数理解析研究所講究録 1295 巻 2002 年 1-8

代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について II

新潟大学工学部 田島慎一 (Shinichi Tajima) *
Dept. of Information Engineering, Faculty of Engineering,
Niigata University お茶の水女子大学大学院 中村弥生 (Yayoi Nakamura) †
Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University

本稿では, 零次元多様体に台を持つ代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について述べる.

一般に, 代数的局所コホモロジー類を annihilate する線形偏微分作用素全体 Ann は, 微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ のイデアルをなし, D-加群 $\mathcal{D}_X/Ann$ は ホロノミック系となる. 特に, 代数的局所コホモロジー類が零次元多様体に台を持つような場合, $\mathcal{D}_X/Ann$ はその各点において, D-加群としてシンプルとなる. この特性に注目することで, Grothendieck 留数や Jacobi の補間積分, Grothendieck 双対性等の研究にホロノミック系の理論を応用することができる ([7], [8], [9], [10]).

これらの応用のためには, イデアル Ann を具体的に構成する必要があるが, Ann のグレブナ基底は, 一般にはかなり複雑であり, その計算は困難な場合が多い. しかし, 零次元多様体に台を持つ代数的局所コホモロジー類の場合, イデアル Ann は, 多くの場合高々 1 階の微分作用素で生成される. また, 代数的局所コホモロジー類が多少複雑であっても, 例えば, modality が 1 または 2 であるような semiquasihomogeneous 例外型特異点に付随したものである場合でも, Ann は高々 2 階の微分作用素で生成されることが分かっている ([3], [4], [5]). このように, Ann のグレブナ基底を求めなくても, 予め階数を制限して微分作用素を構成することにより, イデアルの生成元を求められる場合がある. 更に, 階数を制限して構成した annihilator を用いることにより, ホロノミック系としての特徴を導き出せる場合も多い. 実際, ホロノミック系を用いた孤立特異点の構造の解析 ([4], [5]) では, この考え方が有効であった.

論文 [2] では, 与えられた代数的局所コホモロジー類に対する, 1 階の線形偏微分作用素と 2 階の線形偏微分作用素で与えられる annihilator を構成した. 本稿では, それらの構成法に改良を加え, 効率化をはかる. [2] での構成法で基にした syzygies の計算は用いず, 可換環でのグレブナ基底を活用することにより, 微分作用素の構成を線形代数の計算 (未定係数法) に帰着させる. §1 では, 作用素の階数を制限した annihilator の構成法の原型を与える. §2 では, その構成法を局所化する. さらに, §3 で 2 階の作用素の構成法の効率化をはかる. §4 では, 幾つかの例に対し, 2 階の偏微分作用素を実際に計算し, これらの構成法の計算量を比較する. 具体的には, 2 変数例外型特異点と Reiffen が論文 [6] の中で扱っている特異点のパラメーターに適当な値を代入したものに関し, 出力される作用素の個数と計算に要した cpu time, gc time を与える. なお計算は, 数式処理システム Risa/Asir にこれらの構成法をインプリメントして行なった.

*tajima@geb.ge.niigata-u.ac.jp
†nakamura@math.ocha.ac.jp

1 代数的局所コホモロジー類と annihilator の構成

$X = \mathbb{C}^n$ 上の n 個の多項式の列 $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $f_j \in \mathbb{Z}[z]$ が正規列をなすとする．また，これらの多項式の生成する多項式環 $\mathbb{Q}[z]$ のイデアルを $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ とし，I の 定める variety を $Z = V(I) \subset X$ と置く．$F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ により決まる Z に台を持つ代数的局所コホモロジー類を $\sigma_F = [1/f_1 \cdots f_n] \in H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ と置く．ここで $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数のなす層であり，$H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{H}^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X))$ は Z に台を持つ代数的局所コホモロジー群の層 $\mathcal{H}^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ の大域切断である．A_n を n 変数の Weyl 代数 $\mathbb{Q}[z]\langle\partial\rangle$, $\partial = (\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$ とし，A_n には適当な項順序 $\succ$ が定まっているものとする．以下, 1, 2 階の作用素の構成法について述べる．

1.1 1 階の作用素の構成法 ($\mathfrak{A}$-1)

