

代数関数の解析接続について

(On Analytic Continuation of Algebraic Function)

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) *

筑波大学 数学系

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

稲葉 大樹 (Daiju Inaba) †

筑波大学 数学研究科

DOCTORAL PROGRAM IN MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1. 解析接続について

$F(x, u)$ は \mathbb{C} 上の無平方な 2 変数多項式とし、次のように表されているとする。

$$F(x, u) = f_n(u)x^n + f_{n-1}(u)x^{n-1} + \cdots + f_0(u). \quad (1)$$

$s \in \mathbb{C}$ に対して、 $F(x, s)$ が平方因子を持つか $f_n(s) = 0$ であれば、 s を $F(x, u)$ の特異点ということにする。 $F(x, u)$ の x に関する根は u の代数関数であるが、数値 a が特異点でなければ、 $u - a$ のべき級数に展開できる。これを Taylor 級数根という。 s が特異点の場合には根は一般に分数べき級数に展開できるが、これを Puiseux 級数根という。これらの 2 つをまとめてべき級数根という。代数関数の根基表現は 5 次以上では一般に不可能であるが、Taylor 級数根や Puiseux 級数根は容易に計算できるので [KT78, SK99]、これらは計算代数では非常に有用である。展開点が異なれば異なるべき級数根が得られるが、根という観点からは同等であり、異なる展開点での根どうしの間にはべき級数根が解析的につながるという意味で 1 対 1 の対応が存在する。この対応を決めるのが解析接続であると言える。

最近、多変数多項式の近似因数分解における基礎算法として、べき級数根の解析接続が計算代数の分野で注目された。Sasaki らは 10 年も以前に、べき級数根の組合せによる近似因数分解算法を考案したが [SSKS91, SSH92]、その後の実験によると、与多項式が低次でない限りべき級数を高次まで計算する必要があり、誤差の拡大等で計算が正しく行われない場合が多々あることが分った。それに対し Sasaki は最近、べき級数根の非常に効率的な組合せ方法を考案するとともに、複数の展開点でのべき級数根を利用して計算を安定化させ効率化させることを提案した [Sas01]。展開点を複数個選んだ場合、異なる展開点でのべき級数根の対応づけを行う必要があるが、それは解析接続に他ならない。また、Corless らは最近、近似因数分解の数値算法を提案したが [CGHKW01]、それは根となる一つの代数関数の値を多くの点で計算し、それらの値から近似因子を補間する算法である。さらに、Galligo らは特異点近傍にいくつかの展開点を選び、そこでのべき級数根から \mathbb{C} 上の多項式因子を決定する算法を提案している [GW97, GR01]。これらの算法は解析接続に基づいているが、解析接続自体はほとんど考察されていない。

*sasaki@math.tsukuba.ac.jp

†inaba@math.tsukuba.ac.jp

本稿では、代数関数の解析接続に対して、三つの方法を提案・検討する。第一の方法は Taylor 級数の初項 (定数項) の対応づけを Smith の定理を利用して行う。第二の方法は級数の初項の対応づけを最小根の上界定理を用いて行う。第三の方法は級数の先頭の数項を利用するものである。これら三つの方法を性能と有用性の両面から比較検討する。また、Puiseux 級数根の接続法も提案・検討する。

なお、Smith の定理を利用する方法に関しては、Shiihara と Sasaki が代数関数の Riemann 面を決定する論文で既に発表している [SS96]。しかしながら、Puiseux 級数根と Taylor 級数根が混在する場合には彼らの方法は適用できず、Puiseux 級数根だけの場合でも、正しく対応づけられることが保証されたわけではない。本稿では、正しい対応づけを保証することも含めて解析接続法を検討する。

本稿では紙面の都合上、いくつかの証明や例などを割愛した。詳しくは論文 [SI02] を参照されたい。

2. Smith の定理に基づく方法

本稿では簡単のため、 $|a-b| \ll 1$ として、 a と b におけるべき級数根を直接に対応づけることを考える。以下、

$$F(x, a) = f_n(a)(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n), \quad F(x, b) = f_n(b)(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n) \quad (2)$$

