

REDUCEによる有理型差分方程式の保存量の計算

高 敏 (Min Gao) *
 広島大学大学院工学研究科

加藤泰幸 (Yasuyuki Kato) †
 広島大学大学院工学研究科

伊藤雅明 (Masaaki Ito) ‡
 広島大学大学院工学研究科

1 はじめに

差分方程式の保存量を求めることは、その方程式自身の可積分性を知る上で重要であるばかりでなく、現実の現象を記述する微分方程式の差分スキームとしての安定性を議論する上でも欠かせないものである。多項式型の微分方程式や差分方程式に対しては計算機を用いて具体的な多項式型の保存量を求めるためのアルゴリズム及びその数式処理プログラムが幾つか開発されている。また、多項式型の微分方程式を差分化したからといって、その差分方程式や保存量は多項式型になるとは限らず、有理型になることもある。本研究においては一変数有理型差分方程式の保存量の性質を調べ、その性質を用いて具体的な保存量を求めるための数式処理プログラムを数式処理システム (REDUCE) 上にインプリメントした。開発したプログラムは、与えられた方程式の保存量を自動的に求めるものである。

2 有理型の保存量

次の非線形振動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\alpha x - \beta x^3, \quad \alpha, \beta \text{は正の定数}, \quad (1)$$

の保存量 H は次式で与えられることが知られている、

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{\beta}{4} x^4. \quad (2)$$

Hirota による差分化を用いると、(1) 式は次のように差分化される

$$\frac{x(t+\delta) + x(t-\delta)}{1 - \beta\delta^2 b_1 x(t+\delta)x(t-\delta)} = \frac{2x(t)A_0}{1 + \beta^2 b_2 x(t)^2}. \quad (3)$$

ここで、 $A_0 = (1 - 2\alpha\delta^2 a_2)/(1 + 2\alpha\delta^2 a_1)$, $a_1 + a_2 = 1/2$, $b_1 + b_2 = 1$ である。

$x(t \pm \delta) = x_{m \pm 1}$ を用いて (3) 式を書き換えると次式が得られる、

$$x_{m+1} = \frac{2A_0 x_m - x_{m-1} - b_2 \beta \delta^2 x_m^2 x_{m-1}}{1 - 2A_0 b_1 \beta \delta^2 x_m x_{m-1} - b_2 \beta \delta^2 x_m^2}. \quad (4)$$

*gaomin@amath.hiroshima-u.ac.jp

†ykato@amath.hiroshima-u.ac.jp

‡ito@amath.hiroshima-u.ac.jp

この差分方程式の保存量は

$$H_m = \frac{x_m^2 - A_0 x_m x_{m-1} + x_{m-1}^2 + \beta \delta^2 (b_1 + b_2) x_m^2 x_{m-1}^2}{1 + 2A_0 b_1 \beta \delta^2 x_m x_{m-1} - b_1 b_2 \beta^2 \delta^4 x_m^2 x_{m-1}^2} \quad (5)$$

となることが Hirota によって示されている。これは連続の場合の保存量 (2) の差分版であり、 $b_1 \neq 0, \delta \neq 0$ のとき保存量は有理式になる。また、差分方程式 (4) は次の二つ性質を持っている：[1] 陽的 (explicit) である、[2] 時間反転 ($\delta \rightarrow -\delta$) に対して不変である。

3 保存量の構成

時間が連続のときの保存量 H が $x, \frac{dx}{dt}$ の多項式であっても、対応する差分方程式の保存量 H_m は x_m, x_{m-1} の多項式とは限らず、一般には x_m, x_{m-1} の有理式で表される可能性がある。まず最初に性質 [1] をもつ陽的な 2 階差分方程式

$$x_{m+1} = \frac{F(x_m, x_{m-1})}{G(x_m, x_{m-1})} \quad (\text{rank } 1/\text{rank } 0) \quad (6)$$

の保存量を考える。ここで、 F および G は x_m, x_{m-1} の多項式とする。この式の両辺に G をかけると、 x_{m+1}, x_m, x_{m-1} に関する多項式型の差分方程式 $R(x_{m+1}^1, x_m, x_{m-1}) = 0$ (以下 $R = 0$ と略す) が得られる。ここで、 $R(x_i^P, \dots)$ は R が x_i に関しては P 次の項のみを含むことを意味する。

次に RANK k ($\text{rank } k/\text{rank } 0$) の保存量が次の有理式で表されると仮定する：

$$H_m^k = \frac{\sum_{j=k}^{l_k} \sum_{i=0}^j c_{i,j,k} \delta^{j-k} x_{m-1}^i x_m^{j-i}}{1 + \sum_{j=0}^{\bar{l}_k} \sum_{i=0}^j d_{i,j,k} \delta^j x_{m-1}^i x_m^{j-i}} \quad (7)$$

