数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 128-136

ガルニエ系に付随する戸田方程式および特殊多項式

津田 照久 (TSUDA, Teruhisa)

東京大学大学院数理科学研究科

概 要

ガルニエ系に付随するタウ関数の列が戸田方程式を満たすことを見る. 特に代数関数解に対するタウ関数の族を考えると, それは適当な変数変換の下で特殊多項式の族を定める. その特殊多項式の行列式表示についても論ずる.

1 はじめに

2階線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=0 \tag{1}$$

を考える. ここで確定特異点の位置を $x=0,\,1,\,\infty,\,t_1,\,\cdots,\,t_N$, 見かけの特異点の位置を $x=\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ として, そのリーマン図式が以下であたえられるとする.

$$\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=\infty & x=t_i & x=\lambda_j \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \kappa_0 & \kappa_1 & \alpha+\kappa_\infty & \theta_i & 2 \end{pmatrix}, \quad i,j=1,\cdots,N.$$

フックスの関係式より $\alpha=-(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_\infty+\sum_i\theta_i-1)/2$ である. このとき (1) の基本解であって, そのモノドロミ行列が $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_N)$ に依らないものが存在するための必要十分条件は, λ_i $(i=1,\cdots,N)$ が $\mathbf{t}$ について, **ガルニエ系**と呼ばれる非線形偏微分方程式系を満たすことである.

変数変換

$$s_i=\frac{t_i}{t_i-1},\quad q_i=\prod_{j=1}^{N}(t_j-\lambda_j)\Big/\left((t_i-1)\prod_{j\neq i}(t_i-t_j)\right)$$

の下で, ガルニエ系は以下の多時間ハミルトン系と等価である ([1] 参照).

$$\mathcal{H}_N:\qquad \frac{dq_i}{ds_j}=\frac{\partial H_j}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{ds_j}=-\frac{\partial H_j}{\partial q_i},\quad (i,j=1,\cdots,N).$$

ハミルトン関数 H_i $(i=1,\cdots,N)$ は次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
s_i(s_i-1)H_i &= q_i\left(\alpha+\sum_j q_jp_j\right)\left(\alpha+\kappa_\infty+\sum_j q_jp_j\right)+s_ip_i(q_ip_i-\theta_i)\\
&\quad -\sum_{j(\neq i)}R_{ji}(q_jp_j-\theta_j)q_ip_j-\sum_{j(\neq i)}S_{ij}(q_ip_i-\theta_i)q_jp_i\\
&\quad -\sum_{j(\neq i)}R_{ij}q_jp_j(q_ip_i-\theta_i)-\sum_{j(\neq i)}R_{ij}q_ip_i(q_jp_j-\theta_j)\\
&\quad -(s_i+1)(q_ip_i-\theta_i)q_ip_i+(\kappa_1s_i+\kappa_0-1)q_ip_i.
\end{aligned}
$$

ここで $R_{ij}=s_i(s_j-1)/(s_j-s_i)$, $S_{ij}=s_i(s_i-1)/(s_i-s_j)$ とした. 特に $N=1$ のとき, $\mathcal{H}_N$ はパンルベVI型方程式 (P_{VI}) のハミルトン系による表示に等しい. 従ってガルニエ系は P_{VI} のモノドロミ保存変形からの拡張と云える.

本稿ではガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ を対象にして, その対称性と解の持つ構造について考察する. 始めに $\mathcal{H}_N$ の対称性の群 $\mathbf{G}$ を考える. 実は $\mathbf{G}$ は格子を含む無限群を成す. $\mathcal{H}_N$ に対してタウ関数と呼ばれる従属変数が定まるが, 格子上のタウ関数の列を考えると, それが戸田方程式を満たすことが分かる.

一方, 対称性の群 $\mathbf{G}$ のある元に固定される解を考えると, それは $\mathcal{H}_N$ の代数関数解を与える. さらに $\mathbf{G}$ は双有理変換として実現されるので, その作用により無数の代数関数解が得られる. それら代数関数解に付随するタウ関数の族は適当な変数変換の下で多項式の族を定める. これがガルニエ系の特殊多項式である.