とする。 a と b は特異点でないとするので、 $\alpha_i \neq \alpha_j, \beta_i \neq \beta_j$ ($\forall i \neq j$) である。

数値解析で著名な定理の一つに下記の Smith の定理がある [Smi70]。

定理 1 (Smith)

$P(x) \in \mathbb{C}[x]$ は n 次でモニックとし、 $\zeta_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$) は与えられた数とする。 n 個の正数 r_1, \dots, r_n を次式で定める。

$$r_i = \frac{n|P(\zeta_i)|}{|\prod_{j=1, j \neq i}^n (\zeta_i - \zeta_j)|} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

D_1, \dots, D_n は複素平面上の n 個の円盤で、中心 $(D_i) = \zeta_i$, 半径 $(D_i) = r_i$ ($i = 1, \dots, n$) とする。このとき、合併 $D_1 \cup \dots \cup D_n$ は $P(x)$ の全ての根を含む。また、合併 $D_1 \cup \dots \cup D_m$ が単連結で、他の円盤 D_j ($j > m$) のいずれとも非連結ならば、その合併が含む根の個数は m である。■

この定理は、 $P(x) = F(x, b)$, $\zeta_i = \alpha_i$ とすることにより、以下の系が示すように $F(x, a)$ の根と $F(x, b)$ の根の対応づけに利用できる。

系 2

λ は $0 \leq |\lambda| \leq 1$ なる数とし、 $\tilde{P}(x, \lambda)$ を次のように定める。

$$\tilde{P}(x, \lambda) = F(x, a + \lambda(b - a)) \quad (4)$$

$\tilde{D}_1(\lambda), \dots, \tilde{D}_n(\lambda)$ は $\tilde{P}(x, \lambda)$ に対する Smith の円盤、ただし中心 $(\tilde{D}_i) = \alpha_i$ ($i = 1, \dots, n$)、とする。 λ を 0 から 1 に到る複素平面上の経路に沿って動かすとき、 $\tilde{D}_1(\lambda), \dots, \tilde{D}_n(\lambda)$ が互いに非連結であれば、対応 $\alpha_i \longleftrightarrow \beta_i$ ($i = 1, \dots, n$) が成立する。ここで、 β_i は $\tilde{D}_i(\lambda)$ に含まれる $F(x, b)$ の根である。したがって α_i に最も近い。■

証明 1 変数多項式の根は係数の連続関数であるから、 λ を 0 から 1 に連続的に変えるとき、 $\tilde{P}(x, 0)$ の全ての根は $\tilde{P}(x, 1)$ の対応する根に連続的に移っていく。一方、Smith の円盤 $\tilde{D}_1(\lambda), \dots, \tilde{D}_n(\lambda)$ は互いに非連結と仮定したから、Smith の定理より、 $\tilde{P}(x, \lambda)$ の n 個の根はこれら n 個の円盤に 1 個ずつ含まれる。したがって、各 i ($1 \leq i \leq n$) に対し、 $\tilde{D}_i(0)$ に含まれる根 α_i と $\tilde{D}_i(1)$ に含まれる根 β_i が 1 対 1 に対応する。■

上記の系を実際計算で使用するには、 λ を動かすとき各円盤が重ならないとの条件のチェック法を工夫する必要がある。まず、 a と b を結ぶ経路は直線とする。すなわち、 λ は実数で $0 \leq \lambda \leq 1$ とする。このとき、各円盤が重ならないとの条件を次の十分条件で置き換える。

条件 S: $i = 1, \dots, n$ に対し、区間 $0 \leq \lambda \leq 1$ で $\tilde{D}_i(\lambda)$ の半径が最大となる点を $\lambda = \lambda_i$ とするとき、 $\tilde{D}_1(\lambda_1), \dots, \tilde{D}_n(\lambda_n)$ が互いに非連結である。

また、 λ を 0 から 1 に変えるとき、多くの場合、円盤の半径は 0 から単調に増大することを考慮して、次の条件 S'1 \wedge S'2 を必要条件として事前にチェックする。

