数理解析研究所講究録 1299 巻 2003 年 77-84

Sufficient conditions for meta-thin association schemes to have a transitive automorphism group

平坂　貢 (Mitsugu Hirasaka)、
国立台湾大学数学科所属
(Department of Mathematics, National Taiwan University)、
ポストドクター

2001 年 12 月 18 日

1　序

アソシエーションスキーム（以下 AS と略す）は有限集合 X 上に作用する可移な置換群の $X \times X$ 上の軌道全体が満たす性質を定義に持つ組合せ的対象である。それゆえ任意の群 G の右正則置換群の $G \times G$ 上の軌道全体も AS の一例であり、この意味で有限群全体は AS 全体に埋め込まれているともいえる（この埋め込みは薄 AS と呼ばれる）。有限群に部分群があるように、AS を構成する二項関係全体にも積閉集合と呼ばれるある演算で閉じた部分集合が定義され、任意の積閉集合は各点における部分 AS を誘導する。群のある部分群で割った商群を作る際にはその部分群が正規部分群である必要があったが、一方、AS では任意の積閉集合で割った商 AS が自然に定義される。本講演では積閉集合によるある点の部分 AS と商 AS が共に有限群の埋め込みで得られる AS になるものを考える。そしてこのような AS はメタ薄AS と呼ばれる（メタ薄の名称は群論におけるメタ可換もしくはメタ巡回でのメタの使用法同様に、部分と商の構造共に同じ性質 P を持つものをメタ P と呼ぶことに倣って名付けられている）。

繰り返しになるが、AS は可移な置換群と深い関わりがあるとはいえ純

粋な組合せ的対象なので、当然のごとく群の作用では記述できないASの例が数多く存在する。議論を明確にするためにここでASとその自己同型群の定義を記す。なお記号に関しては[5]で用いられているものを使用する。

定義 1.1. Xを有限集合として、Rを$X\times X$の空集合を含まない分割とする。通常Rの元はリレーションと呼ばれる。(X,R)は次の三つの条件を満たすときにアソシエーションスキームと呼ばれる。
(i) $1_X := \{(x,x)\mid x\in X\}\in R$;
(ii) $\forall r\in R$, $r^* := \{(x,y)|(y,x)\in r\}\in R$;
(iii) $\forall d,\, e\in R$, $A_dA_e = \sum_{f\in R} a_{def}A_f$.
ただしA_rは$r\in R$に関する隣接行列である。$\{a_{def}\}$は$\{A_r\}_{r\in R}$を基底とする全行列環の部分環の構造定数となることに注意。

定義 1.2. (X,R)をASとするとき、その自己同型群$\mathsf{Aut}(X,R)$は以下のように定義される:

$$\mathsf{Aut}(X,R) := \{\sigma\in\mathsf{Sym}(X)\mid \forall r\in R,\ A_rP_\sigma = P_\sigma A_r\}$$

ただし$\mathsf{Sym}(X)$はXの置換全体であり、P_σはXの置換σによって誘導される置換行列である。もし$\mathsf{Aut}(X,R)$が各リレーションに可移に作用するとき(X,R)は群型と呼ばれ、すなわち可移な置換群の作用から構成されるASのことであり、群型ASの自己同型群はその頂点集合Xに可移に作用する。

前段落で説明のために「群の作用では記述できない」という曖昧な表現を用いたがこれを明確にして、本講演ではASの自己同型群が頂点集合上に可移に作用するか否かに焦点を定めて議論をすすめる。そして扱う対象を制限してメタ薄ASの自己同型群に関する議論を行っていく。ここでメタ薄ASの定義を述べる。なお積閉集合(closed subset)、次数(valency)、部分AS(subscheme), 商AS(factor scheme)、薄AS(thin scheme)、薄積閉集合(thin closed subset)の定義と薄ASと有限群の埋め込みに関する結果に関しては[5]を参照されたし。

定義 1.3. (X,R)をASとする。Rの薄積閉集合Fでその商AS$(X/F, R/\!\!/F)$が薄であるものが存在するとき、(X,R)はメタ薄ASと呼ばれる。

(X,R)を通常のASとするとき、その商ASが薄になるような積閉集合全体の共通部分を$\mathbf{O}^\theta(R)$と記し、薄剰余(thin residue)と呼ばれる(注

意：薄剰余は積閉集合でありそれで割った商 AS は薄である。[5] 参照)。メタ薄 AS を語る上で薄剰余が重要な役割を果たすことは次の同値関係が物語っている。

補題 1.1. (X,R) を AS とするとき、次の二つの命題は同値である。

(i) (X,R) はメタ薄;

(ii) $\mathbf{O}^\theta(R)$ は薄積閉集合である。

これより薄剰余を固定した際のメタ薄 AS の特徴付けを目標とした議論を進める。すなわちメタ薄 AS の自己同型群の可移性を薄剰余の性質によって判別することを目標とする。このとき薄剰余は薄積閉集合であり、有限群をなすことに注意されたし。

