Riemann 計量を入れた多様体上で caloric morphism を考える．

ρ を $(0,\infty)$ 上の正値 C^∞-関数とする．$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の各点 x に対して，$ds^2 = \rho(|x|)(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$ を radial な Riemann 計量とする．$\mathbb{R} \times M$ 内のある領域上でこの Riemann 計量に関する熱方程式

$$\boldsymbol{H}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_\rho u = 0$$

を満たす関数 u を caloric function と呼ぶ．但しここで Δ_ρ は M のラプラシアン

$$\begin{aligned}\Delta_\rho u &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho(|x|)^{n/2}} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\rho(|x|)^{n/2-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) \\ &= \frac{1}{\rho(|x|)}\Delta_x u + \frac{n-2}{2}\frac{\rho'(|x|)}{\rho(|x|)^2}\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}\frac{\partial u}{\partial x_i}\end{aligned}$$

である．

D を $\mathbb{R} \times M$ 内の領域とし，

$$f(t,x) = (f_0(t,x_1,\ldots,x_n), f_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(t,x_1,\ldots,x_n))$$

を D から $\mathbb{R} \times M$ への C^∞-写像，φ を D 上の正値 C^∞-関数とする．

$f(D)$ 上の任意の caloric function $u(\tau,y)$ に対して，$\varphi(t,x)(u\circ f)(t,x)$ が D 上の caloric function になるとき，(f,φ) を caloric morphism と呼ぶ．

M は Riemann 多様体であるから，[5] の特徴付けにより，(f,φ) が caloric morphism であるための必要十分条件は，以下の (E-1) – (E-4) で与えられる．

(E-1)　$\boldsymbol{H}\varphi = 0,$

(E-2)　$\dfrac{\partial f_i}{\partial t} = \Delta_\rho f_i + 2g(\nabla_\rho \log\varphi, \nabla_\rho f_i) - \dfrac{df_0}{dt}(t)[(\Delta_\rho x_i)\circ f],$

(E-3)　$\nabla_\rho f_0 = 0,$

(E-4)　$g(\nabla_\rho f_i, \nabla_\rho f_j) = \delta_{ij}\dfrac{df_0}{dt}(t)(\dfrac{1}{\rho}\circ f),$

但しここで ∇_ρ は M の gradient

$$\nabla_\rho u = \frac{1}{\rho(|x|)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$i, j = 1, \ldots, n$ である.

この特徴付けを用い，以下では，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の Appell 変換

$$f(t,x) = (-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}), \quad \varphi(t,x) = \frac{1}{|t|^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$$

の直接の拡張として，f が原点を固定，または原点を無限遠点に写す変換

$$f(t,x) = (f_0(t), \nu(t)R(t)x), \text{ または } f(t,x) = (f_0(t), \nu(t)R(t)\frac{x}{|x|^2}),$$

($\nu(t) > 0$, $R(t)$ は直交行列)になっている caloric morphism と，その場合の ρ の形を調べる.

Riemann 計量が radial であるから，$\mathbb{R}^n$ の回転及び $\mathbb{R}$ の平行移動

$$f(t,x) = (t + a, Rx), \quad \varphi(t,x) = C$$

($a \in \mathbb{R}$，R は直交行列，$C > 0$) は caloric morphism になる.

それ以外に，言わば自明でないものには以下のものがある. 何れも metric ρ に強い制限が付く.

1. (Appell transformation) $p > 0$，$k \in \mathbb{R}$ ($k \neq -2$)，$\rho(r) = pr^k$ とする. その時

$$f(t,x) = (\frac{at+b}{ct+d}, \frac{R}{|ct+d|^{2/(k+2)}}x),$$

$$\varphi(t,x) = \frac{C \exp\left[\dfrac{-p|x|^{k+2}}{(k+2)^2|ct+d|}\right]}{|ct+d|^{n/2}}$$

(但し $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ s.t. $ad - bc = 1$，$C > 0$，R は直交行列) は caloric morphism.

$k = -2$ の場合は，この形の変換は存在しない. 一方，$k = -2$ の場合には Euclidean metric の場合には無かった型の変換が存在する.

2. (Kelvin transformation) $\nu > 0$, $\rho(r)$ は $\rho(\frac{\nu^2}{r}) = \frac{r^4}{\nu^2}\rho(r)$ を満たす (例えば $\rho(r) = \frac{\nu^2}{r^2}$) 正値 C^∞-関数とする．その時

$$f(t,x) = (t+a, \nu R\frac{x}{|x|^2}), \quad \varphi(t,x) = C$$

(但し $C > 0$, R は直交行列) は caloric morphism.

3. (The dilation) $\nu > 0$, $\rho(r)$ は $\rho(\nu r) = \nu^k \rho(r)$ を満たす (例えば $\rho(r) = r^k$) 正値 C^∞-関数とする．その時

$$f(t,x) = (\nu^{k+2}t + a, \nu Rx), \quad \varphi(t,x) = C$$

(但し $a \in \mathbb{R}$, $C > 0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$k = -2$ の場合は t の係数が 1 になってしまう．

4. $p > 0$, $\rho(r) = pr^{-2}$ とする．その時

$$f(t,x) = (t+a, e^{\alpha t+\beta}Rx), \quad \varphi(t,x) = C|x|^{\alpha p/2}e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t},$$

$$f(t,x) = (t+a, e^{\alpha t+\beta}\frac{Rx}{|x|^2}), \quad \varphi(t,x) = C\frac{1}{|x|^{\alpha p/2}}e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t}$$

(但し $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$, $C > 0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$n = 2$ の場合は特別で，$R(t)$ が定数でない，つまり t につれて f が回転する型の変換が存在する．

5. $n = 2$, $p > 0$, $\rho(r) = pr^{-2}$ とする．その時

$$f(t,x) = (t+a, \nu e^{\alpha t}R(bt+c)x), \quad \varphi(t,r,\theta) = Cr^{\alpha p/2}e^{\frac{1}{2}b\theta}e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t},$$

$$f(t,x) = (t+a, \nu e^{\alpha t}R(bt+c)\frac{x}{|x|^2}), \quad \varphi(t,r,\theta) = C\frac{1}{r^{\alpha p/2}}e^{\frac{1}{2}b\theta}e^{\frac{1}{4}p\alpha^2 t}$$

(但し $a, b, c, \alpha, \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$, $\nu, C > 0$, $R(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$, (r, θ) は $\mathbb{R}^2$ の極座標) は caloric morphism.

References

[1] B. Fuglede, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28** (1978), 107–144.

[2] T. Ishihara, *A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), 215–229.

[3] H. Leutwiler, *On the Appell Transformation*, Potential Theory (J.Král, J.Lukeš, I.Netuka, J,Veselý, eds.), Plenum, New York, 1988, pp. 215–222.

[4] K. Shimomura, *The determination of caloric morphisms on Euclidean domains,*, Nagoya Math J. **158** (2000), 133–166.

[5] M. Nishio, K. Shimomura, *A characterization of caloric morphisms between manifolds*, to appear in Ann. Acad. Sci. Fenn Math..