数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 43-47

野海・山田方程式系の WKB 解析に向けて

近畿大理工 青木 貴史 (AOKI, Takashi)
京大数理研 河合 隆裕 (KAWAI, Takahiro)
京大理 小池 達也 (KOIKE, Tatsuya)
京大数理研 竹井 義次 (TAKEI, Yoshitsugu)

Painlevé 方程式のもつ対称性を考察する中から，野海正俊・山田泰彦（神戸大自然）の両氏は，$A_l^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性をもった Painlevé 方程式の高階版と考えられる方程式系を発見した (cf. [NY1], [NY2])．本稿では，Painlevé 方程式に対する WKB 解析 (cf. [KT1], [AKT], [KT2]) をより広いクラスの非線型方程式に一般化するべく，この「野海・山田方程式系」に対する WKB 解析の可能性について論じてみたい．

「野海・山田方程式系」（但し，WKB 解析を展開するために large parameter η を然るべく導入したもの）の具体形は次の通りである．まず $A_{2m}^{(1)}$ 型（i.e., $l=2m$）の場合は

(1) $$\frac{df_j}{dt}=\eta\Big[f_j(f_{j+1}-f_{j+2}+\cdots-f_{j+2m})+\alpha_j\Big] \qquad (j=0,1,\ldots,2m).$$

ここで α_j は $\alpha_0+\cdots+\alpha_{2m}=\eta^{-1}$ を満たすパラメータ，また f_j は $f_0+\cdots+f_{2m}=t$ と規格化されているものとする．なお，f_j, α_j 等は index j に関して周期的（周期は $n=l+1$）であると約束する．一方 $A_{2m+1}^{(1)}$ 型（i.e., $l=2m+1$）の場合は

(2) $$\frac{t}{2}\frac{df_j}{dt}=\eta\left[f_j\left(\sum_{1\le r\le s\le m}f_{j-1+2r}f_{j+2s}-\sum_{1\le r\le s\le m}f_{j+2r}f_{j+1+2s}\right)+\frac{t}{2}\alpha_j\right]$$
$$(j=0,1,\ldots,2m+1).$$

このときは $\alpha_0+\alpha_2+\cdots=\alpha_1+\alpha_3+\cdots=\eta^{-1}/2$, $f_0+f_2+\cdots=f_1+f_3+\cdots=t/2$ により規格化しておく．($l=2m$ の場合と同様に，index に対する周期性も仮定する．) いずれの場合も，これらの非線型方程式は，サイズが $n\times n$ （$n=l+1$）の次の線型方程式系の両立条件（可積分条件）として現れる．

(3) $$x\frac{\partial}{\partial x}\psi = \eta A\psi,$$

(4) $$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \eta B\psi,$$

但し

(5) $$A=-\begin{pmatrix}\epsilon_1 & f_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \epsilon_{n-2} & f_{n-2} & 1 \\ x & & & \epsilon_{n-1} & f_{n-1} \\ xf_0 & x & & & \epsilon_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}q_1 & -1 & & & \\ & q_2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & q_{n-1} & -1 \\ -x & & & & q_n\end{pmatrix}.$$

ここで ϵ_j は $\alpha_j = \epsilon_j - \epsilon_{j+1} + \eta^{-1}\delta_{j0}$, $\sum \epsilon_j = 0$ により定まるパラメータ．また $q_j = q_j(t)$ は，$q_{j+2} - q_j = f_j - f_{j+1}$, $\sum q_j = -t/2$ を満たす t の函数である．より具体的には，$l = 2m$ の場合は

$$(6) \qquad \begin{aligned} q_j &= f_{j+1} + f_{j+3} + \cdots + f_{j+2m-1} - \frac{t}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(f_j - f_{j+1} + f_{j+2} - \cdots + f_{j+2m}), \end{aligned}$$

また $l = 2m+1$ の場合は

$$(7) \qquad \begin{aligned} q_j &= \frac{2}{t} \sum_{1 \le r \le s \le m} f_{j-1+2r} f_{j+2s} - \frac{t}{4} \\ &= -\frac{1}{t}\left[\sum_{r=0 \text{ or } 0 \le s < r \le m} f_{j-1+2r} f_{j+2s} - \sum_{1 \le r \le s \le m} f_{j-1+2r} f_{j+2s} \right] \end{aligned}$$