ここで、 $c_{i,j,k}, d_{i,j,k}$ は定数、 l_k, \bar{l}_k は適度な正の整数である。これらが差分方程式 $R = 0$ の保存量であれば、 $\Delta H_m^k = H_{m+1}^k - H_m^k \propto R(x_{m+1}^1, x_m, x_{m-1})$ と表されるはずである。具体的な保存量を求める方法は次の 2 つ step からなっている。[Step 1] 保存量として未定係数を含んだ (7) 式の形を仮定する、[Step 2] $\Delta H_m^k = 0$ となるように未定係数を決める。ところが Step 1 において多くの未定係数が入ると、Step 2 で用いる Gröbner 基底計算に膨大な時間がかかってしまう。そこで、本研究においては、まず陽的な差分方程式が得られるための保存量の構造を調べ、該当する差分方程式に対しては、その範囲で具体的な保存量が存在するかを調べることにする。陽的な差分方程式を与える保存量の候補としては次のようなものがある。
候補 1.

多項式型の保存量 h_m

I. $h_m = x_m + \sum_{i=0}^n c_i \delta^i x_{m-1}^{i+1}$ 、又は $h_m = x_m x_{m-1}$ 。

これらの h_m に対して時間差分を計算すると

$$\Delta h_m \propto R(x_{m+1}^1, x_m, x_{m-1}, \delta)$$

となる。 h_m が保存量であれば、 $\Delta h_m = 0 \rightarrow R = 0 \rightarrow x_{m+1} = F(x_m, x_{m-1})$ が得られる。

II. $h_m = \sum_{i=0}^n \delta^i x_{m-1}^i (c_{i,1} x_m + c_{i,2} x_{m-1})$ 、又は $h_m = \sum_{i=0}^n c_i \delta^i x_m x_{m-1}^{i+1}$ 。

h_m の時間差分を計算すると

$$\Delta h_m \propto R(x_{m+1}^1, x_m, x_{m-1}, \delta)$$

となる。 h_m が保存量であれば、 $\Delta h_m = 0 \rightarrow R = 0 \rightarrow x_{m+1} = F(x_m, x_{m-1})/G(x_m)$ が得られる。

有理式型の保存量 h_m

$$\text{III. } h_m = \frac{\sum_{i=0}^n \delta^i x_{m-1}^i (c_{i,1} x_m + c_{i,2} x_{m-1})}{1 + \sum_{j=1}^l \delta^j x_{m-1}^{j-1} (d_{j,1} x_m + d_{j,2} x_{m-1})}, \text{ 又は } h_m = \frac{\sum_{i=0}^n c_i \delta^i x_m x_{m-1}^{i+1}}{1 + \sum_{j=1}^l \delta^j x_{m-1}^{j-1} (d_{j,1} x_m + d_{j,2} x_{m-1})}.$$

h_m の時間差分を計算すると

$$\Delta h_m \propto R(x_{m+1}^1, x_m, x_{m-1}, \delta)$$

となる。 h_m が保存量であれば、 $\Delta h_m = 0 \rightarrow R = 0 \rightarrow x_{m+1} = F(x_m, x_{m-1})/G(x_m, x_{m-1})$ が得られる。また、 h_m だけではなく、 h_m^2 および $h_m^2/(1 + \delta h_m)$ の時間差分により、次のような新たな陽的な差分方程式が得られる。

$A(h_m)$: $\Delta h_m = h_{m+1} - h_m = R$ 、 $R = 0$ に対する保存量は h_m である。

$B(h_m^2)$: $\Delta h_m^2 \propto (h_{m+1} - h_m)(h_{m+1} + h_m) = R * R'$ 、 $R' = h_{m+1} + h_m = 0$ に対する保存量は h_m^2 である。

$C(h_m^2/(1 + \delta h_m))$: $\Delta(h_m^2/(1 + \delta h_m)) \propto (h_{m+1} - h_m)(h_{m+1} + h_m + \delta h_{m+1} h_m) = R * R''$ 、 $R'' = h_{m+1} + h_m + \delta h_{m+1} h_m = 0$ に対する保存量は $h_m^2/(1 + \delta h_m)$ である。

I, II, III 型の保存量 h_m を基にして A, B, C によって生成される差分方程式 (6) は次の表で与えられる:

	I(h_m)	II(h_m)	III(h_m)
A	$F(x_m, x_{m-1})$ (以下 F と略す)	$F/G(x_m)$	$F/G(x_m, x_{m-1})$
B	F	$F/G(x_m)$	$F/G(x_m, x_{m-1})$
C	$F/G(x_m, x_{m-1})$	$F/G(x_m, x_{m-1})$	$F/G(x_m, x_{m-1})$

$H_m = h_m, (h_m^2, h_m^2/(1 + \delta h_m))$ は対応する差分方程式 $R, (R', R'') = 0$ の保存量であるので、与えられた差分方程式 $R_g = 0$ がそれらの差分方程式 $R, (R', R'') = 0$ に一致すれば、その保存量は上記のような形として求められる。

次に性質 [2] (時間反転 ($\delta \rightarrow -\delta$) に対して不変である) をもつ差分方程式

$$R(x_{m+1}, x_m, x_{m-1}, \delta) = 0, \quad (8)$$

を取り扱う、 R は性質 [2] により、時間反転 ($\delta \rightarrow -\delta$) に対して不変であるので、次式を満たす、

$$R(x_{m+1}, x_m, x_{m-1}, \delta) = R(x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, -\delta) = 0 \quad (9)$$

また、 $H_m(x_m, x_{m-1}, \delta)$ が差分方程式の保存量であれば、

$$\Delta H_m(x_m, x_{m-1}, \delta) = 0, \quad (10)$$

$$H_m(x_{m+1}, x_m, \delta) - H_m(x_m, x_{m-1}, \delta) \propto R(x_{m+1}, x_m, x_{m-1}, \delta) \quad (11)$$

となり、時間反転 ($\delta \rightarrow -\delta$) および (9) を用いると、(11) 式は

$$H_m(x_{m-1}, x_m, -\delta) - H_m(x_m, x_{m+1}, -\delta) \propto R(x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, -\delta) = 0 \quad (12)$$

となる。即ち、

$$\Delta H_m(x_m, x_{m-1}, \delta) = 0 \rightarrow \Delta H_m(x_{m-1}, x_m, -\delta) = 0$$

このことより $H_m(x_{m-1}, x_m, -\delta)$ も保存量であることが分かる。これは保存量の対称性とよばれる。以下、

$\bar{H}_m(x_m, x_{m-1}, \delta) = H_m(x_m, x_{m-1}, \delta) |_{m \leftrightarrow m-1, \delta \rightarrow -\delta} = H_m(x_{m-1}, x_m, -\delta)$ とおく。有理型関数 H_m

$$H_m = \frac{f_e + f_o}{g_e + g_o}$$

が保存量であれば、

$$\bar{H}_m = \frac{\tilde{f}_e - \tilde{f}_o}{\tilde{g}_e - \tilde{g}_o}$$

も保存量となる。ここで、 f_e, f_o, g_e, g_o は x_m, x_{m-1} に関する多項式である。

$f_e(x_m, x_{m-1}, \delta^{2k})$ は δ に関する偶関数であり、 $f_o(x_m, x_{m-1}, \delta^{2k-1})$ は奇関数である ($k = 1, 2, \dots$)。 g_e, g_o も同様である。また、上記における記号“ \sim ”は

$$\tilde{f} = \tilde{f}(x_m, x_{m-1}, \delta) = f(x_m, x_{m-1}, \delta) |_{m \leftrightarrow m-1} = f(x_{m-1}, x_m, \delta)$$

として定義する。 H_m と \bar{H}_m の和又は差もまた保存量であり、これらを次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{H}_m^\pm &= H_m \pm \bar{H}_m \\ &= \frac{f_e + f_o}{g_e + g_o} \pm \frac{\tilde{f}_e - \tilde{f}_o}{\tilde{g}_e - \tilde{g}_o} \\ &= \frac{f_e \tilde{g}_e - f_e \tilde{g}_o + f_o \tilde{g}_e - f_o \tilde{g}_o \pm (\tilde{f}_e g_e + \tilde{f}_e g_o - \tilde{f}_o g_e - \tilde{f}_o g_o)}{g_e \tilde{g}_e - g_e \tilde{g}_o + g_o \tilde{g}_e - g_o \tilde{g}_o} \end{aligned}$$