条件 S'1: $\tilde{D}_1(1), \dots, \tilde{D}_n(1)$ が互いに非連結である。

条件 S'2: 各 $|F(\alpha_i, a + \lambda(b-a))|$ が区間 $0 \leq \lambda \leq 1$ で単調増加である。

$\tilde{D}_i(\lambda)$ の最大値は、 λ に 0.0, 0.1, \dots , 0.9, 1.0 の 11 個の値を代入することにより近似的に計算し、条件 S'2 は $\tilde{D}_i(\lambda)$ の特性を活かした簡便な方法 (十分条件) でチェックする。

通常、Smith の円盤の半径が根差 $|\alpha_i - \beta_i|$ の約 n 倍になるが、これは次の理由による。 $\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_i^{(k)} - P(\alpha_i^{(k)}) / \prod_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_i^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ は $P(x)$ の根 α_i を計算するための 2 次収束算式であり、 $\alpha_i^{(k)} \simeq \alpha_i$ ($i = 1, \dots, n$) のとき、 $|\alpha_i^{(k+1)} - \alpha_i| = O(|\alpha_i^{(k)} - \alpha_i|^2)$ となる。

3. 最小根の上界定理に基づく方法

1 変数多項式が原点近傍に m 個の近接根を持つ場合、それらの根を他の根から区別するための定理がある [TS00]。本章ではその定理を $m = 1$ の場合に限定して強めた定理を導き、次に、その定理に基づいて対応 $\alpha_i \longleftrightarrow \beta_i$ を決定する方法を提示する。

次の条件を満たす 1 変数多項式 $P(x)$ を考える。

$$\begin{cases} P(x) = c_n x^n + \dots + c_2 x^2 + x + \varepsilon, & c_n \neq 0, \\ \max\{|c_n|, \dots, |c_2|\} = 1, & |\varepsilon| \ll 1. \end{cases} \quad (5)$$

$P(x)$ は絶対値が ε 程度の“微小根” $\hat{\zeta}$ を持つ。

定理 3

$P(x)$ の絶対値最小の根を $\hat{\zeta}$ 、それ以外の任意の根を $\check{\zeta}$ とする。

$$0 < |\varepsilon| < 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.172 \quad (6)$$

であるならば、 $|\hat{\zeta}|$ と $|\check{\zeta}|$ に対して次の不等式が成立する。

$$|\hat{\zeta}| < \frac{(1 + |\varepsilon|) - \sqrt{(1 + |\varepsilon|)^2 - 8|\varepsilon|}}{4}, \quad \frac{(1 + |\varepsilon|) + \sqrt{(1 + |\varepsilon|)^2 - 8|\varepsilon|}}{4} < |\check{\zeta}| \quad (7)$$

証明 紙面の関係で割愛する。詳しくは論文 [SI02] を参照。 ■

上記定理を使えば根 α_i と β_i を対応づけられることが次の系より分る。

系 4

λ は $0 \leq |\lambda| \leq 1$ なる数とし、 $\tilde{P}_i(x, \lambda)$ を次のように定める。

$$\tilde{P}_i(x, \lambda) = F(x + \alpha_i, a + \lambda(b-a)) \quad (8)$$

$\tilde{P}(x, \lambda)$ を次式のように表し、 $\varepsilon(\lambda)$ を下式で定める。

$$\tilde{P}_i(x, \lambda) = c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0, \quad c_1 \neq 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_i(\lambda) = |c_0/c_1| \cdot \max\{ \sqrt[n-1]{|c_n/c_1|}, \dots, \sqrt[2]{|c_3/c_1|}, |c_2/c_1| \}. \quad (10)$$

λ を 0 から 1 に到る複素平面上の経路に沿って動かすとき、 $\varepsilon_i(\lambda) < 3 - 2\sqrt{2}$ であるならば、 $F(x + \alpha_i, b)$ の絶対値最小の根 $\hat{\beta}_i (= \beta_i - \alpha_i)$ と α_i が 1 対 1 に対応する。

