数理解析研究所講究録 1299 巻 2003 年 120-126

GROUP GEOMETRY AND p-SUBGROUP COMPLEX

澤辺　正人 (Masato Sawabe)
熊本大学・理・学振ＰＤ (Kumamoto University)

1. 課題とその動機

ここで報告する内容の詳細については [3] 又は [4] を参照されたい。以下 有限群 G の p-Sylow 部分群 P を１つ固定しておく。今 G を標数 p の体上で定義されている Lie 型の群、Uni を G の parabolic 部分群の unipotent radical 全体の集合、$\{U_1, \ldots, U_l\}$ を P に含まれる極小な Uni の元全体の集合とする。各 $i = 1, \ldots l$ に対して G の極大 parabolic 部分群 $M_i = N_G(U_i)$ を考える。この時 G に付随するビルディングとは $\{M_i\}_{1 \leq i \leq l}$ で定義される以下のコセット幾何 $\mathcal{G}(G)$ のことである。

$$\mathcal{G}(G) = (G/M_1, \ldots, G/M_l; *).$$

関係 $*$ はコセット間の "non-trivial intersection" で定義される。勿論ビルディング $\mathcal{G}(G)$ は元の群 G のみによって定まるのであるが、ここで我々はあえて次の３つの対象によって $\mathcal{G}(G)$ が定まると思うことにする。

(1) 元の群 G,　(2) 位数 $|G|$ の素因子 p,　(3) p-部分群複体 Uni

即ち $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}_p(G; Uni)$ と思うのである。

ところでビルディング $\mathcal{G}_p(G; Uni)$ は時として poset Uni あるいはその order complex である単体複体として定義されることがある。その理由は次の通りである。一般に幾何 Δ の重心細分 $sd(\Delta)$ は元の Δ と同じ幾何学的実現を与える。つまり位相空間として同相である。一方 $sd(\Delta)$ の定義は Δ の旗全体からなる poset であることから $\Delta = \mathcal{G}_p(G; Uni)$ の場合それは G の parabolic 部分群全体からなる poset $Para$ に他ならない。さらに双対性より Uni と $Para$ が (逆) 同型になっていることから、以上を次の様にまとめることが出来る。

$$\mathcal{G}_p(G; Uni) \simeq sd(\mathcal{G}_p(G; Uni)) = Para \simeq_{oppsite} Uni.$$

勿論この関係は幾何 $\mathcal{G}_p(G; Uni)$ と p-部分群複体 Uni とが互いにホモトピー同値であることも示している。ここで重要な事は、この同型をやや弱いホモトピー同値であると見なしたとしても、幾何 $\mathcal{G}_p(G; Uni)$ が複体 Uni の豊富な情報を備えていると言う主張に変わりはない事である。以上の考察から次のような質問が自然に出てくる。

Question． 有限群 G と $|G|$ の素因子 p に対して、G-共役で閉じているような G の p-部分群複体 $\mathcal{D}$ を任意に取ってくる。この時３つ組み「$G, p, \mathcal{D}$」によって定まる幾何 $\Delta_p(G; \mathcal{D})$ で元の複体 $\mathcal{D}$ と互いにホモトピー同値であるようなものが存在するか？　さらにその中で *Sporadic geometries* を“自然”に捕まえることが出来るか？

ここでの話はこの質問に対する一つの答えが見つかったと言う報告である。

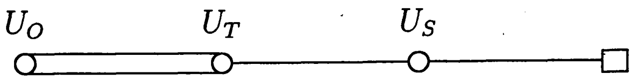
This manuscript was written while the author was visiting to Osaka University during Oct 2001–Sept 2002 (expected) using a grant from JSPS.