最後にその特殊多項式の明示公式について論ずる. そこに現れる行列式は, シューア多項式の一つの拡張である普遍指標多項式 (universal character) の特殊化に他ならない.

本稿で扱う議論は $N=1$ の場合, 即ち P_{VI} についての結果の自然な拡張である;
P_{VI} のタウ関数列が戸田方程式を満たすことは岡本により示された ([2] 参照). また, 代数関数解に付随する特殊多項式は梅村により提出され, その明示公式は増田により与えられた ([3], [4] 参照).

2 ガルニエ系の対称性

ここではガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ の変数変換で, パラメタの変化のみを許して $\mathcal{H}_N$ を不変に保つものを対称性と呼ぶことにする. よく知られるように $\mathcal{H}_N$ の対称性の群 $\mathbf{G}$ は $N+3$ 次の対称群 $\mathfrak{S}_{N+3}$ を含む ([1] 参照). それは $\mathcal{H}_N$ の含む $N+3$ 個のパラメタ $\vec{\kappa}=(\kappa_0,\kappa_1,\kappa_\infty,\theta_1,\cdots,\theta_N)\in\mathbb{C}^{N+3}$ に対して置換として作用する. また $\mathcal{H}_N$ は $\kappa_\infty\mapsto-\kappa_\infty$ なる対称性を持つ. これはハミルトン関数 H_i が $\kappa_\infty\mapsto-\kappa_\infty$ について不変であることより明らかである. この自明な対称性と $\mathfrak{S}_{N+3}$-対称性を合わせることにより次の定理を得る.

定理 2.1 ガルニエ系 $\mathcal{H}_N(\vec{\kappa})$ は双有理正準変換からなる対称性 $R_{\kappa_0}, R_{\kappa_1}, R_{\kappa_\infty}, R_{\theta_1}, \cdots, R_{\theta_N}$ を持つ．それぞれの変換 $R_\Delta : (q,p) \mapsto (Q,P)$ は以下で与えられる．

R_Δ	$\vec{\kappa}$ への作用	Q_i	P_i
R_{κ_∞}	$\kappa_\infty \mapsto -\kappa_\infty$	$Q_i = q_i$	$P_i = p_i$
R_{κ_1}	$\kappa_1 \mapsto -\kappa_1$	$Q_i = q_i$	$P_i = p_i - \dfrac{\kappa_1}{g_1 - 1}$
R_{κ_0}	$\kappa_0 \mapsto -\kappa_0$	$Q_i = q_i$	$P_i = p_i - \dfrac{\kappa_0}{s_i(g_s - 1)}$
R_{θ_j}	$\theta_j \mapsto -\theta_j$	$Q_i = q_i$	$P_j = p_j - \theta_j/q_j, \quad P_i = p_i \quad (i \neq j)$

ここで $g_1 = \sum_{j=1}^N q_j$, $g_s = \sum_{j=1}^N q_j/s_j$ とした．

以上の対称性が生成する群は有限群である．さらにガルニエ系は次の非自明な対称性を持つ．

定理 2.2 ガルニエ系 $\mathcal{H}_N(\vec{\kappa})$ は双有理正準変換からなる対称性 R_τ を持つ．双有理変換 $R_\tau : (q,p,H) \mapsto (Q,P,\overline{H})$ は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{s_i p_i (q_i p_i - \theta_i)}{\left(\alpha + \sum_j q_j p_j\right)\left(\alpha + \kappa_\infty + \sum_j q_j p_j\right)}, \\ Q_i P_i &= -q_i p_i, \\ \overline{H}_i &= H_i - \frac{q_i p_i}{s_i}. \end{aligned}$$

またパラメタへの作用は $R_\tau(\vec{\kappa}) = (-\kappa_0 + 1, -\kappa_1 + 1, -\kappa_\infty, -\theta_1, \cdots, -\theta_N)$ である．