と定める．この線型方程式系 (3)–(4) に対する WKB 解析を用いて，非線型の野海・山田方程式系を論じるのが目標である．

Painlevé 方程式の場合にも，モノドロミー保存変形を通じて（サイズが 2×2 の）線型方程式系が付随していた．Painlevé 方程式に対する WKB 解析が成功した一つの（そして，おそらく最大の）理由は，付随する線型方程式系の turning point や Stokes curve といった「Stokes 幾何」が，Painlevé 方程式のそれと密接に関係していたことである．以下では，野海・山田方程式系に対する WKB 解析の可能性を探るために，野海・山田方程式系の Stokes 幾何を考察する．

1 階線型方程式系の場合，turning point や Stokes curve はその係数行列（正確には，η に関して最高次の部分）の固有値を用いて次のように記述される．

$$\text{turning point} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{固有値が重根となる点},$$

$$\text{Stokes curve} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Im}\left(\int_{x_0}^{x} (\lambda_j(x) - \lambda_k(x))\, dx \right) = 0.$$

（ここで λ_j, λ_k は turning point $x = x_0$ で重なる固有値を表す.）他方，非線型方程式系の turning point や Stokes curve は，特異摂動的に定まる（η^{-1} に関する）形式巾級数解での線型化方程式のそれとして定義される．野海・山田方程式系 (1) あるいは (2) の場合，$f_j = f_{j,0}(t) + \eta^{-1} f_{j,1}(t) + \cdots$ という未知函数の巾級数展開を方程式に代入することにより

$$(8) \qquad \widehat{f}_j = \widehat{f}_j(t, \eta) = \widehat{f}_{j,0}(t) + \eta^{-1} \widehat{f}_{j,1}(t) + \cdots$$

という形式巾級数解が得られ，この形式解 $\widehat{f}_j$ での(1) あるいは (2) の線型化方程式の（上述の意味での）turning point や Stokes curve が，野海・山田方程式系の Stokes 幾何を与える訳である．

このとき，野海・山田方程式系の Stokes 幾何と，それに付随する線型方程式系 (3)–(4)（但し，野海・山田方程式系の形式解 $\widehat{f}_j$ を係数に代入したもの）の Stokes 幾何に関して，次が成立する．

Proposition 1　線型方程式系 (3) および (4) の係数 A, B に，野海・山田方程式系の形式解 $\widehat{f}_j$ を代入したものの（η に関する）最高次の部分をそれぞれ $A_0 = A_0(x,t)$ および $B_0 = B_0(x,t)$，また A_0, B_0 の固有多項式の判別式をそれぞれ $\Delta_{A_0}(x,t)$, $\Delta_{B_0}(x,t)$ で表すとき，

$$\Delta_{A_0}(x,t) = \Delta_{B_0}(x,t) D(x,t)^2 \tag{9}$$

が成立する．ここで $D(x,t)$ は，$D(x,t) = \prod_{1 \le j < k \le n}(\mu_j + \mu_k)$（$\mu_j$ は B_0 の固有値）で定義される.（$D(x,t)$ は x に関しては m 次の多項式となる.）特に，線型方程式系 (3) の turning point の全体は，m 個の double turning point（$D(x,t)$ の零点）から成る部分と，(4) の turning point（$(n-1)$ 個存在し，一般には simple）との和集合になる.

Proposition 2　線型方程式系 (3) の固有値を $\lambda_j(x,t)$, (4) の固有値を $\mu_j(x,t)$ とすれば,

$$\frac{\partial}{\partial t}\lambda_j(x,t) = x\frac{\partial}{\partial x}\mu_j(x,t). \tag{10}$$

Proposition 3　野海・山田方程式系の形式解 $\widehat{f}_j$ における線型化方程式の係数行列の（η に関する）最高次部分を $C_0 = C_0(t)$ で表す．このとき，C_0 の固有多項式と B_0 の固有多項式との間に，次の関係式が成立する.

$$\det(\nu - C_0) = \begin{cases} 2^n\, g_{\mathrm{odd}}(\mu)\Big|_{\mu=\nu/2} & (l = 2m \text{ のとき}), \\ 2^n\, (\mu\tilde{g}_{\mathrm{odd}}(\mu))\Big|_{\mu=\nu/2} & (l = 2m+1 \text{ のとき}). \end{cases} \tag{11}$$

但し $g_{\mathrm{odd}}(\mu)$ は B_0 の固有多項式 $\det(\mu - B_0)$ の μ に関する奇数次部分，また $\tilde{g}_{\mathrm{odd}}(\mu)$ は $g_{\mathrm{odd}}(\mu)$ をその最高次の係数で割って monic にした多項式（従って $l = 2m$ のときは $\tilde{g}_{\mathrm{odd}} = g_{\mathrm{odd}}$）である.