1 階の線形偏微分作用素

$$P = p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + p(z),\ p_j(z),\ p(z) \in \mathbb{Q}[z]$$

で与えられる annihilator の構成法について述べる．σ_F を annihilate する 0 階の微分作用素の生成する annihilating ideal $Ann^{(0)}(\sigma_F)$ は $A_n I$ となるので (c.f. [9]), 係数 $p_1(z), \ldots, p_n(z), p(z)$ は $\mathbb{Q}[z]/I$ から取れば十分であることが分かる．

次の形の微分作用素 v を考える．

$$v = p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n},\ p_j(z) \in \mathbb{Q}[z]/I,\ j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Proposition A ([4]) 次の 2 つの条件は同値である．

1. $vh(z) \in I$ for $^\forall h(z) \in I$.
2. $\exists p(z) \in \mathbb{Q}[z]/I$ s.t. $(v + p(z))\sigma_F = 0$.

この性質を用いることにより，代数的局所コホモロジー類 σ_F の 1 階の annihilator の集合

$$L^{(1)}(\sigma_F) = \{P = p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + p(z) \mid P\sigma_F = 0,\ p_j(z),\ p(z) \in \mathbb{Q}[z]/I\}$$

は次のようにして構成することができる．

Algorithm ($\mathfrak{A}$-1) (代数的局所コホモロジー類 σ_F を annihilate する 1 階の偏微分作用素)
入力：$f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Q}[z]$：多項式の正規列

1. $\mathbb{Q}[z]/I$ の標準的な単項基底 $\{e_1(z), \ldots, e_\mu(z)\}$ を取る．但し，$\mu = \dim \mathbb{Q}[z]/I$ である．
2. 未定係数 c_k, c_{ik}, $k = 1, \ldots, \mu$, $i = 1, \ldots, n$ を用いて，$p(z) = \sum_{k=1}^{\mu} c_k e_k(z)$, $p_i(z) = \sum_{k=1}^{\mu} c_{ik} e_k(z)$, $i = 1, \ldots, n$ と置く．
3. 任意の $h(z) \in I$ に対し，$p_1(z)\dfrac{\partial h}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\dfrac{\partial h}{\partial z_n} \in I$ となる $p_i(z)$ の組，つまり，係数 c_{ik}, $k = 1, \ldots, \mu$, $i = 1, \ldots, n$ を求める．

4. 3. で求めた $(p_1(z),\ldots,p_n(z))$ に対し,

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i(z)\sum_{j=1}^{n} f_1\cdots\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\cdots f_n + p(z)f_1\cdots f_n \in \langle f_1^2,\ldots,f_n^2\rangle$$

を満たすように $p(z)$, つまり, 係数 c_k, $k=1,\ldots,\mu$ を求める.

5. $P = p_1(z)\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\dfrac{\partial}{\partial z_n} + p(z)$ と置く.

出力 : ベクトル空間 $L^{(1)}(\sigma_F)$ の基底

Proposition 代数的局所コホモロジー類 σ_F に対し, $Ann^{(1)}(\sigma_F)$ を σ_F の高々 1 階の偏微分作用素で与えられる annihilator の生成するイデアルとする. このとき, $Ann^{(1)}(\sigma_F) = A_n(L^{(1)}(\sigma_F)\cup I)$ が成り立つ.

1.2 2 階の作用素の構成法 ($\mathfrak{A}$-2)([2] の §2.2)

$p(z), p_i(z), p_{ij}(z) \in \mathbb{Q}[z]/I$, $i=1,\ldots,n; i\le j\le n$ に対し,

$$P = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\ge i}^{n} p_{ij}(z)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j} + \sum_{i=1}^{n} p_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i} + p(z) \tag{2}$$

と置く. このとき, $P\sigma_F = 0$ を満たす $p(z), p_i(z), p_{ij}(z)$ は次のように求めることができる.