2. M_{24} の振る舞いとその一般化；"□-node" の数学的意味付け

この節では 24 次 Mathieu 群 $G = M_{24}$ のある 2-部分群複体の中で起きている現象について述べる。これは我々の一般論をどのように展開すべきかと言う基本的なアイデアを示唆している。

まず最初に「M_{24} の unipotent radical $Uni(M_{24})$ が存在する！」と言う事実に注意する。これを改めて $\mathcal{D} = Uni(M_{24})$ と置いておく。$\mathcal{D}$ はいわゆる M_{24} の radical 2-部分群全体の集合 $\mathcal{B}_2(M_{24})$ である。一般の radical p-部分群の定義は 4 節で改めて述べることにして ここでは特に気にする必要はない。さて M_{24} を考える上で基本的な (互いに incident 関係にある standard な) Octad O, Trio T, Sextet S を用意し 各 $X = O, T, S$ に対して $U_X = O_2(Stab_G(X))$ と置く。この時 $\{U_O, U_T, U_S\}$ はある固定された 2-Sylow 部分群に含まれる極小な "unipotent radical" 全体からなる集合になっている。即ち $\{U_O, U_T, U_S\} = \{U \in \mathcal{D}_{min} \mid U \le P\}$ が成り立つ。ここで M_{24} のデンキン図形 (Ronan-Smith 2-local geometry for M_{24} [2]) を考える。

$\Delta_2(M_{24})$:



すると Lie 型の群のデンキン図形のように極小な unipotent radical が図形の結び目 (node) に対応してくる。最後の □-node はいわゆる trancation である。即ち □ に対応する組合せ的対象は存在しないのであるが "対応する作用" が存在するのでそこに Dummy を置いておくのである[1]。ここで"対応する作用"とは次のような意味である。例えば Octad O に対応する "maximal parabolic" の構造は次の様になる。

$$Stab_G(O) = N_G(U_O) = \frac{L_4(2)}{U_O} = \frac{\overset{U_T \quad U_S}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\square}}{U_O}$$

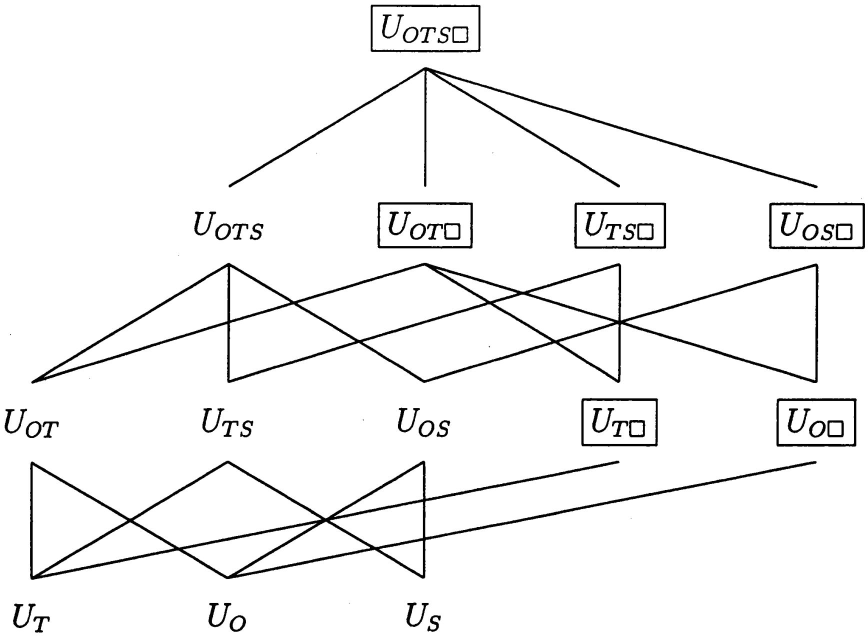
つまり Octad に対する Residue への作用が $L_4(2) = A_3(2) =$ ○—○—□ と言うことである。ここで Lie 型の群に対する unipotent radical の振る舞いを思い出して頂きたい。極小な U_O を含む M_{24} の unipotent radical も Lie 型の群のそれと全く同じ仕組みによって生み出されるのである。つまり先の $Stab_G(O)$ の構造から U_O を含む unipotent radical として $U_O, U_{OT}, U_{OS}, U_{O\square}, U_{OT\square}, U_{OS\square}, U_{OTS\square}$ が得られる。繰り返しになるが □-node に対応する作用が確かに存在しているので □ に関係する unipotent radical が現れるのである[2]。同じ議論を他の maximal parabolics $Stab_G(T)$, $Stab_G(S)$ に対して行うことによって、最終的に $\mathcal{D} = Uni(M_{24})$ は 13 の M_{24}-共役類に分かれることが分かる [6]。また Lie 型の群と同じように 全ての添え字を集めてきた $U_{OTS\square}$ は M_{24} の 2-Sylow 部分群 P を与えることにも注意しておきたい。さて 2-Sylow 部分群 $P = U_{OTS\square}$ に含まれる $\mathcal{D}$ の元の包含関係は次のようになる。