証明 正数 η を $|c_1 \eta| = \max\{|c_n \eta^n|, \dots, |c_2 \eta^2|\}$ を満たすように定め、(9) の $\tilde{P}_i(x, \lambda)$ に対して $x \rightarrow \eta x$ なる変換を行うと、条件 $\varepsilon_i(\lambda) < 3 - 2\sqrt{2}$ は定理 3 における $|\varepsilon|$ に対する条件と等価であることが分る。 $\tilde{D}_i(\lambda)$ は中心が原点にあり半径が $\tilde{r}_i(\lambda) = [(1 + \varepsilon_i(\lambda)) - \sqrt{(1 + \varepsilon_i(\lambda))^2 - 8\varepsilon_i(\lambda)}] / 4$ の円盤とする。 $\tilde{D}_i(0)$ は半径が 0 だが $\tilde{P}_i(x, 0)$ の根 0 を含む。 $0 < \lambda \leq 1$ なる λ に対しては、定理 3 より、 $\tilde{P}_i(x, \lambda)$ の根で $\tilde{D}_i(\lambda)$ に含まれるものはただ一つであることが分る。このことと、方程式の根が係数の連続関数であることから、系が成立する。なお、 $\hat{\beta}_i \longleftrightarrow \alpha_i$ の対応より $\beta_i \longleftrightarrow \alpha_i$ なる対応が成立する。 ■

上記の系を実際計算で使用するには、 λ を動かすとき $\varepsilon_i(\lambda) < 3 - 2\sqrt{2}$ となることをチェックしなければならない。前章と同様、 λ は実数で $0 \leq \lambda \leq 1$ とし、

$$F(x + \alpha_i, a + \lambda(b - a)) = \tilde{f}_n(\lambda)x^n + \tilde{f}_{n-1}(\lambda)x^{n-1} + \cdots + \tilde{f}_0(\lambda) \quad (11)$$

とおく。 $\tilde{f}_0(\lambda) = F(\alpha_i, a + \lambda(b - a))$ であり、 λ を 0 から 1 に動かすとき、 $|\tilde{f}_0(\lambda)|$ は急激に変化するが、他の係数は大きくは変動しないことを考慮して、条件 $\varepsilon_i(\lambda) < 3 - 2\sqrt{2}$ を次の十分条件で置き換える。

条件 B: 計算式(10)において、 $|c_1|, |c_0|, |c_2|, \dots, |c_n|$ をそれぞれ $|\tilde{f}_1(\lambda)|$ の最小値と $|\tilde{f}_0(\lambda)|, |\tilde{f}_2(\lambda)|, \dots, |\tilde{f}_n(\lambda)|$ の最大値で置き換えても $\varepsilon_i(\lambda) < 3 - 2\sqrt{2}$ が成立する。

条件 B のチェックは時間がかかるので、その前に次の条件 B' を必要条件としてチェックする。

$$\text{条件 B': } \varepsilon_i(1) < 3 - 2\sqrt{2}$$

4. Taylor 級数根を用いる方法

べき級数根の先頭の数項を使えば、 $F(x, b)$ の根の存在範囲をより狭く限定できるはずである。すなわち、定理 3 の系として、下記を追加する。

系 5

$F(x, u)$ の展開点 a におけるべき級数根を l 次、ただし $l \geq 1$ 、で打ち切った“近似根”を $\phi_1^{(l)}(u - a), \dots, \phi_n^{(l)}(u - a)$ とする。 λ は $0 \leq |\lambda| \leq 1$ なる数とし、

$$\tilde{P}_i(x, \lambda) = F(x + \phi_i^{(l)}(\lambda(b - a)), a + \lambda(b - a)) \quad (12)$$

とする。 $\tilde{P}_i(x, \lambda)$ を (9) のように表し、 $\varepsilon_i(\lambda)$ を (10) で定める。 λ を 0 から 1 に到る複素平面上の経路に沿って動かすとき、 $\varepsilon_i(\lambda) < 3 - 2\sqrt{2}$ であるならば、 $F(x + \phi_i^{(l)}(b - a), b)$ の絶対値最小の根 $\hat{\beta}_i (= \beta_i - \phi_i^{(l)}(b - a))$ と α_i が 1 対 1 に対応する。 ■

5. 三つの方法の比較

まず、 x に関して 10, 20, 50 次 (項数はそれぞれ約 30, 30, 40) の 2 変数多項式を各 10 個ずつランダムに生成し、2~4 章で提案した三つの方法について実験を行った。