ここで、 $f_e, f_o, g_e, g_o, \dots$ 等を単項式 (g_{ei}, \tilde{g}_{ei}) を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} g_e \tilde{g}_e &= (g_{e1} + g_{e2} + \dots)(\tilde{g}_{e1} + \tilde{g}_{e2} + \dots) \\ &= g_{e1} \tilde{g}_{e1} + (g_{e1} \tilde{g}_{e2} + \tilde{g}_{e1} g_{e2}) + g_{e2} \tilde{g}_{e2} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$g_o \tilde{g}_o$ も同様。

$$\begin{aligned} f_e \tilde{g}_e + \tilde{f}_e g_e &= (f_{e1} + f_{e2} + \dots)(\tilde{g}_{e1} + \tilde{g}_{e2} + \dots) + (\tilde{f}_{e1} + \tilde{f}_{e2} + \dots)(g_{e1} + g_{e2} + \dots) \\ &= (f_{e1} \tilde{g}_{e1} + \tilde{f}_{e1} g_{e1}) + (f_{e1} \tilde{g}_{e2} + \tilde{f}_{e1} g_{e2}) \\ &\quad + (f_{e2} \tilde{g}_{e1} + \tilde{f}_{e2} g_{e1}) + (f_{e2} \tilde{g}_{e2} + \tilde{f}_{e2} g_{e2}) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

$f_o \tilde{g}_o + \tilde{f}_o g_o$ も同様。

$$\begin{aligned} f_e \tilde{g}_o - \tilde{f}_e g_o &= (f_{e1} + f_{e2} + \dots)(\tilde{g}_{o1} + \tilde{g}_{o2} + \dots) - (\tilde{f}_{e1} + \tilde{f}_{e2} + \dots)(g_{o1} + g_{o2} + \dots) \\ &= (f_{e1} \tilde{g}_{o1} - \tilde{f}_{e1} g_{o1}) + (f_{e1} \tilde{g}_{o2} - \tilde{f}_{e1} g_{o2}) \\ &\quad + (f_{e2} \tilde{g}_{o1} - \tilde{f}_{e2} g_{o1}) + (f_{e2} \tilde{g}_{o2} - \tilde{f}_{e2} g_{o2}) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

$f_o \tilde{g}_e - \tilde{f}_o g_e$ 及び $g_e \tilde{g}_o - \tilde{g}_e g_o$ も同様。以上をまとめると、保存量の式の中の全ての項が pair (例えば、偶関数の場合 $\delta^2 x_m^2 x_{m-1}$ と $\delta^2 x_m x_{m-1}^2$ 、奇関数の場合 $\delta x_m^2 x_{m-1}$ と $\delta x_m x_{m-1}^2$) で存在し、次のように表される、

$$H_m = \frac{\text{偶同奇反} \quad \text{or} \quad \text{偶反奇同}}{\text{偶同奇反}}$$

ここで、偶関数(偶)と奇関数(奇)の係数の絶対値は同じで、その符号は同じ(同)か、反対(反)である。このことにより III の有理型保存量は対称性を付加すると、保存量は次のように表される、

$$H_{m,1}^1 = \frac{x_m + x_{m-1}}{1 + c_1 \delta (x_m - x_{m-1}) + c_2 \delta^2 x_m x_{m-1}}, \quad (16)$$

$$H_{m,2}^1 = \frac{x_m - x_{m-1} + c_3 \delta x_m x_{m-1}}{1 + c_4 \delta (x_m - x_{m-1}) + c_5 \delta^2 x_m x_{m-1}}, \quad (17)$$

$$H_m^2 = \frac{x_m x_{m-1}}{1 + c_6 \delta (x_m - x_{m-1}) + c_7 \delta^2 x_m x_{m-1}}, \quad (18)$$

$H_m = f/g$ が保存量であれば、 $f/(g+cf)$ (c は定数) も保存量であるので、式 (17) は次のように簡約される、

$$H_{m,2'}^1 = \frac{x_m - x_{m-1} + c_3' \delta x_m x_{m-1}}{1 + c_5' \delta^2 x_m x_{m-1}}, \quad (19)$$

また、(18) は次のようになり、

$$H_{m'}^2 = \frac{x_m x_{m-1}}{1 + c_6' \delta (x_m - x_{m-1})}, \quad (20)$$

対称性を持つ有理型保存量 h_m は以上のように3つの形、即ち $H_{m,1}^1, H_{m,2}^1, H_m^2$ で表される。

候補 2.

次に差分方程式 $x_{m+1} - x_{m-1} = 0$ を考えると、次のような多項式型保存量が存在する。

RANK 1: $h_m^1 = x_m + x_{m-1}$

RANK 2: $h_m^2 = x_m^2 + x_{m-1}^2, x_m x_{m-1}$

...