1. $\mathbb{Q}[z]/I$ の標準的な単項基底 $\{e_1(z),\ldots,e_\mu(z)\}$ を取る. 但し, $\mu = \dim \mathbb{Q}[z]/I$ である.
2. 未定係数 c_k, c_{ik}, c_{ijk}, $i=1,\ldots,n$, $i\le j\le n$, $k=1,\ldots,\mu$ を用いて $p(z)=\sum_{k=1}^{\mu} c_k e_k(z)$, $p_i(z) = \sum_{k=1}^{\mu} c_{ik}e_k(z)$, $p_{ij}(z) = \sum_{k=1}^{\mu} c_{ijk}e_k(z)$, $i=1,\ldots,n; i\le j\le n$ と置く.
3. 偏微分作用素 (2) を $1/f_1\cdots f_n$ に施し, $P(1/f_1\cdots f_n) = g/f_1^3\cdots f_n^3$ を満たす $g=g(z)$ を求める.
4. $g(z)\in\langle f_1^3,\ldots,f_n^3\rangle$ を満たす c_k, c_{ik}, c_{ijk}, $i=1,\ldots,n; i\le j\le n$, $k=1,\ldots,\mu$ を求める.

このとき, 偏微分作用素

$$P = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\ge i}^{n} p_{ij}(z)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j} + \sum_{i=1}^{n} p_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i} + p(z) \quad \left(p(z)=\sum_{k=1}^{\mu}c_ke_k,\ p_i(z)=\sum_{k=1}^{\mu}c_{ik}e_k,\ p_{ij}(z)=\sum_{k=1}^{\mu}c_{ijk}e_k\right)$$

は, 代数的局所コホモロジー類 σ_F の annihilator となる. ($g(z)\in\langle f_1^3,\ldots,f_n^3\rangle$ が成り立つことが, 偏微分作用素 (2) が $P\sigma_F=0$ を満たす必要十分条件であるという結果を用いた.)

(以上の計算において, $f_1\cdots f_n$ 及び $f_1^3\cdots f_n^3$ の順序は変更しないこと.) 計算の詳細については [2] の §2.2 を参照されたい.

2 局所的な作用素の構成

与えられた多項式 $f_1,\ldots,f_n\in\mathbb{Q}[z]$ の生成するイデアル I の準素イデアル分解が $I = I_1\cap\cdots\cap I_m$ で与えられたとする. 各 I_ℓ の variety を $Z_\ell = V(I_\ell)$ と置く. このとき, Z に台を持つ n 次代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ は, 各 Z_ℓ に台を持つ n 次代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[Z_\ell]}(\mathcal{O}_X)$ による直和分解

$$H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X) = H^n_{[Z_1]}(\mathcal{O}_X)\oplus\cdots\oplus H^n_{[Z_m]}(\mathcal{O}_X)$$

を持つ. この分解に対応して, 代数的局所コホモロジー類 σ_F に対し, 各 Z_ℓ に台を持つ代数的局所コホモロジー類 σ_ℓ であり, $\sigma_F=\sigma_1+\cdots+\sigma_m$ を満たすものが存在する. そこで, I を分解する準素イデアルのひとつ I_ℓ に注目し, Z_ℓ に台を持つ代数的局所コホモロジー類 σ_ℓ の annihilator を直接構成する方法について述べる.

与えられた多項式 $f_1,\ldots,f_n$ をそれぞれ 2 乗, 3 乗した多項式の生成するイデアルの準素イデアル分解を $\langle f_1^2,\ldots,f_n^2\rangle = I_1^{(2)}\cap\cdots\cap I_m^{(2)}$, $\langle f_1^3,\ldots,f_n^3\rangle = I_1^{(3)}\cap\cdots\cap I_m^{(3)}$ とする. ここで, イデアルの添字は $\sqrt{I_\ell}=\sqrt{I_\ell^{(2)}}=\sqrt{I_\ell^{(3)}}$ となるようにそろえておく. また, A_n に適当な項順序 $\succ$ が定まっているものとする.

2.1 1 階の annihilator の構成法 ($\mathfrak{B}$-1)

代数的局所コホモロジー類 σ_ℓ に対し, σ_ℓ を annihilate する 1 階の線形偏微分作用素

$$P=p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}+p(z),\ p(z),\ p_i(z)\in\mathbb{Q}[z]$$

の構成法について述べる. ここで, σ_ℓ の 0 階の微分作用素の生成する annihilating ideal $Ann^{(0)}(\sigma_\ell)$ は A_nI_ℓ であるから, 係数 $p_1(z),\ldots,p_n(z),p(z)$ は $\mathbb{Q}[z]/I_\ell$ から取ればよいことが分かる (c.f. [9]).