証明は単純計算により得られる．先程の対称群 $\mathfrak{S}_{N+3}$ の生成元を $\sigma_i (i = 1, \cdots, N+2)$ と書く．今，群 $\mathbf{G}_0$ を以下で定める．

$$\mathbf{G}_0 = \langle \sigma_1, \cdots, \sigma_{N+2}, R_{\kappa_0}, R_{\kappa_1}, R_{\kappa_\infty}, R_{\theta_1}, \cdots, R_{\theta_N}, R_\tau \rangle \subset \mathbf{G}.$$

実は $\mathbf{G}_0$ は格子を含む無限群を成す．

注 2.1 $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}$ とは限らない．$\mathcal{H}_N$ はパラメタが特別な場合 (例えば $\theta_i = 0 (i \neq 1)$) に P_{VI} の解で表される特殊解を持つ ([6] 参照)．しかし $\mathbf{G}_0$ を $\theta_i = 0 (i \neq 1)$ に制限したものは P_{VI} の対称性である拡大アフィン・ワイル群 $\tilde{W}(D_4^{(1)})$ に一致しない．それゆえ，筆者はガルニエ系にはまだ隠されている対称性があると考えている．いずれにせよ，ガルニエ系の対称性の群 $\mathbf{G}$ を決定することは重要な問題であろう．

3 戸田方程式

ガルニエ系のタウ関数 $\tau(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_N)$ を

$$\mathrm{d} \log \tau(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^N H_i \mathrm{d} s_i$$

で定義する. 上式の右辺が閉形式ゆえ, $\tau(\mathbf{s})$ は確かに存在する. 以下, 対称性の群 $\mathbf{G}$ の元

$$l = R_{\kappa_1} \circ R_\tau \circ R_{\theta_1} \circ \cdots \circ R_{\theta_N} \circ R_{\kappa_\infty} \circ R_{\kappa_0} \in \mathbf{G}$$

について考える. l はパラメタ $\vec{\kappa}$ に対して平行移動として作用する.

$$l(\vec{\kappa}) = \vec{\kappa} + (1, -1, 0, 0, \cdots, 0).$$

ガルニエ系 $\mathcal{H}_N(\vec{\kappa})$ の解を $(q_i(\mathbf{s}), p_i(\mathbf{s}), H_i(\mathbf{s}))$ として,

$$\begin{aligned}(q_i^+, p_i^+, H_i^+) &= (l(q_i), l(p_i), l(H_i)),\\ (q_i^-, p_i^-, H_i^-) &= (l^{-1}(q_i), l^{-1}(p_i), l^{-1}(H_i))\end{aligned}$$

とおく.

命題 3.1 ハミルトン関数の列 $(H_i^+(\mathbf{s}), H_i(\mathbf{s}), H_i^-(\mathbf{s}))$ は以下の微分方程式を満たす.

$$H_i^+ - 2H_i + H_i^- = \frac{\partial}{\partial s_i} \log F(\mathbf{s}). \tag{2}$$

但し

$$F(\mathbf{s}) = \left(\sum_{j=1}^N (s_j - 1)\frac{\partial}{\partial s_j} - 1\right) \sum_{j=1}^N s_j(s_j - 1)H_j - \kappa_1(\kappa_0 - 1) + \alpha(\alpha + \kappa_\infty).$$

証明は双有理変換 l の具体形を用いることで与えられる. ここでは省略する.

さて $\tau^\pm = l^{\pm 1}(\tau)$ と書くと, タウ関数の定義より,

$$\begin{aligned}H_i^+ - 2H_i + H_i^- &= \frac{\partial}{\partial s_i}(\log \tau^+ - 2\log\tau + \log\tau^-)\\ &= \frac{\partial}{\partial s_i} \log \frac{\tau^+\tau^-}{\tau^2}.\end{aligned}$$

よって (2) は以下と同値である.

(3)
$$\left(\sum_{i=1}^N (s_i - 1)\frac{\partial}{\partial s_i} - 1\right)\left(\sum_{i=1}^N s_i(s_i - 1)\frac{\partial}{\partial s_i}\right) \log\tau - \kappa_1(\kappa_0 - 1) + \alpha(\alpha + \kappa_\infty) = c\frac{\tau^-\tau^+}{\tau^2}.$$

但し $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: 任意定数 である. これから見るように上式は戸田方程式に等価である.

