数理解析研究所講究録 1293 巻 2002 年 27-30



# Hausdorff measures and packing pre-measures

島根大学・教育学部　秦野 薫 (Kaoru Hatano)
Faculty of Education,
Shimane University

1. d-次元ユークリッド空間 $R^d$ において $[\{k_q\},\{\lambda_q\}]$ によって構成される対称な一般化されたカントール集合を $K^d$ と表す。ここに、$k_q\lambda_q<\lambda_{q-1}$ を満たし、各 q 段階において、1 つの閉 cube から残される閉 cubes の個数が $k_q^d$ で、その一辺の長さが $\lambda_q$ となっている。この集合 $K^d$ のハウスドルフ測度とプレ・パッキング測度の値を上からと下からの評価を与えることが目的である。

2. ハウスドルフ測度とプレ・パッキング測度の定義

$\phi$ を測度関数とする。つまり、$\phi(t)$ は $[0,t_0)$ で定義された連続で単調増加関数で、$\phi(0)=0,\phi(t)/t^d$ は単調減少とする。測度関数 $\phi$ の全体を $\mathcal{M}$ と表す。[2] を参照。

例 1.　$\phi(t)=t^{\alpha}(-\log t)^{\beta}\quad 0\leq t<t_0$.

(1) $\alpha=0,\beta<0$　(2) $0<\alpha<d$　(3) $\alpha=d,\beta\geq 0$.

これらの場合に $\phi\in\mathcal{M}$ である。

$\phi\in\mathcal{M}$ とする。

$E\subset R^d$ の $\phi$-ハウスドルフ測度 $\Lambda_\phi(E)$ とプレ・パッキング測度 $\phi-\mathrm{P}(E)$ を次で定義する。但し、プレ・パッキング測度の場合は $E$ を有界と仮定する。

I または必要ならば I(x, r) で $R^d$ 内の（中心を x, 辺の長さを r > 0 とする）open cube を表す。

$$\Lambda_\phi(E)=\lim_{r\to 0}[\inf\{\sum_i\phi(r_i);I_i\,\text{open cube with side length}\,r_i\leq r,\ E\subset\cup_iI_i,\ \{I_i\}\,\text{countable}\}]$$

$$\phi-\mathrm{P}(E)=\lim_{r\to 0}[\sup\{\sum_i\phi(r_i);\{I_i(x_i,r_i)\}\,\text{finite disjoint},x_i\in E,\ r_i\leq r\}].$$

特に、$\phi(t)=t^\alpha,0<\alpha\leq d$ の場合、$\Lambda_\phi$ を $\Lambda_\alpha$ と書き、$\phi-\mathrm{P}$ を $\alpha-\mathrm{P}$ と書く。ハウスドルフ次元, dim と表す、とプレ・パッキング次元、$\Delta$ と表す、を次で定義する。

$$\dim(E)=\inf\{\alpha;\Lambda_\alpha(E)=0\}=\sup\{\alpha;\Lambda_\alpha(E)=\infty\}.$$

$$\Delta(E)=\inf\{\alpha;\alpha-\mathrm{P}(E)=0\}=\sup\{\alpha;\alpha-\mathrm{P}(E)=\infty\},$$

ここに、E は有界集合。

注意 1. E が非有界の場合は、上の定義をそのまま使えば、一般には、$\phi-\mathrm{P}(E)=\infty$.

注意 2. $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}$, $\lim_{t\to 0} \frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} = 0$ とする。良く知られた次の (1) (2) が成り立つ。

$$(1)\Lambda_{\phi_1}(E) < \infty \text{ ならば}, \Lambda_{\phi_2}(E) = 0,$$

$$(2)\text{ 有界集合 } E \text{ に対して} \phi_1 - P(E) < \infty \text{ ならば}, \phi_2 - P(E) = 0.$$

注意 3. プレ・パッキング測度に対しては、一般には可算劣加法性が成立しない。外測度であるパッキング測度, $\mathrm{P}_\phi$, は次のように定義される。$\mathrm{P}_\alpha$ も $\alpha - \mathrm{P}$ から同様に定義する。$E \subset R^d$ とする。

$$\mathrm{P}_\phi(E) = \inf\{\sum_i \phi - \mathrm{P}(E_i); E \subset \cup E_i,\ E_i, \text{bounded}\},$$

$$\mathrm{Dim}(E) = \inf\{\alpha; P_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha; P_\alpha(E) = \infty\}.$$

注意 4. 有界集合 E に対して $\dim(E) \leq \mathrm{Dim}(E) \leq \Delta(E)$.