表1～3は $a = 0$ とし、 b を各表の第1段目にある値に設定して、三つの方法で解析接続した場合、 $|a - b|$ がどの程度以下ならば接続できるかを表している。第2～4段目にある整数は、10個のサンプルのうち、全ての根の接続が成功したサンプル数を表している。なお、 $F(x, 0)$ の根を求める為の計算時間は省いている。

表1: Smithの定理に基づく方法

次数	平均時間 (sec)	0.100	0.033	0.010	0.003	0.001
10	0.021	2	6	2		
20	0.056		3	4	3	
50	0.260			2	5	3

表2: 最小根の上界定理に基づく方法

次数	平均時間 (sec)	0.100	0.033	0.010	0.003	0.001
10	0.031	3	6	1		
20	0.121	3	2	4	1	
50	0.974	1	2	4	3	

表3: Taylor級数根を用いる方法(3次まで展開)

次数	平均時間 (sec)	0.500	0.200	0.080	0.050	0.020
10	0.138	3	6	1		
20	0.377		7	2	1	
50	2.182		3	7		

次に、 $F(x, u) = x^{10} + (u - 2)x^9 + (2u^2 - 3u - 1)x^8 + (u^5 + 3u^2 - 3)x^5 - (u^5 + 2u^3 + 3u - 3)x^3 + (u^4 - 3u^2 + 5)x + (u^5 - 3u^2 - 7)$ に対し、その特異点の一つ $u \simeq 1.843774074$ の近傍での接続状況を Taylor 級数根を用いる方法で調べた (l 次まで展開、ただし $l \leq 4$ で、 $l = 0$ のときは実質的には最小根の上界定理に基づく方法と同様)。ここで、 $a = 1.844$ および $a = 1.8438$ と二通りに固定して、それぞれに対し $b = a + w$ ($w > 0$) として実験を行った。表4はその結果で、 $w_{\max}^{(l)}$ は全ての根の対応づけに成功したときの w の最大値であり、 $T^{(l)}$ は全ての根の接続に要した時間を表している。

表4: 特異点近傍における接続状況

l	$a = 1.844$		$a = 1.8438$	
	$w_{\max}^{(l)}$	$T^{(l)}$ (sec)	$w_{\max}^{(l)}$	$T^{(l)}$ (sec)
0	1.54×10^{-4}	0.041	1.77×10^{-5}	0.044
1	3.72×10^{-4}	0.071	4.29×10^{-5}	0.073
2	4.44×10^{-4}	0.082	5.12×10^{-5}	0.086
3	7.62×10^{-4}	0.091	8.85×10^{-5}	0.096
4	8.66×10^{-4}	0.106	9.97×10^{-5}	0.109

本章と2～4章の結果をまとめると、上述の三つの方法には次のことがいえる。

Smithの定理に基づく方法:

1. 比較的次数の低い多項式での解析接続に有用である。
2. 全ての根に対し円盤を計算しなければ円盤の重なりが分らないので、特定の根だけの対応をつけるときは余計な計算をすることになる。

最小根の上界定理に基づく方法：

1. Smith の定理に基づく方法よりも次数の高い多項式での解析接続で有効である。
2. 他の根の情報を必要とせず、単独の根の接続で無駄な計算をしない。

Taylor 級数根を用いる方法：

1. 性能 ÷ コストの点で最小根の上界定理に基づく方法と有用性は差がない。
2. 特異点の近傍における接続では有用であろう。

6. Puiseux 級数根の接続

本章では一般性を失うことなく、 $F(x, u)$ は原点に特異点を持つとする。異なる特異点での Puiseux 級数根の接続は途中の非特異点を経由して行うので、本章では b は非特異点で $|b| \ll 1$ と仮定する。次に、原点が特異点で $f_n(0) = 0$ となる場合、 $f_n(u) = u^d \tilde{f}_n(u)$, $\tilde{f}_n(0) \neq 0$ とおける。そこで、 $\tilde{F}(x, u) = u^{(n-1)d} F(x/u^d, u)$ と変換すると、 $\tilde{F}(x, u) = \tilde{f}_n(u)x^n + f_{n-1}(u)x^{n-1} + u^d f_{n-2}x^{n-2} + \dots$ となり、 $\tilde{F}(x, u)$ の根を $\tilde{\phi}(u)$ とするとき、 $F(x, u)$ の対応する根 $\phi(u)$ は $\phi(u) = \tilde{\phi}(u)/u^d$ となる。したがって、一般性を失うことなく、本章ではさらに $f_n(0) \neq 0$ を仮定する。