変数変換 $s_i = t_i/(t_i - 1)$ の下, 微分作用素 X, Y を導入する.

$$X = \Delta^{\frac{2}{N(N-1)}} \sum_{i=1}^N (t_i - 1)\frac{\partial}{\partial t_i}, \quad Y = \Delta^{\frac{2}{N(N-1)}} \sum_{i=1}^N t_i \frac{\partial}{\partial t_i}.$$

但し Δ は差積

$$\Delta = \prod_{i>j}(t_i - t_j)$$

とした. ここで $[X, Y] = 0$ が成り立つことに注意しておく. タウ関数を

$$\phi = \Delta^{\frac{2}{N(N-1)}(-\kappa_1(\kappa_0-1)+\alpha(\alpha+\kappa_\infty))}\tau$$

と変数変換すると (3) は

$$XY \log\phi = c\frac{l^{-1}(\phi)\, l(\phi)}{\phi^2}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \text{任意定数}$$

と書き直される. これは (広い意味での) **戸田方程式**に他ならない.

注 3.1 l と異なるもう一つの平行移動

$$\tilde{l} = R_{\kappa_1} \circ l \circ R_{\kappa_1} \in \mathbf{G},$$

を考える. $\tilde{l}$ はパラメタに対して

$$\tilde{l}(\vec{\kappa}) = \vec{\kappa} + (1, 1, 0, 0, \cdots, 0)$$

と作用する. $\tilde{l}$ の作用によるタウ関数の列を考えると先程と同様にして,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(s_i - 1)\frac{\partial}{\partial s_i} - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{N} s_i(s_i - 1)\frac{\partial}{\partial s_i}\right)\log\tau + \alpha(\alpha + \kappa_\infty) = c\frac{\tilde{l}^{-1}(\tau)\,\tilde{l}(\tau)}{\tau^2} \tag{4}$$

が成り立つ. この式も適当な変数変換の下で戸田方程式に等しい.

4　特殊多項式

双有理変換 $w_0 = R_\tau \circ R_{\theta_1} \circ \cdots \circ R_{\theta_N} \circ R_{\kappa_\infty} \in \mathbf{G}$ を考える. パラメタへの作用は $w_0(\vec{\kappa}) = (-\kappa_0 + 1, -\kappa_1 + 1, \kappa_\infty, \theta_1, \cdots, \theta_N)$, また (q_i, p_i) への作用は

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{s_i p_i (q_i p_i - \theta_i)}{\left(\alpha + \sum q_j p_j\right)\left(\alpha + \kappa_\infty + \sum q_j p_j\right)}, \\ Q_i P_i &= -q_i p_i + \theta_i \end{aligned}$$

で与えられる. $\kappa_0 = \kappa_1 = 1/2$ の場合に, w_0 の固定点は 2 次方程式を解くことにより

$$(q_i(\mathbf{s}), p_i(\mathbf{s})) = \pm\left(\frac{\theta_i\sqrt{s_i}}{\kappa_\infty}, \frac{\kappa_\infty}{2\sqrt{s_i}}\right)$$

と求まる. これはガルニエ系の代数関数解を与えている. 対称性の群 $\mathbf{G}$ が双有理的であることより以下の定理を得る.

定理 4.1 $\vec{\kappa}=(1/2,1/2,\kappa_\infty,\theta_1,\cdots,\theta_N)$ とおく．任意の $w\in\mathbf{G}$ に対して，$\mathcal{H}(w(\vec{\kappa}))$ は代数関数解を持つ．

以下，二つの平行移動 $l,\tilde{l}$ によって生成される 2 次元格子：$\langle\tilde{l},l\rangle\subset\mathbf{G}$ 上の代数関数解に付随するタウ関数の列を考察する．これから見るように，それらのタウ関数は適当な変数変換の下で多項式の族を定める．