---

[1] M_{24} の場合あえて言うなれば □-node に対応する "maximal parabolic" は central involution の中心化群である。

[2] これから容易に想像出来るように、一般に群 G の radical p-部分群は G に内蔵されている p-局所部分群の作用の分だけ存在するのである。即ち p-local geometry は p-radical complex より一般に小さいので

FIGURE 1. $\mathcal{D}_{\leq P}$



四角で囲んだ部分群は先に説明した □-node に関係して生み出された unipotent radical である。ここで取り上げる M_{24} 特有の現象は $\mathcal{D}$ から四角で囲んだ部分群をホモトピー型を変えずに全て取り除けると言うものである。即ち残りの小さくなった複体[3] $\{U_O, U_T, U_S, U_{OT}, U_{OS}, U_{TS}, U_{OTS}\}^G$ と元の複体 $\mathcal{D}$ とが互いにホモトピー同値であるという現象である。これを説明するために代数的位相幾何から次の補題を容易する。

Lemma 1. *poset* $(\mathcal{P}, \leq)$ とその頂点 v に対して *Residue* $Res_{\mathcal{P}}(v)$ を考える。この時もし $Res_{\mathcal{P}}(v)$ が可縮であれば $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}\backslash\{v\}$ は互いにホモトピー同値である。(ここで $Res_{\mathcal{P}}(v)$ は v より上の部分 $\mathcal{P}_{>v}$ と v より下の部分 $\mathcal{P}_{<v}$ との *simplicial join* $Res_{\mathcal{P}}(v) = (\mathcal{P}_{>v}) * (\mathcal{P}_{<v})$ で与えられる)

M_{24} に戻り Lemma 1 を適用してみる。その前に M_{24} の性質の中で「$\mathcal{D}$ に属する部分群はそれを含む 2-Sylow 部分群の中で weakly closed[4]になっている」と言うことに注意する。即ち $Res_{\mathcal{D}}(v) = (\mathcal{D}_{>v}) * (\mathcal{D}_{<v})$ を考える時 上の部分 $\mathcal{D}_{>v}$ は一般に複雑になっているのであるが 下の部分 $\mathcal{D}_{<v}$ は先に示した図の中の部分 lattice としてピッタリ捕まえることが出来るのである。そこで下の部分 $\mathcal{D}_{<v}$ の構造だけが常に問題となってくる。さらに頂点を引き抜く順番にも注意を払う必要があり「小さい順に」引き抜いていく。

さて極小元 $U_{O\square}$ の Residue を考える。上の図から $\mathcal{D}_{<U_{O\square}}$ は一点 $\{U_O\}$ から成ることが分かる。即ち $\mathcal{D}_{<U_{O\square}}$ は可縮であり全体の $Res_{\mathcal{D}}(U_{O\square})$ も可縮となる。よって Lemma 1 よりホモトピー型を変えずに $U_{O\square}$ を引き抜くことが出来る。同じ理由から $U_{T\square}$ も取り除ける。次に一つ上の段に上がり $U_{OS\square}$ の $Res_{\mathcal{D}}(U_{OS\square})$ を考える。先程と同じように上の図から下の部分 $\mathcal{D}_{<U_{OS\square}}$ は三点から成る cone $\{U_{OS}, U_O, U_S\}$ になっていることが分かる。即ち U_{OS} が唯一の極大元となっており $\mathcal{D}_{<U_{OS\square}}$ さらには全体の $Res_{\mathcal{D}}(U_{OS\square})$ が可縮

[3] これがとりもなおさず M_{24} の 2-local geometry $\Delta_2(M_{24})$ である。

[4] $U \leq P \leq G$ の時 "U is wakly closed in P with respect to G" であるとは、もしある $g \in G$ に対して $U^g \leq P$ ならば $U = U^g$ となることである。