原点が特異点で $f_n(0) \neq 0$ の場合、 $f_0(0) = f_1(0) = \dots = f_{m-1}(0) = 0$, $f_m(0) \neq 0$ を満たす $2 \leq m \leq n$ なる整数 m が存在し、 $F(x, u)$ は原点で一般に Puiseux 級数根を持つ。 $f_j(u)$ の最低次数項の次数を $\text{ord}(f_j)$ と表す。有理数 ν を次式で定め、下記の変換を行う。

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \min\{ \text{ord}(f_j)/(m-j) \mid j = 0, 1, \dots, m-1 \}, \quad (13)$$

$$\tilde{F}(y, u) = F(u^\nu y, u)/u^{\nu m}. \quad (14)$$

このとき、 $\tilde{F}(y, 0)$ では m よりも大きい次数の項は全て消え、 $\tilde{F}(y, 0)$ は m 個の根を持つ ($F(x, 0)$ の 0 でない $n-m$ 個の根は ∞ に移動する)。 $\tilde{F}(y, 0)$ の単根は $\tilde{F}(y, u)$ の Taylor 級数根を生成するので、3章と4章で述べた方法で解析接続できる。 $\tilde{F}(y, 0)$ の重根に対しては単根が現れるまで上記の変換を繰り返し行う必要がある。なお、この方法では一部の根のみを扱うので、Smith の定理に基づく方法は使えないことを注意しておく。

参考文献

- [CGHKW01] Corless R.M., Giesbrecht M.W., van Hoeij M., Kotsireas I.S. and Watt S.M.: Towards factoring bivariate approximate polynomials. Proc. ISSAC 2001, ACM Press, 2001, 85-92.
- [GR01] Galligo A. and Rupprecht D.: Semi-numerical determination of irreducible branches of a reduced space curve. Proc. ISSAC 2001, ACM Press, 2001, 137-142.
- [GW97] Galligo A. and Watt S.M.: A numerical absolute primality test for bivariate polynomials. Proc. ISSAC'97, ACM Press, 1997, 217-224.
- [KT78] Kung H.T. and Traub J.F.: All algebraic functions can be computed fast. J. ACM **25** (1978), 245-260.
- [SI02] Sasaki T. and Inaba D.: On analytic continuation of algebraic function. preprint(Univ. Tsukuba), 2002, 14pages.
- [SK99] Sasaki T. and Kako F.: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, Japan J. Indus. Appl. Math., **16** (1999), 257-285.
- [SSKS91] Sasaki T., Suzuki M., Kolář M. and Sasaki M.: Approximate factorization of multivariate polynomials and absolute irreducibility testing. Japan J. Indus. Appl. Math., **8** (1991), 357-375.
- [SSH92] Sasaki T., Saito T. and Hilano T.: Analysis of approximate factorization algorithm I. Japan J. Indust. Appl. Math., **9** (1992), 351-368.
- [SS96] Shiihara K. and Sasaki T.: Analytic continuation and Riemann surface determination of algebraic functions by computer. Japan J. Indus. Appl. Math., **13** (1996), 107-116.

- [Sas01] Sasaki T.: Approximate multivariate polynomial factorization based on zero-sum relations. Proc. ISSAC 2001, ACM Press, 2001, 285-291.
- [Smi70] Smith B. T.: Error bounds for zeros of a polynomial based on Gerschgorin's theorems. J. ACM, **17** (1970), 661-674.
- [TS00] Terui A. and Sasaki T.: "Approximate zero-points" of real univariate polynomial with large error terms. J. of IPSJ (Information Processing Society of Japan), **41** (2000), 974-989.