変数変換 $x_i^2=s_i$ を施すと先程の $\kappa_0=\kappa_1=1/2$ における代数関数解は $(q_i,p_i)=(\theta_i x_i/\kappa_\infty,\ \kappa_\infty/2x_i)$ となる．また付随するタウ関数は

$$\tau=\tau_{0,0}=\prod_i x_i^{-\frac{1}{2}\theta_i(\theta_i-1)}(x_i+1)^{\frac{\theta_i}{2}(\sum_k\theta_k+\kappa_\infty)}(x_i-1)^{\frac{\theta_i}{2}(\sum_k\theta_k-\kappa_\infty)}\prod_{i,j}(x_i+x_j)^{-\frac{\theta_i\theta_j}{2}}$$

で与えられる．今，タウ関数の族 $\tau_{m,n}(m,n\in\mathbb{Z})$ を以下の様に定義する．

$$\tilde{l}^m l^n(\tau_{0,0})=\tau_{m,n}.$$

すると

$$\begin{aligned}
\tau_{0,1}&=\prod_i x_i^{-\theta_i}\tau_{0,0},\\
\tau_{1,0}&=\left(\prod_i x_i^{-\theta_i}(x_i+1)^{\theta_i}(x_i-1)^{\theta_i}\right)\left(\sum_k\theta_k x_k-\kappa_\infty\right)\tau_{0,0},\\
\tau_{1,1}&=\left(\prod_i x_i^{-2\theta_i}(x_i+1)^{\theta_i}(x_i-1)^{\theta_i}\right)\left(\kappa_\infty-\sum_k\theta_k x_k^{-1}\right)\tau_{0,0}
\end{aligned}$$

を得る．この初期条件からすべての $\tau_{m,n}$ は「戸田方程式」(3), (4) によって求まる．実は，$\tau_{m,n}$ 自身は代数関数であるが適当な因子を除くと多項式を定める．

ガルニエ系の代数関数解に付随する「**特殊多項式**」$T_{m,n}(\mathbf{x})$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned}
\tau_{m,n}&=\prod_i\Big\{x_i^{-\frac{1}{2}(\theta_i+m+n)(\theta_i+m+n-1)}(x_i+1)^{\frac{\theta_i}{2}(\sum_k\theta_k+\kappa_\infty+2m)}\\
&\qquad(x_i-1)^{\frac{\theta_i}{2}(\sum_k\theta_k-\kappa_\infty+2m)}\Big\}\prod_{i,j}(x_i+x_j)^{-\frac{\theta_i\theta_j}{2}}\quad T_{m,n}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

上式を「戸田方程式」(3), (4) に代入して，$c=1/4$ とおくことにより次を得る．

命題 4.1 $T_{m,n}(\mathbf{x})$ は以下の微分差分方程式を満たす.

$$
\begin{aligned}
T_{m+1,n} &= \prod_i x_i \left\{ \left(\sum_i \frac{x_i^2-1}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \right) \sum_i x_i(x_i^2-1)\frac{\partial}{\partial x_i}\log T_{m,n} \right. \\
&\quad \left. + \kappa_\infty \sum_i \theta_i \frac{x_i^2+1}{x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\theta_i\theta_j\frac{x_i^2+x_j^2}{x_i x_j} - \kappa_\infty^2 + (2m)^2 \right\} \frac{{T_{m,n}}^2}{T_{m-1,n}}, \\
T_{m,n+1} &= \prod_i x_i \left\{ \left(\sum_i \frac{x_i^2-1}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \right) \sum_i x_i(x_i^2-1)\frac{\partial}{\partial x_i}\log T_{m,n} \right. \\
&\quad \left. + \kappa_\infty \sum_i \theta_i \frac{x_i^2+1}{x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\theta_i\theta_j\frac{x_i^2+x_j^2}{x_i x_j} - \kappa_\infty^2 + (2n-1)^2 \right\} \frac{{T_{m,n}}^2}{T_{m,n-1}}.
\end{aligned}
$$

但し, 初期条件は

$$
T_{0,0} = T_{0,1} = 1, \quad T_{1,0} = \sum_i \theta_i x_i - \kappa_\infty, \quad T_{1,1} = \prod_i x_i \left(\kappa_\infty - \sum_i \theta_i x_i^{-1} \right)
$$

で与えられるとする.