次の形の微分作用素 v を考える.

$$v=p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n},\ p_j(z)\in\mathbb{Q}[z]/I_\ell. \tag{3}$$

Proposition B 次の 2 つの条件は同値である.

1. $vh(z)\in I_\ell$ for $^\forall h(z)\in I_\ell$.
2. $\exists p(z)\in\mathbb{Q}[z]/I_\ell$ s.t. $(v+p(z))\sigma_\ell=0$.

この性質を用いることにより, 1 階の線形偏微分作用素で与えられる annihilator の集合

$$L^{(1)}(\sigma_\ell)=\{P=p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}+p(z)\ |\ P\sigma_\ell=0,\ p(z),\ p_i(z)\in\mathbb{Q}[z]/I_\ell\}$$

は次の手順により構成することができる.

Algorithm $\mathfrak{B}$-1 入力 : $f_1,\ldots,f_n\in\mathbb{Z}[z]$: 多項式の正規列, I_ℓ : 準素イデアル

1. $\mathbb{Q}[z]/I_\ell$ の標準的な単項基底 $e_1(z),\ldots,e_{\mu_\ell}(z)$ を取る. 但し, $\mu_\ell=\dim\mathbb{Z}[z]/I_\ell$ である.
2. 未定係数 c_k, c_{ik} を用いて, $p(z)=\sum_{k=1}^{\mu_\ell}c_ke_k(z)$, $p_i(z)=\sum_{k=1}^{\mu_\ell}c_{ik}e_k(z)$, $i=1,\ldots,n$ と置く.
3. 任意の $h=h(z)\in I_\ell$ に対し, $p_1(z)\frac{\partial h}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial h}{\partial z_n}\in I_\ell$ となる $p_i(z)$ つまり, 係数 c_{ik}, $k=1,\ldots,\mu_\ell$, $i=1,\ldots,n$ を求める.
4. $-\sum_{i=1}^n p_i(z)\sum_{j=1}^n f_1\cdots\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\cdots f_n+p(z)f_1\cdots f_n\in I_\ell^{(2)}$ を満たす $p(z)$ つまり, 係数 c_k, $k=1,\ldots,\mu_\ell$ を求める.
5. $P=p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}+p(z)$ と置く.

出力 : σ_ℓ に対する 1 階の annihilator P

Proposition 代数的局所コホモロジー類 σ_ℓ に対し, $Ann^{(1)}(\sigma_\ell)$ を σ_ℓ の高々 1 階の偏微分作用素で与えられる annihilator の生成するイデアルとする. このとき, $Ann^{(1)}(\sigma_\ell)=A_n(L^{(1)}(\sigma_\ell)\cup I_\ell)$ が成り立つ.

2.2 2 階の annihilator の構成法 ($\mathfrak{B}$-2)

代数的局所コホモロジー類 σ_ℓ に対し, 2 階の偏微分作用素

$$P=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geq i}^{n}p_{ij}(z)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}+\sum_{i=1}^{n}p_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}+p(z) \tag{4}$$

で与えられる annihilator の構成法について述べる. §1.2 では σ_F を annihilate する大域的な 2 階の作用素を構成するために, 関数 $g(z)$ を導入し, $g(z)\in I^{(3)}$ を満たすように係数 $c_k, c_{ik}, c_{ijk}\in\mathbb{Q}$ を求めた. σ_ℓ を annihilate するよう作用素 P を構成するには, 関数 $g(z)$ が $g(z)\in I_\ell^{(3)}$ を満たすように係数 $c_k, c_{ik}, c_{ijk}\in\mathbb{Q}$ を求めればよい. つまり, σ_ℓ の 2 階の annihilator は次のように構成することができる.

1. $\mathbb{Q}[z]/I_\ell$ の標準的な単項基底 $\{e_1(z),\ldots,e_{\mu_\ell}(z)\}$ を取る. 但し, $\mu_\ell=\dim\mathbb{Q}[z]/I_\ell$ である.
2. 未定係数 c_k, c_{ik}, c_{ijk}, $k=1,\ldots,\mu_\ell$ を用いて $p(z)=\sum_{k=1}^{\mu_\ell}c_ke_k(z)$, $p_i(z)=\sum_{k=1}^{\mu_\ell}c_{ik}e_k(z)$, $p_{ij}(z)=\sum_{k=1}^{\mu_\ell}c_{ijk}e_k(z)$, $i=1,\ldots,n; i\leq j\leq n$ と置く.
3. 偏微分作用素 (4) を $1/f_1\cdots f_n$ に施し, $P(1/f_1\ldots f_n)=g(z)/f_1^3\cdots f_n^3$ を満たす $g(z)$ を求める.
4. $g(z)\in I_\ell^{(3)}$ を満たす c_k, c_{ik}, c_{ijk}, $k=1,\ldots,\mu_\ell$ を求める.