RANK n : $h_m^n = x_m^n + x_{m-1}^n, x_m x_{m-1} (x_m^{n-2} + x_{m-1}^{n-2}), \dots, x_m^k x_{m-1}^k (x_m^{n-2k} + x_{m-1}^{n-2k}), \dots$
 $k = 0, 1, \dots, [n/2].$

差分方程式 $x_{m+1} - x_{m-1} = 0$ の任意の保存量を組み合わせた有理式 H_m^k もまた保存量であるので、これらの保存量の時間差分は $x_{m+1} - x_{m-1}$ に比例する ($\Delta H_m^k \propto x_m - x_{m-1}$)。 H_m^k が $H_m^k(x_m^1, x_m^1, x_{m-1})$ であることを考慮して時間差分を計算すると、

$$\Delta H_m^k \propto Q(x_{m+1}^2, x_{m+1}^1, x_m, x_{m-1}) \propto (x_{m+1} - x_{m-1}) R(x_{m+1}^1, x_m, x_{m-1})$$

となり、保存量は次のようになる。ここで、 Q は x_{m+1}, x_m, x_{m-1} の多項式関数で、 R は陽的な差分方程式である。

多項式型

$$H_m^2 = \frac{x_m^2 + x_{m-1}^2 + \tilde{c}_0 x_m x_{m-1}}{x_m x_{m-1} + x_m x_{m-1}}$$

RANK 2:

RANK 3:

有理式型

RANK 2:

$$H_m^2 = \frac{x_m^2 + x_{m-1}^2 + \tilde{c}_1 x_m x_{m-1} + \tilde{c}_2 \delta (x_m^2 x_{m-1} + x_m x_{m-1}^2) + \tilde{c}_3 \delta^2 x_m^2 x_{m-1}^2}{W_2}$$

RANK 3:

$$H_m^3 = \frac{x_m^2 x_{m-1} + x_m x_{m-1}^2}{W_3}$$

RANK 4:

$$H_m^4 = \frac{x_m^2 x_{m-1}^2}{W_4}$$

ここで、

$$W_k = 1 + d_{k,1} \delta (x_m + x_{m-1}) + d_{k,2} \delta^2 (x_m^2 + x_{m-1}^2) + d_{k,3} \delta^2 x_m x_{m-1} + d_{k,4} \delta^3 (x_m^2 x_{m-1} + x_m x_{m-1}^2) + d_{k,5} \delta^4 (x_m^2 x_{m-1}^2) \quad (k = 2, 3, 4)$$

また、対称性を考えると、有理型の保存量は次のようになる。

RANK 2:

$$H_m^2 = \frac{x_m^2 + x_{m-1}^2 + \tilde{c}_4 x_m x_{m-1} + \tilde{c}_5 \delta^2 x_m^2 x_{m-1}^2}{1 + d_1 \delta^2 (x_m^2 + x_{m-1}^2) + d_2 \delta^2 x_m x_{m-1} + d_3 \delta^4 x_m^2 x_{m-1}^2}$$

RANK 3:

$$H_m^3 = \frac{x_m^2 x_{m-1} + x_m x_{m-1}^2}{1 + d_4 \delta^2 (x_m^2 + x_{m-1}^2) + d_5 \delta^2 x_m x_{m-1} + d_6 \delta^4 x_m^2 x_{m-1}^2}$$

RANK 4:

$$H_m^4 = \frac{x_m^2 x_{m-1}^2}{1 + d_7 \delta^2 (x_m^2 + x_{m-1}^2) + d_8 \delta^2 x_m x_{m-1} + d_9 \delta^4 x_m^2 x_{m-1}^2}$$

与えられた差分方程式が $R = 0$ に一致すれば、その保存量は上記のような形として求められる。

4 実行結果

差分方程式 (4) を取り上げる。保存量を求めるには、以下のようなコマンド実行すればよい。

```
f:=x1(2)+x1(0)-2*a0*x1(1)+w*ad!#**2*x1(1)*(2*a0*b1*x1(2)*x1(0)
+b2*x1(1)*(x1(2)+x1(0)))$
sbcd f$
```

ここで、 $x1(n) = x_{m+n-1}$ ($n = 0, 1, 2$), $ad!# = \delta$, $w = \beta$, $a0 = A_0$ 。結果は以下のとおりである。

```
+++++ conserved density +++++
          2      2      2          2      2      2          2
cd!#(1) = (x1(1) *x1(0) *ad# *b1*w + x1(1) *x1(0) *ad# *b2*w + x1(1)
          2      2      2      4      2
- 2*x1(1)*x1(0)*a0 + x1(0) )/(x1(1) *x1(0) *ad# *b1*b2*w
          2
- 2*x1(1)*x1(0)*a0*ad# *b1*w - 1)
```

5 おわり

本研究では陽的な差分方程式の保存量を求めるためにまず保存量の構造を調べ、その候補となるものをいくつか示した。その他の候補としてどのようなものがあるかは今後課題である。