(ここでは結果のみ記すが) タウ関数とガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ の正準変数 (q_i, p_i) の関係から, 代数関数解は特殊多項式 $T_{m,n}(\mathbf{x})$ を用いて表すことができる.

定理 4.2 パラメタ $\kappa_0 = m+n+1/2$, $\kappa_1 = m-n+1/2$ の時, ガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ は以下で与えられる代数関数解を持つ.

$$
\begin{aligned}
q_i &= \frac{x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\log\dfrac{T_{m+1,n}}{T_{m,n+1}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\log\frac{T_{m+1,n}}{T_{m,n+1}} - (2m-2n+1)}, \\
q_i p_i &= \frac{\theta_i + m + n}{2} + \frac{x_i}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\log\frac{T_{m,n}}{T_{m,n+1}}.
\end{aligned}
$$

5 $T_{m,n}(\mathbf{x})$ の行列式表示

ガウスの超幾何級数の一般化に**アペル・ロリチェラの超幾何級数**

$$
F_D(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_N, \gamma; \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N} \frac{(\alpha)_{|\mathbf{m}|}(\beta_1)_{m_1}\cdots(\beta_N)_{m_N}}{(\gamma)_{|\mathbf{m}|}(1)_{m_1}\cdots(1)_{m_N}}\mathbf{x}^{\mathbf{m}}
$$

$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N)$, がある. ここで多重指数 $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_N)$ として $\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = x_1^{m_1}\cdots x_N^{m_N}$ および $|\mathbf{m}| = m_1 + \cdots + m_N$ とおいた. また, ポホハマの記号

$$
(\alpha)_m = \begin{cases} 1 & (m=0), \\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1) & (m=1,2,3,\cdots) \end{cases}
$$

を用いた. 上の級数は $N=1$ とすると確かにガウスの超幾何級数である.

容易に分かるように $\alpha=-n\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ の場合, 無限級数 F_D は多項式に退化する. 多項式 $p_n(\mathbf{x})$ を

$$p_n(\mathbf{x})=\begin{cases}0 & (n<0),\\ \dfrac{(\kappa_\infty+\sum_i\theta_i)_n}{(1)_n}F_D(-n,\theta_1,\cdots,\theta_N,\kappa_\infty+\sum_i\theta_i;\mathbf{x}+\mathbf{1}) & (n\ge 0)\end{cases}$$

と定義する. ただし $\mathbf{1}=(1,\cdots,1)$ と書いた. $p_n(\mathbf{x})$ はヤコビ多項式の一般化と見なせる.

行列式公式 $u=|n+m-1/2|-1/2$, $v=|n-m-1/2|-1/2$ とおく. 特殊多項式 $T_{m,n}(\mathbf{x})$ は次の行列式表示を持つ.

$$T_{m,n}(\mathbf{x})=(-1)^{\frac{v(v+1)}{2}}\prod_i x_i^{\frac{u(u+1)}{2}}\prod_{k=1}^{u}(2k-1)!!\prod_{k=1}^{v}(2k-1)!!\,R_{u,v}(\mathbf{x}).$$

但し $R_{u,v}(\mathbf{x})$ は以下で与えられる.

$$R_{u,v}(\mathbf{x})=\det\begin{vmatrix}q_1 & q_0 & \cdots & q_{-u+2} & q_{-u+1} & \cdots & q_{-u-v+3} & q_{-u-v+2}\\ q_3 & q_2 & \cdots & q_{-u+4} & q_{-u+3} & \cdots & q_{-u-v+5} & q_{-u-v+4}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ q_{2u-1} & q_{2u-2} & \cdots & q_u & q_{u-1} & \cdots & q_{u-v+1} & q_{u-v}\\ p_{v-u} & p_{v-u+1} & \cdots & p_{v-1} & p_v & \cdots & p_{2v-2} & p_{2v-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ p_{-v-u+4} & p_{-v-u+5} & \cdots & p_{-v+3} & p_{-v+4} & \cdots & p_2 & p_3\\ p_{-v-u+2} & p_{-v-u+3} & \cdots & p_{-v+1} & p_{-v+2} & \cdots & p_0 & p_1\end{vmatrix}.$$

ここで記号 $q_n=p_n(\mathbf{x}^{-1})$ を用いた.