Proposition 3 より，特に C_0 の固有多項式 $\det(\nu - C_0)$ は，ある m 次多項式 f を用いて $\nu f(\nu^2)$（$l = 2m$ のとき）あるいは $\nu^2 f(\nu^2)$（$l = 2m+1$ のとき）という形をしていることがわかる．従って，野海・山田方程式系の turning point（すなわち C_0 の固有値が重根となる点）には，f の定数項が消えるタイプ（“type (I)” と呼ぶ）と，f の判別式が消えるタイプ（“type (II)” と呼ぶ）の 2 つの種類が存在する．このとき，Proposition 1 から Proposition 3 を組み合わせることにより，野海・山田方程式系のそれぞれのタイプの turning point に対して次を示すことができる.

Proposition 4-I　$t = t_0$ を野海・山田方程式系の type (I) の turning point とす

(i) $t = t_0$ においては，(3) のある double turning point $x = x^{\ddagger}(t)$ と，それとは別の simple turning point $x = x^{\dagger}(t)$ が合流する．しかも，$x = x^{\ddagger}(t)$ および $x = x^{\dagger}(t)$ において重なる固有値の index の組 (j_0, j_1) は両者で共通である．
(ii) さらに

$$(12) \qquad \frac{1}{2}\int_{t^\dagger}^{t} (\nu_{k_0}(t) - \nu_{k_1}(t))\, dt = \int_{x^\dagger(t)}^{x^\ddagger(t)} (\lambda_{j_0}(x,t) - \lambda_{j_1}(x,t))\, \frac{dx}{x}$$

が成立する．ここで ν_{k_0} と ν_{k_1} は，$t = t_0$ で共に 0 となるような C_0 の固有値である．特に，野海・山田方程式の type (I) の turning point から出る Stokes curve 上の点では，線型方程式系 (3) の double turning point $x = x^{\ddagger}(t)$ と simple turning point $x = x^{\dagger}(t)$ が Stokes curve で結ばれる．

Proposition 4-II $t = t_0$ を野海・山田方程式系の type (II) の turning point とするとき，
(i) $t = t_0$ においては，(3) の 2 つの異なる double turning point $x = x^{\dagger}(t)$ および $x = x^{\ddagger}(t)$ が合流する．しかも，$x = x^{\dagger}(t)$ および $x = x^{\ddagger}(t)$ において重なる固有値の index の組 (j_0, j_1) は両者で共通である．
(ii) さらに

$$(13) \qquad \begin{aligned} \int_{t^\dagger}^{t} \left(\nu_{k_0}^{+}(t) - \nu_{k_1}^{+}(t)\right) dt &= -\int_{t^\dagger}^{t} \left(\nu_{k_0}^{-}(t) - \nu_{k_1}^{-}(t)\right) dt \\ &= \int_{x^\dagger(t)}^{x^\ddagger(t)} (\lambda_{j_0}(x,t) - \lambda_{j_1}(x,t))\, \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

が成立する．ここで $\nu_{k_0}^{\pm}$ と $\nu_{k_1}^{\pm}$ は，$\nu_{k_l}^{-} = -\nu_{k_l}^{+}$ および $\nu_{k_0}^{+}(t_0) = \nu_{k_1}^{+}(t_0)$ を満たすような C_0 の固有値である．特に，野海・山田方程式の type (II) の turning point から出る Stokes curve 上の点では，線型方程式系 (3) の 2 つの double turning point $x = x^{\dagger}(t)$ と $x = x^{\ddagger}(t)$ が Stokes curve で結ばれる．

これらの結果は，Stokes 幾何のレベルでは Painlevé 方程式のときとほぼ同様の状況が野海・山田方程式系の場合にも成立していることを意味しており，野海・山田方程式系に対する WKB 解析の成功の可能性を強く示唆するものと考えられる．

References

[AKT] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. II, *Structure of Solutions of Differential Equations*, World Scientific, 1996, pp. 1–49.

[KT1] T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I, Adv. Math., **118**(1996), 1–33.

[KT2] ———: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, Adv. Math., **134**(1998), 178–218.

[NY1] M. Noumi and Y. Yamada: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial Ekvac., **41**(1998), 483–503.

[NY2] ———: Symmetry in Painlevé equations, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 245–260.