この薄剰余に関するメタ薄の特徴付けのわかりやすい例を挙げてみよう。もし薄剰余が位数 1 の群と同型なら（$\mathbf{O}^\theta(R)=\{1_X\}$)、その AS は薄 AS であり、自己同型群は各リレーションに可移に作用するので群型であることが直ちにわかる。もし薄剰余が位数 2 の群と同型なら、薄剰余の性質からその AS は準薄 AS であり（すべてのリレーションの次数が 2 以下の AS）、この場合は [2] にこのような AS は群型になることが証明されている。このように群の位数を増やしていって同様の結果を期待したいところであるが、その反例は薄剰余がクライン四元群のときに現れる。[1] は 28 点以下の AS の計算機による分類結果であるが、その中の `as28-no.176` は自己同型群が点集合に可移に作用しないメタ薄 AS であることが Hanaki, Miyamoto により確かめられている。このことを踏まえて次の問題を考える。

問題 1.1. (X,R) をメタ薄 AS とするとき、$\mathsf{Aut}(X,R)$ が X に可移に作用するための $\mathbf{O}^\theta(R)$ の群構造に関する十分条件を求めよ。

次節ではこの問題に対するアプローチを述べる。

2 配置的写像と薄剰余の正規部分群達

(X,R) を AS、F を R の積閉集合、$x,y\in X$ とする。F は X 上の同値関係を定義するので、$z\in X$ を含むその同値類を zF で表す（[5] を参照)。

定義 2.1. 写像 $\phi: xF\to yF$ が次の条件を満たすとき (F,x,y) に関する配置的写像と呼ばれる。

(i) ϕ は全単射で $\phi(x) = y$ を満たす;

(ii) 任意の $f \in F$ と $(w, z) \in f \cap (xF \times xF)$ に対して $(\phi(w), \phi(z)) \in f$ が成り立つ、すなわち ϕ は xF 内のリレーションを保存する。

もし任意の $x, y \in X$ に対して (F, x, y) に関する配置的写像が存在するならば F は配置的と呼ばれる。

次の補題は配置的写像がある意味で部分的な自己同型写像であることを示している。証明は定義を確認するだけでなされる。

補題 2.1. (X, R) を AS とすとき次の三つは同値である。

(i) $\mathsf{Aut}(X, R)$ は X 上に可移に作用する;

(ii) R は配置的である;

(iii) R の全ての積閉集合は配置的である。

ある意味で配置写像は部分的な自己同型写像ともいえる。問題 1.1 を考える際に、この部分的な配置写像を薄剰余の性質を用いて如何に全体に持ち上げるかを考察することが本研究の骨子である。

メタ薄 AS の具体例の観察によってメタ薄 AS の自己同型群の可移性は薄剰余の正規部分群全体の構造に関係していることがわかった。次の補題はその関係を示すものである。

補題 2.2. (X, R) をメタ薄 AS とするとき、任意の $f \in R$ に対して ff^* は $\mathbf{O}^\theta(G)$ の正規部分群であり、その位数は f の次数に等しく、$A_f A_{f^*} A_f = n_f A_f$ が成り立つ。ただし $ff^* := \{r \in R | a_{ff^*r} > 0\}$ である。

証明は薄剰余の基本性質から正規部分群であることの定義を直接確かめることでなされる。後半部分は構造定数 $\{a_{def}\}_{d,e,f \in R}$ の基本性質から導かれる。

上の補題 2.2 はメタ薄 AS のリレーションの次数が薄剰余の正規部分群達の位数のどれかに対応していることを意味する。例えばメタ薄 AS の薄剰余が単純群の場合はその次数達は 1 もしくは薄剰余の位数のみからなり、全体の構造も二つの薄 AS のリース積 (wreath product) に近い（そのものとは限らない）構造を持つことがわかる。次節ではこのようなメタ薄 AS の構造を明らかにしてその自己同型を求め、さらに 2000 年 10 月に蔵王での研究集会にて発表した結果とそれからの進展を述べる。

3 主定理と証明の概略

まず2000年第12回日本ーフランス組合せ論ワークショップにて発表した結果について述べる。

定理 3.1. (X,R) をメタ薄 AS とする。もし $\mathbf{O}^{\theta}(R)$ の正規部分群全体が全順序集合になるならば $\mathsf{Aut}(X,R)$ は X 上に可移に作用する。

後にP.-H.Zieschangにより上の定理3.1は次のように改良された。なお改良された結果は共著論文として[3]に収録されている。

定理 3.2 ([3]). (X,R) をメタ薄 AS とする。もし $\mathbf{O}^{\theta}(R)$ の正規部分群全体が全順序集合になるならば $\mathsf{Aut}(X,R)$ は群型である。