この行列式表示は, 数式処理によって具体的な N, m, n に対して求めただけで証明は現時点では完成していない. この行列式表示は P_{VI} の特殊多項式の行列式表示 ([4] 参照) の自然な拡張を与え, やはり**普遍指標多項式** (universal character, [5] 参照) の特別な場合と見なせる.

注 5.1 $F_D(\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_N,\gamma;\mathbf{x})$ は**アペル・ロリチェラの超幾何微分方程式系** E_D

$$\{(\gamma-1+\sum_{j=1}^{N}D_j)D_i-x_i(\alpha+\sum_{j=1}^{N}D_j)(\beta_i+D_i)\}y=0,\quad i=1,\cdots,N$$

の解である. 上で見たようにガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ の代数関数解は, (行列式を通して) アペル・ロリチェラの超幾何級数 F_D を用いて表されることになる. 一方, $\mathcal{H}_N$ はパラメタが特別な場合, 例えば $\kappa_0+\kappa_1+\kappa_\infty+\sum_i\theta_i-1=0$ の時, E_D の解によって与えられる特殊解 (リッカチ解) を持つことが知られている ([1] 参照). つまり, 代数関数解とリッカチ解というまったく異なる性質を持つ特殊解の両方にアペル・ロリチェラの超幾何微分方程式系 E_D が現れる. (これは単なる偶然なのだろうか?)

6 おわりに

本稿ではガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ の対称性と解の構造について考察した. まとめると,

(1) $\mathcal{H}_N$ はその対称性として, 格子を含む無限群 $\mathbf{G}$ を持つ.
(2) $\mathbf{G}$ の含む格子上のタウ関数の列は戸田方程式を満たす.
(3) 特に $\mathcal{H}_N$ の代数関数解に付随するタウ関数の列は適当な変数変換の下, 特殊多項式の族 $T_{m,n}(\mathbf{x})$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ を定める. この $T_{m,n}(\mathbf{x})$ は普遍指標多項式 (universal character) を用いて表される.

最後にガルニエ系 (及び, パンルベ方程式) と無限次元可積分系の関係について議論する. よく知られているように (少なくとも) P_{II}, P_{IV}, P_V は**KP 階層**のある種の簡約化として得られる. しかも, 簡約化によって KP 階層の多項式解 (シューア多項式) は構造を保ったまま, P_{II}, P_{IV}, P_V の特殊多項式に移行するという顕著な事実がある.

一方, KP 階層は, シューア多項式が特徴づける可積分系とも云える. 最近, 筆者は普遍指標多項式 (unversal character) が特徴づける無限次元可積分系を得た (以後, **UC 階層**と呼ぶ. [8] 参照). UC 階層は無限階の非線形偏微分方程式系で与えられ, 普遍指標多項式がシューア多項式の拡張であることから期待されるように, KP 階層の自然な拡張と見なせる. 上記 (3) に関連して, ガルニエ系と UC 階層の関係を問うことは重要であろう.

参考文献

[1] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions (Vieweg Verlag, Braunschweig, 1991)

[2] K. Okamoto, *Studies on the Painlevé equations, I.* Ann. Math. Pura Appl. **146**(1987), 337-381.

[3] 梅村 浩, Painlevé 方程式の 100 年, 数学 **51**(1999), 395-420.

[4] 増田 哲, Painlevé VI 方程式の代数函数解—行列式表示と退化極限, 本講究録に所収.

[5] K. Koike, *On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters*, Adv. Math. **74**(1989), 57-86.

[6] T. Tsuda, *Birational symmetries, Hirota bilinear forms and special solutions for the Garnier systems in 2-variables*, preprint.

[7] T. Tsuda, *Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system*, preprint.

[8] T. Tsuda, *Universal characters and an extension of the KP hierarchy*, preprint.