このとき, 偏微分作用素

$$P=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geq i}^{n}p_{ij}(z)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}+\sum_{i=1}^{n}p_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}+p(z)$$

は, 代数的局所コホモロジー類 σ_ℓ の annihilator となる.

3 効率化 ($\mathfrak{L}$-2)

§1.1 (resp. §2.1) において, $Ann^{(1)}(\sigma_F)/Ann^{(0)}(\sigma_F)$ (resp. $Ann^{(1)}(\sigma_\ell)/Ann^{(0)}(\sigma_\ell)$) に属する 1 階の作用素を構成するため, 1 階の作用素の係数を $\mathbb{Q}[z]/I$ (resp. $\mathbb{Q}[z]/I_\ell$) から取った. そこで, この節では, 同様な考え方を用いて, 2 階の annihilator の構成法の効率化を行なう. つまり, 1 階の annihilator と偏微分作用素 $\partial/\partial z_i$ との積からなるようなものを予め計算から除外して, 2 階の作用素の構成を行なう. この方法は大域的な作用素, 局所的な作用素いずれの構成にも用いることができるが, ここでは, 局所的な場合について説明する.

集合 V_ℓ を次で定める.

$$V_\ell=\{v=p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}\mid vh(z)\in I_\ell,\ {}^\forall h(z)\in I_\ell\}.$$

これは, §2.1 で与えた 1 階の annihilator の構成法で基本的な役割を果たす作用素 (Algorithm $\mathfrak{B}$-1 の step 3.) の集合である. V_ℓ を用いて次のような集合を考える.

$$N_\ell=\{\mathrm{hm}(v)\mid v\in V_\ell\}.$$

ここで, $\mathrm{hm}(v)$ は A_n の項順序 $\succ$ に関する v の leading monomial を表す. さらに, N_ℓ の要素を偏微分作用素 $\partial/\partial z_i$ $(i=1,\ldots,n)$ の一次式と見た時の $\partial/\partial z_i$ の係数の集合を,

$$N_{\ell i}=\{e\in M_\ell\mid e\frac{\partial}{\partial z_i}\in N_\ell\}$$

と置く. 但し, M_ℓ は $\mathbb{Q}[z]/I_\ell$ の $\succ$ に関する標準的な単項基底の集合 $\{e_1(z),\ldots,e_{\mu_\ell}(z)\}$ とする. また, σ_ℓ を annihilate する 2 階の線形偏微分作用素

$$P=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geq i}^{n}p_{ij}(z)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}+\sum_{i=1}^{n}p_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}+p(z)\quad(p_{ij}(z),\,p_i(z),\,p(z)\in\mathbb{Q}[z]/I_\ell)$$

において, 係数 $p_{ij}(z)$, $p_i(z)$, $i=1,\ldots,n$, $i\leq j\leq n$ が次のような形で与えられているとする.

$$\begin{cases} p_{ij}(z)=\sum_{k=1,e_k\in M_\ell\setminus(N_{\ell i}\cup N_{\ell j})}^{\mu_\ell}c_{ijk}e_k(z),\\ p_i(z)=\sum_{k=1,e_k(z)\in M_\ell\setminus N_{\ell i}}^{\mu_\ell}c_{ik}e_k(z),\ i=1,\ldots,n;i\leq j\leq n\end{cases}$$

今, ベクトル空間 $L^{(1)}(\sigma_\ell)$ の基底が $L^{(1)}(\sigma_\ell)=\{L_1,\ldots,L_s\}$ であたえられているとする. このとき,

$$P=\sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq s}(b_{ij}\frac{\partial}{\partial z_i}+b_{0j})L_j,\ b_{ij}\in\mathbb{C}$$

が成り立つのは, 全ての係数 c_{ijk}, c_{ij}, b_{ij} が零となるとき, そのときのみである. このことから, §2.3 の手順 2. を次で置き換えることにより, 効率的に 2 階の作用素を構成することができる.