この定理3.2はメタ薄ASの薄余剰が単純群、対称群、素数冪の巡回群などのときにそのメタ薄ASが群型になることを示している。それでは薄剰余の正規部分群全体が全順序にならない場合は一体どうなるのであろうか？薄剰余がクラインの四元群の場合には反例が示されているので、群の位数を下から眺めていったときにぶつかるのが位数が6の巡回群の場合である。結論から先に言えば「p,q を素数とするとき、薄剰余が位数 pq の群ならばそのメタ薄ASの自己同型群は頂点集合上に可移に作用する。」ことがわかった。これは今回の発表の主定理から得られる結果である。この結果は次の定理の特別な場合として得られる。

定理 3.3. (X,R) をメタ薄 AS とする。もし $\mathbf{O}^{\theta}(R)$ の正規部分群全体が次の半順序集合 $\mathcal{L}$ と同型で、任意の $f \in R$ に対して $ff^* = f^*f$ ならば[1] $\mathsf{Aut}(X,R)$ は X 上に可移に作用する：

$$\mathcal{L} := (L_1, L_2, \ldots, L_m)$$

ただし任意の i に対して L_i は 4 点以下からなる最小元と最大元をもつ半順序集合のいずれかと同型であり、任意の m より小さい i に対して L_i の最大元は L_{i+1} の最小元と一致する。

---

[1]お詫びと訂正：講演の際には「任意の $f \in R$ に対して $ff^* = f^*f$」という条件が抜け落ちてしまった。この条件は「$\mathbf{O}^{\theta}(R)$ の正規部分群全体がその位数によって特徴付けられる」という性質から導かれるのだが、講演の際には後者の条件には全く触れずに「黒板に書いた図と同型」という説明しかしなかった。これでは後に述べる主定理の系とはなりえないことを発表後に気づいたのでここで訂正すると共に深くお詫び申し上げ

定理3.3の証明は次に述べる主定理を積閉集合たちに段階的に適用して得られる。なすべきことは主定理の仮定が満たされるかを確かめることである。その前に主定理を述べよう。

定理 3.4. (X, R) を AS として、M を R の積閉集合とする。M に含まれる積閉集合 H, K で次を満たすものが存在すると仮定する。

(i) $\mathbf{O}^{\theta}(M) \subseteq H \cap K$;

(ii) $H \cap K$ は配置的;

(iii) 任意の $h \in H - (H \cap K)$ に対して $h\mathbf{O}^{\theta}(H) = \{h\}$ が成立つ;

(iv) 任意の $k \in K - (H \cap K)$ に対して $k\mathbf{O}^{\theta}(H) = \{k\}$ が成立つ;

(v) 任意の $m \in M - (H \cup K)$ に対して $m\mathbf{O}^{\theta}(M) = \{m\}$ が成立つ。

そのとき M は配置的である。

定理3.3の証明に戻る。$\mathbf{O}^{\theta}(R)$ の任意の正規部分群として U をとる。仮定により U の極大な $\mathbf{O}^{\theta}(R)$ の正規部分群は高々二つなので、これらを V, W と名付ける。このとき、$M := \{f \in R \mid ff^* \leq U\}$, $H := \{f \in R \mid ff^* \leq V\}$, $K := \{f \in R \mid ff^* \leq W\}$ とすると、「任意の $f \in R$ に対して $ff^* = f^*f$」という仮定により、M, H, K は積閉集合であることがわかる（詳細については同様の議論が [2] でなされているので参照されたし）。(i) $\mathbf{O}^{\theta}(M) \leq \mathbf{O}^{\theta}(R) \leq H \cap K$ である。(ii) $\mathbf{O}^{\theta}(R)$ は配置的なので $H \cap K$ は配置的と仮定してもよい（または $\{f \in R \mid ff^* \leq U\}$ が配置的にならないような極小の U を取ってくればよい）。補題2.2と M, H, K と定理3.3の仮定により、(iii), (iv), (v) の条件は証明される。なので主定理を用いて M は配置的であり、この議論を繰り返すことによって R が配置的であることがわかり、補題2.1より定理3.1が証明される

以下、主定理の証明の概略を述べる。証明は任意にとった $x_1, {x'}_1 \in X$ に対して $(M, x, {x'}_1)$ に関する配置写像を構成することでなされる。実際の証明ではASのリレーションに関する左右剰余類横断、X の部分集合上の積閉集合による横断 (transversal) などの (用語については [3],[4] を参照されたし) 用語を定義してから写像を定義してそれが配置写像であることをチェックするのであるが、本文では煩雑さを避けるために配置写像の構成を述べるに留める。