となる。よって Lemma 1 より $U_{OS\Box}$ も引き抜くことが出来る。(ここで注意すべきことは $U_{OS\Box}$ の下にあった $U_{O\Box}$ は既に取り除かれて存在していないことである。) 同じ理由から $U_{OT\Box}$ と $U_{TS\Box}$ も取り除ける。最後に $U_{OTS\Box}$ を考えると $Res_{\mathcal{P}}(U_{OTS\Box}) = \mathcal{D}_{<U_{OTS\Box}}$ は再び U_{OTS} を唯一の極大元とする cone になっている。以上から共役部分群をも込めて □-node に関係する全ての unipotent radical が $\mathcal{D}$ から取り除かれたことになる。

次に重要なことは残りの小さくなった部分複体の意味である。実は □-node に関係しない残された unipotent radical は $\{R \in \mathcal{D} \mid R = \langle U \in \mathcal{D}_{min} \mid U \leq R \rangle\}$ と特徴付けることが出来る。即ちそれに含まれる極小元達で自分自身が復元されるのである。これは我々の一般論の中で重要な役割を果たすことになるので "Product of $\mathcal{D}$"

$$Prod(\mathcal{D}) := \{R \in \mathcal{D} \mid R = \langle U \in \mathcal{D}_{min} \mid U \leq R \rangle\}$$

と名前を付けておくことにする。この定義のココロから $[\mathcal{D} \backslash Prod(\mathcal{D})]$ に属する部分群を "□-element" と呼ぶことにすると 以上を次のようにまとめることが出来る。

Observations of M_{24} . M_{24} の *"unipotent radical"* $Uni(M_{24})$ からホモトピー型を変えずに全ての *□-element* を取り除くことが出来る。即ち 2-部分群複体 $Uni(M_{24})$ とその部分複体である $Prod(Uni(M_{24}))$ とは互いにホモトピー同値である。

□-node を有する 2-local (sporadic) geometry として M_{24} の他に Conway 群 Co_1, Fischer 群 Fi'_{24}, Janko 群 J_4, Monster M のそれがある。個別にそれらの geometry を調べてみると M_{24} と全く同じ現象 (□-element のホモトピー不変性) を観察することが出来る。しかも同じ原理が働いているように思われるのである。実際この現象を一般的に説明することが出来る。

ここからは一般の話である。改めて $\mathcal{D}$ を G-共役で閉じているような p-部分群複体とし

$$\{U_1, \ldots, U_l\} = \{U \in \mathcal{D}_{min} \mid U \leq P\}$$

とする。P はあらかじめ固定されていた G の p-Sylow 部分群であった。さらに添え字の集合 $I = \{1, \ldots, l\}$ の空でない部分集合 $F \subseteq I$ に対して

$$U_F = \langle U_i \mid i \in F \rangle$$

と定義し U_F に対する仮定を次のように設定する。

Hypothesis (P). 空でない任意の $F \subseteq I$ に対して U_F は $\mathcal{D}$ に属する。

仮定 (P) は Lie 型の群に対する unipotent radical の基本性質を抽出してきたものであり sporadic geometry に対しても極めて標準的である。この時次が成り立つ。

Proposition 1 ([4]). 仮定 (P) の下で $\mathcal{D}$ と $Prod(\mathcal{D})$ は互いにホモトピー同値である。

よってこの命題は個々の sporadic で起きていた現象 (□-node から派生してきた "unipotent radical" のホモトピー不変性) に統一的な説明を与えていることになる。ここで注意すべきことは G が Lie 型の群で $\mathcal{D}$ が Uni の時 "□-element" は存在しないと言うことである。これは全ての unipotent radical はそれに含まれる極小な unipotent radical によって復元されてしまうと言う事実によるものである。即ちこの場合 $\mathcal{D}$ と $Prod(\mathcal{D})$ はピッタリ一致してしまうのである。