3. カントール集合のハウスドルフ測度の評価とハウスドルフ次元について

定理 1. 次の評価が得られる。

$$2^{-3d} \liminf_{q\to\infty} (k_1 k_2 \dots k_q)^d \phi(\lambda_q) \leq \Lambda_\phi(K^d) \leq \liminf_{q\to\infty} (k_1 k_2 \dots k_q)^d \phi(\lambda_q).$$

[1] において、$\Lambda_\alpha$ に関して同様の結果が得られている。

系

$$\dim(K^d) = \liminf_{q\to\infty} \frac{\log(k_1 k_2 \dots k_q)^d}{-\log \lambda_q}.$$

4. カントール集合のプレ・パッキング測度の評価とプレ・パッキング次元について

定理 2. 次の条件を満たす自然数 $L$ が存在すると仮定する。条件 : $k_q > L$ となる $q$ に対して、$\delta_q \leq C\lambda_q$ を満たす定数 $C$ がある. このとき、次の評価が得られる。

$$\limsup_{q\to\infty} (k_1 k_2 \dots k_q)^d \phi(\lambda_q) \leq \phi - \mathrm{P}(K^d) \leq M \limsup_{q\to\infty} (k_1 k_2 \dots k_q)^d \phi(\lambda_q).$$

ここに、定数 $M(\geq 1)$ は $d, L$ によって定まる。

注意 5. $\{k_q\}$ が有界ならば、この条件だけで上の評価は得られる。

系 定理 2 と同じ条件のもとに、

$$\Delta(\mathrm{K}^d) = \mathrm{Dim}(\mathrm{K}^d) = \limsup_{q\to\infty} \frac{\log(k_1k_2...k_q)^d}{-\log\lambda_q}.$$

[3] において、コンパクト集合 K 上で $\Delta$ が uniform であることが定義され、それが満たされると、$\Delta(\mathrm{K}) = \mathrm{Dim}(\mathrm{K})$ が成立する。定理 2 によって $K^d$ 上で $\Delta$ が uniform であるので、系が証明できる。

Tricot[3] に $\dim(K) = 0, \mathrm{Dim}(K) = 1$ を満たすコンパクト集合 $K \subset R^1$ が構成されている。これに関して、次の例がある。

例 2. $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}$ で次の条件を満たすとする。

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} = 0, \lim_{t\to 0}\frac{\phi_2(t)}{t^d} = \infty, \frac{\phi_1(t)}{t^d} \quad \text{strictly decreasing.}$$

この時、$0 < \Lambda_{\phi_1}(\mathrm{K}^d) < \infty, 0 < \phi_2 - \mathrm{P}(\mathrm{K}^d) < \infty$ を満たすカントール集合 $\mathrm{K}^d$ を構成できる。

定理 2 において与えられた条件のもとに評価を得たが、次の例よりわかるように、この条件は上の評価を得るためには必要である。

例 3. $0 < \alpha < d$ とする。このとき、$\{k_q\}$ を $\lim k_q = \infty$ を満たす自然数の列とする。$\lambda_0 = 1, (k_1k_2...k_q)^d{\lambda_q}^\alpha = 1$ によって数列 $\{\lambda_q\}$ を決める。$\lim\frac{\delta_q}{\lambda_q} = \infty$ が成り立ち、$\{k_q\}$ をうまくとれば、$\delta_q < \delta_{q-1}$ が成り立つので、$\lim(k_1k_2...k_q)^d{\delta_q}^\alpha = \infty$ より、$\alpha - \mathrm{P}(\mathrm{K}^d) = \infty$ がわかる。

5. 定理の証明について

上記の 2 つの定理の証明に次の 2 つの補題を用いる。

補題 1. $K \subset R^d$ をコンパクト集合とする。$\Phi$ を有限個の開 cubes の和集合,$\omega$ と表す、で定義された非負の集合関数とし、つぎの条件 (1), (2), (3) を満たすとする。

(1) $\Phi(\omega_1 \cup \omega_2) \leq \Phi(\omega_1) + \Phi(\omega_2)$,

(2) $\omega \supset K$ に対して $\Phi(\omega) \geq b$ を満たす正数 $b$ が存在する、

(3) 辺の長さが $r \leq r_0$ である開 cubeI に対して $\Phi(\mathrm{I}) \leq a\phi(r)$ を満たす正数 $a, r_0$ が存在する。

このとき、$\Lambda_\phi(K) \geq b/a$.

補題 2. $K \subset R^d$ をコンパクト集合とする。$\Psi$ を有限個の開 cubes の和集合,$\omega$ と表す、で定義された非負の集合関数とし、つぎの条件 (1), (2), (3) を満たすとする。

(1) $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ ならば、$\Psi(\omega_1 \cup \omega_2) \geq \Psi(\omega_1) + \Psi(\omega_2)$,

(2) すべての $\omega$ に対して $\Psi(\omega) \leq B$ を満たす正数 $B$ がある、

(3) すべての $x \in K$, すべての $r \leq r_0$ に対して $\phi(r) \leq a\Psi(\mathrm{I}(x,r))$ を満たす正数 $a, r_0$ がある。

このとき、$\phi - \mathrm{P}(K) \leq aB$.

補題を満たす集合関数 $\Phi, \Psi$ をうまく定義すると、定理が証明出来る。

## 参考文献

[1] HATANO, K. Notes on Hausdorff Dimensions of Cartesian Product Sets, Hiroshima Math. J.1(1971), 17-25.

[2] TAYLOR, S.J. and Tricot,C. Packing measure, and its evaluation for a Brownian path. Trans. Amer. math. Soc. 288(1985), 679-699.

[3] Tricot, C.JR. Two definitons of fractional dimension, Math. Camb. Phil.Soc. 91(1982), 57-74.