M の元の次数の和による帰納法を用いる。任意の x_1, $x'_1 \in X$ に対して写像 $\Phi : x_1 M \to x'_1 M$ を構成していく。帰納法の仮定により H と K は配置的であるとしてよい。なお、任意の w, $z \in X$ に対して $r(w,z)$ を (w,z) を含む R の元として記す。

簡便のために $\mathbf{O}^\theta(M)$ を M' と $\mathbf{O}^\theta(H)$ を H' と $\mathbf{O}^\theta(K)$ を K' 記す。Z を $x_1 M$ 上の H による横断で x_1 を含むものとする。$M/\!/M'$ は薄積閉集合であり、薄積閉集合は配置的であることがわかっているので（[3] を参照)、$(M/\!/M', x_1 M', x'_1 M')$ に関する唯一の配置的写像 δ が存在する。任意の $z \in Z$ に対して $z' \in \delta(zM')$ を任意にとる。H は配置的なので (H, z, z') に関する配置的写像 ϕ_z が存在する。

D を M 上の K による左剰余横断、E を K 上の $H \cap K$ における左剰余横断で $1_X \in D \cap E$ となるものとする。そのとき $D \times E$ と M 上の $H \cap K$ による左剰余類との間に一対一の対応が存在する。任意の $(m,k) \in D \times E$ に対して $x_{mk} \in x_1 mk$ をとる。その結果、$Y := \{x_{mk} \mid m \in D, k \in E\}$ は $x_1 M$ 上の $H \cap K$ による横断になる。任意の $(m,k) \in D \times E$ に対してそれぞれ $r(x_{mk}, z) \in H$ となるような Z の元 z が一意に決まる。薄積閉集合上の配置的写像の一意性から $\tilde{\phi}_{mk} = \delta|_{zH/\!/M'}$ が成立つ。ただし ϕ_{mk} は上で求めた x_{mk} に対応する ϕ_z であり、$\tilde{\phi}_{mk}$ は ϕ_{mk} から誘導される $(H/\!/M', zM', z'M')$ に関する配置的写像である。$r(x_m, x_{mk}) \in K$ が成立つことに留意すると

$$r(x_m, x_{mk}) \in r(\phi_m(x_m), \phi_{mk}(x_{mk}))M' \subseteq K.$$

であり、主定理の仮定 (iii),(iv),(iv) より $M' = K'H'$ が導かれ、次が成立つ。

$$r(x_m, x_{mk}) \in r(\phi_m(x_m), \phi_{mk}(x_{mk}))H'.$$

さらに

$$r(\phi_m(x_m), \phi_{mk}(x_{mk}))H' = \{r(\phi_m(x_m), u) \mid u \in \phi_{km}(x_{km}H')\}.$$

であるから、$r(x_m, x_{mk}) = r(\phi_m(x_m), \phi_{mk}(\tilde{x}_{mk}))$ となるような $\tilde{x}_{km} \in x_{km}H'$ が存在する。$H \cap K$ は配置的なので $(H \cap K, x_{mk}, \tilde{x}_{mk})$ に関する配置的写像 σ_{mk} が存在する。

最後に写像 $\Phi : x_1 M \to x'_1 M$ を任意の $w \in x_1 M$ に対して

$$\Phi(w) := \phi_{mk}(\sigma_{mk}(w))$$

と定義する。ただし x_{mk} は $r(w, x_{mk}) \in H \cap K$ を満たす Y の唯一元であり、$\phi_{mk} := \phi_z$ であり、z は $r(z, x_{mk}) \in H$ を満たす Z の唯一元である。

このようにしてΦが定義された。残るはΦが配置的であることを示すのみである。これは配置的写像の各定義を形式的にチェックする作業を主定理の仮定を逐次用いて行うだけであるので本文では割愛する。

4 今後の展望

第一節で紹介したとおり、`as28-no.176`の自己同型群は頂点集合上に可移ではない、さらには`as28-no.175`は`as28-no.176`と全く同じ構造定数を持ち、群型であることも知られている。このように構造定数を同じくするASのペアで片方は群型、もう片方はそうでないものの系列の構成を考えることも興味深いものと思われる。

主定理の系によって薄剰余が位数6の巡回群のときはそのメタ薄ASの自己同型群が可移になることは示されるのであるが、例えば位数12もしくは30の巡回群のときにどうなるかはまだ未解決である。

参考文献

[1] A. Hanaki, I. Miyamoto, `http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/data/as28`.

[2] M. Hirasaka, M. Muzychuk, On quasi-thin association schemes, to appear, *J. Comb. Th. (A).*

[3] M. Hirasaka, P.-H. Zieschang, Sufficient Conditions for a Scheme to Originate from a Group, submitted to *J. Comb. Th. (A).*

[4] M. Rassy, P.-H. Zieschang, Basic structure theory of association schemes, *Math. Z.* 227, 391-402 (1998).

[5] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes, Lecture Notes in Mathematics 1628, *Springer,* 1996.