3. Quillen による "Closed Sets in Products"

M_{24} の例で見たように $\mathcal{D} = Uni(M_{24})$ から "□-element" を取り除いた部分複体 $\{U_O, U_T, U_S, U_{OT}, U_{OS}, U_{TS}, U_{OTS}\}^{M_{24}}$ はまさに M_{24} の 2-local geometry その物となっていた。同じ視点に立つと一般に $Prod(\mathcal{D})$ は複体 $\mathcal{D}$ に付随する G の "自然な" p-local geometry になっているのではないかと期待できる。そして実際そうなっているのである! 前節の最後で設定した一般的な状況の下で我々の幾何 $\Delta_p(G;\mathcal{D})$ (p-local geometry for G associated with a p-subgroup complex $\mathcal{D}$) を次のコセット幾何で定義する。

$$\Delta_p(G;\mathcal{D}) = (G/N_G(U_1), \ldots, G/N_G(U_l); *).$$

以下 $Prod(\mathcal{D})$ と $\Delta_p(G;\mathcal{D})$ とのホモトピー同値性を示すのであるがその中で Quillen[1] による "Closed sets in Products" が重要な役割を果たす。

Definition 1 (Closed set). *poset* $(\mathcal{P}, \leq)$ とその部分集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ に対して $\mathcal{C}$ が $\mathcal{P}$ の中で *closed* であるとは次の条件を満たす時に言う。即ち $x \in \mathcal{P}$ と $y \in \mathcal{C}$ に対して $x \leq y$ ならば $x \in \mathcal{C}$ である。

2つの poset $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ に対してその積集合 $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ も自然に (component ごとの順序によって) poset と見なせる。積集合の部分集合 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ に対してその projection を考える。

$$\mathcal{I}_x := \{y \in \mathcal{Q} \mid (x,y) \in \mathcal{I}\} \quad \text{for } x \in \mathcal{P},$$
$$\mathcal{I}_y := \{x \in \mathcal{P} \mid (x,y) \in \mathcal{I}\} \quad \text{for } y \in \mathcal{Q}.$$

I_* は fiber と呼ばれる。

Theorem 1 (Quillen[1]). *$\mathcal{I}$ を poset $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ の closed subset であるとする。もし全ての fiber $\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y$ $(x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{Q})$ が可縮であれば $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は互いにホモトピー同値である。*

次の概念は可縮性を示す際に非常に有効である。

Definition 2. *poset* $\mathcal{P}$ が *coninally contractible* (日本語で何と言うのでしょうか?) であるとは *poset map* $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ と $x_0 \in \mathcal{P}$ が存在して $x \leq \phi(x) \geq x_0$ $(\forall x \in \mathcal{P})$ が成り立つことである。

Lemma 2 (Quillen[1]). *coninally contractible は可縮である。*

これらを用いて我々の要求するホモトピー同値性を得ようと言うのである。改めて $\mathcal{P} = Prod(\mathcal{D})$, $\Delta = \Delta_p(G;\mathcal{D})$ と置き Quillen の定理の適用を目指す。この時 poset $\mathcal{P} \times \Delta$ から closed subset $\mathcal{I}$ を次のように取ることが出来る。

$$\mathcal{I} = \{(U,\sigma) \in \mathcal{P} \times \Delta \mid U \leq G_\sigma\}.$$

群 G が コセット幾何 Δ に自然に左から admissible に作用していることに注意すれば直ちに $\mathcal{I}$ が closed であることが確かめられる。さらに $\mathcal{I}$ の fiber も $U \in \mathcal{P}$, $\sigma \in \Delta$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_U &= \{\beta \in \Delta \mid (U,\beta) \in \mathcal{I}\} = \{\beta \in \Delta \mid U \leq G_\beta\} \\ &= \{\beta \in \Delta \mid \beta \text{ is fixed by } U\} =: \Delta^U, \\ \mathcal{I}_\sigma &= \{R \in \mathcal{P} \mid (R,\sigma) \in \mathcal{I}\} = \{R \in \mathcal{P} \mid R \leq G_\sigma\} =: \mathcal{P}_{\leq G_\sigma}\end{aligned}$$

と記述できハッキリ捕まえることが出来る。そこで fiber Δ^U, $\mathcal{P}_{\leq G_\sigma}$ に対して Definition 2 を満足するような写像を構成することによって Quillen の定理から次を得る。

Proposition 2 ([4]). 仮定 (**W**) の下で $Prod(\mathcal{D})$ と $\Delta_p(G;\mathcal{D})$ は互いにホモトピー同値である。