2′. 未定係数 c_k, c_{ik}, c_{ijk}, $i=1,\ldots,n$, $i\leq j\leq n$, $k=1,\ldots,\mu_\ell$ を用いて $p(z)=\sum_{k=1}^{\mu_\ell}c_ke_k(z)$, $p_i(z)=\sum_{k=1,e_k\in M_\ell\setminus N_{\ell i}}^{\mu_\ell}c_{ik}e_k(z)$, $p_{ij}(z)=\sum_{k=1,e_k\in M_\ell\setminus(N_{\ell i}\cup N_{\ell j})}^{\mu_\ell}c_{ijk}e_k(z)$, $i=1,\ldots,n;i\leq j\leq n$ と置く.

大域的な作用素を構成する場合は, V_ℓ を Algorithm $\mathfrak{A}$-1 の step 3. により決まる作用素 (1) の集合 V で置き換え, N_ℓ, $N_{\ell i}$ に対応する集合 N, N_i, $i=1,\ldots,n$ を導入すればよい.

4 各段階における計算時間の比較

本稿で与えた代数的局所コホモロジー類の annihilator の構成法を数式処理システム Risa/Asir を用いて計算機に実装し, 幾つかの例について, 2 階の作用素を計算した。以下に, 出力された作用素の個数と計算時間を与える. $\mathfrak{A}$-2, $\mathfrak{B}$-2, $\mathfrak{C}$-2 はそれぞれ §1.2, §2.2, §3 で与えた 2 階の作用素の構成法を表す. 構成法 $\mathfrak{B}$-2, $\mathfrak{C}$-2 では, σ_F の原点に台を持つ直和成分について計算を行なった. なお, 例 1, 例 2 に挙げた代数的局所コホモロジー類については, 高々 2 階の線形偏微分作用素の生成する annihilating ideal を構成することにより, シンプルなホロノミック系を与えることができることが分かっている (例 1 で扱う標準型のうち, modality が 1 の場合については [3] 参照).

例 1 2 変数関数 $f=f(x,y)$ は, 原点に semiquasihomogeneous 例外型特異点を与え, その modality は 1 または 2 であるとする. f の偏微分を $f_1=\partial f/\partial x$, $f_2=\partial f/\partial y$ と置き, 代数的局所コホモロジー類 σ_F を考える. 次の表は, unimodal semiquasihomogeneous 例外型特異点の標準型 E_{12}, E_{13}, E_{14}, Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, W_{12}, W_{13} と, bimodal semiquasihomogeneous 例外型特異点の標準型 E_{18}, E_{19}, E_{20}, Z_{17}, Z_{18}, Z_{19}, W_{17}, W_{18} ([1]) に関して 2 階の作用素を計算し, 出力されたの個数を上段に, 計算の所要時間を下段に与えたものである. 表の中の ? は, メモリの関係で計算できなかったものである.

	$\mathfrak{A}-2$		$\mathfrak{B}-2$		$\mathfrak{C}-2$	
	個数	cpu + gc	個数	cpu + gc	個数	cpu + gc
E_{12}	40	7.53 + 1.869	40	1.899 + 0.7766	2	0.3512 + 0.1201
E_{13}	43	4.635 + 1.674	43	1.636 + 0.7087	2	0.3266 + 0.1551
E_{14}	48	3.246 + 1.731	48	1.104 + 0.5254	2	0.2888 + 0.1588
Z_{11}	38	11.89 + 2.996	38	3.1 + 0.8193	4	0.563 + 0.1529
Z_{12}	42	22.36 + 5.479	42	4.762 + 1.322	2	0.6682 + 0.1556
Z_{13}	46	20.75 + 4.951	46	2.585 + 0.6239	4	0.6173 + 0.1899
W_{12}	43	3.262 + 1.434	43	0.7774 + 0.41	4	0.2426 + 0.1103
W_{13}	46	1.829 + 1.061	46	0.6462 + 0.3351	4	0.2105 + 0.1091

	$\mathfrak{A}-2$		$\mathfrak{B}-2$		$\mathfrak{C}-2$	
	個数	cpu + gc	個数	cpu + gc	個数	cpu + gc
E_{18}	61	792.8 + 135.4	61	54.19 + 10.31	4	5.664 + 0.5522
E_{19}	64	254.5 + 49.19	64	15.2 + 3.229	4	1.744 + 0.2964
E_{20}	69	1370 + 211.3	69	44.49 + 7.91	4	4.07 + 0.469
Z_{17}	?	?	60	80.62 + 5.75	4	8.33 + 0.3329
Z_{18}	?	?	63	107 + 27.02	4	11.73 + 2.451
Z_{19}	?	?	68	109.2 + 24.9	4	10.91 + 1.568
W_{17}	61	200 + 36.34	61	7.268 + 2.749	6	1.014 + 0.3156
W_{18}	66	165.9 + 34.18	66	4.5 + 1.993	6	0.9825 + 0.4512

例 2 $f_1 = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + y^5$, $f_2 = 5xy^4 + 7y^6$ とする. f_1, f_2 は, 原点において E_{12} 型と同じ" 複雑さ" を持った局所環 $\mathbb{C}[[x,y]]/\langle f_1, f_2\rangle$ を与える. また, 上であげた 2 変数 semiquasihomogeneous 特異点の標準型の場合は, 原点のみに 1 より高い重複度を持った場合であったが, この例では, 原点以外にも 1 より高い重複度を持つ点が存在する. (原点:重複度 12, $(1,0)$:重複度 8, 他 4 点:重複度 1)

$\mathfrak{A}-2$		$\mathfrak{B}-2$		$\mathfrak{C}-2$	
個数	cpu + gc	個数	cpu + gc	個数	cpu + gc
67	2289 + 282.1	40	3.939 + 0.7	2	0.6881 + 0.1174

例 3 最後により複雑な例として, 論文 [6] で扱われている関数 $f = x^6 + xy^7 + y^8$ について考える. f の偏微分を $f_1 = 6x^5 + y^7$, $f_2 = 7y^6x + 8y^7$ と置き, 代数的局所コホモロジー類 σ_F の annihilator を計算する. この例は, 例 1 で扱った 2 変数 semiquasihomogeneous 特異点の標準型の場合に比べ, Tjurina algebra の構造が大変複雑になっている. (原点:重複度 35, 他 2 点:重複度 1)

$\mathfrak{A}-2$		$\mathfrak{B}-2$		$\mathfrak{C}-2$	
個数	cpu + gc	個数	cpu + gc	個数	cpu + gc
140	297.9 + 45.32	140	23.52 + 3.415	6	3.558 + 0.543

参 考 文 献

[1] V.I. Arnol'd, *Critical points of smooth functions and their normal forms*, Russian Math. Surveys **30:5** (1975), 1–75.

[2] 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1199**「数式処理における理論と応用の研究」(2001), 70–89

[3] 中村弥生, 田島慎一, Unimodal 例外型特異点における代数的局所コホモロジー類, 京都大学数理解析研究所講究録 **1211**「微分方程式の漸近解析と超局所解析」(2001), 155–165.

[4] Y. Nakamura and S. Tajima, *A study of semiquasihomogeneous singularities by using holonomic system*, 京都大学数理解析研究所講究録「特異点と Newton 図形」掲載予定.

[5] Y. Nakamura, *A study of Bimodal exceptional singularity with holonomic system*, 京都大学数理解析研究所講究録「Painlevé 系と超幾何系」掲載予定.

[6] H.-J. Reiffen, *Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen*, Mth.Zeitschr. **101** (1967), 269–284.

[7] 田島慎一, 非同次常微分方程式の可解条件について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1168**「完全最急降下法」(2000), 66–79.

[8] 田島慎一, 多変数留数の biorthogonal 基底 (双対基底) と偏微分作用素, 京都大学数理解析研究所講究録「Painlevé 系と超幾何系」掲載予定.

[9] 田島慎一, *Algorithms for computing Grothendieck local residues —improvement with a rescue step—*, 京都大学数理解析研究所講究録「特異点と Newton 図形」掲載予定.

[10] S. Tajima, *Inhomogeneous ordinary differential equations, and local cohomologies and residues* Proceedings of International Conference on Finite or Infinite dimensional Complex Analysis, Hanoi, to appear.