ここで仮定 (**W**) は次の "weakly closed property" である。

Hypothesis (W). 2 節の最後で設定した状況の下で全ての $U_i (1 \leq i \leq l)$ は *p-Sylow* 部分群 P の中で *weakly closed* (定義は欄外 4) である。

我々のイメージは常に U_i は極小な unipotent radical であり weakly closed property はその基本性質である。さらに多くの sporadic geometry に対しても weakly closed property は極めて標準的であることからこの仮定は我々にとって全く自然なものなのである。Propositions 1,2 をまとめることによって次の結果を得る。

Theorem 2 ([4]). 仮定 (**P**), (**W**) の下で我々の幾何 $\Delta_p(G;\mathcal{D})$ と p-部分群複体 $\mathcal{D}$ は互いにホモトピー同値である。

これは 1 節で挙げた質問に対する一つの答えを与えている。

4. 例

最後に例を挙げておこう。Theorem 2 は仮定 (**P**), (**W**) 満足する全ての p-部分群複体に対して成り立つと主張しているのであるが、現段階で最も重要と思われる複体は centric p-radical 複体である。

Definition 3. U を有限群 G の p-部分群とする。

1. $O_p(N_G(U)) = U$ が成り立つ時 U を *radical* p-部分群と呼ぶ。
2. $C_G(U)$ の p-元が全て U の中心に属する時 U を *centric* p-部分群と呼ぶ。

G の *radical* p-部分群全体の集合を $\mathcal{B}_p(G)$, さらにその中で *centric* p-部分群であるもの全体からなる部分集合を $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ $(\subseteq \mathcal{B}_p(G))$ と書く。この時 自明な *radical* p-部分群 $O_p(G)$ は $\mathcal{B}_p(G)$ から除いておくことにする。

定義から明らかに radical p-部分群は標数 p の体上で定義されている Lie 型の群の unipotent radical の類似物であり、さらに Lie 型の中では先の centric condition は常に成立している。即ち $\mathcal{B}_p(G)$ は "本物の" unipotent radical 全体からなる集合の類似物 (言い換えればビルディングの類似物) であり $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ はそれをさらに厳選してきたものであると見なすことが出来る。

さて G として標数 p の体上で定義されている Lie 型の群、$\mathcal{D}$ として $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ を考える。上で説明したように $\mathcal{D}$ は unipotent radical 全体からなる複体 Uni に他ならない。さらに Lie 型の群の中では仮定 (**P**) 及び (**W**) は常に成立している。逆にむしろ Lie 型の群の基本性質を抽出してきた結果が (**P**) であり (**W**) なのである。もはや我々の幾何 $\Delta_p(G;\mathcal{D})$ が G に付随するビルディングを与えていることは明らかであろう。

次に G として sporadic 単純群、素数 $p=2$、$\mathcal{D}$ として仮定 (**P**), (**W**) を満足するような $\mathcal{B}_2^{cen}(G)$ を考える。すると我々の幾何 $\Delta_2(G;\mathcal{D})$ は M_{24}, Co_1, Fi'_{24}, Suz, He, (possibly M) 等に付随するいわゆる Ronan-Smith[2] の 2-local geometry を与えるのである。(詳し

い検証は [3] を参照されたい) さらに p を奇素数として考えると $\Delta_p(G;\mathcal{D})$ は通常ランクの小さい sporadic p-local geometry を与える。

以上のことから、個別に知られていた多くの sporadic geometry がビルディングの概念を含む我々の幾何の " 自然な " 定義から統一的に得られることが分かる。即ち centric p-radical 複体 $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ は " Groups and Geometries " 中で本質的なものの一つであると言える段階にきていると思う。しかし近い将来 $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ とは異なる何か別のうまい複体が見出されることがあるかも知れない。しかし今回得られた結果 (Theorem 2) はあらゆる状況の複体に対して適用可能であると思っている。

References

[1] D. Quillen, Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group, *Adv. Math.* **28** (1978), 101–128.

[2] M.A. Ronan and S.D. Smith, 2-local geometries for some sporadic groups, *in* "The Santa Cruz Conference on Finite Groups", *Proc. Sympos. Pure Math.* (B.Cooperstein and G. Mason, Eds.,) **37** (1980), 283–289.

[3] M. Sawabe, The centric p-radical complex and a related p-local geometry, to appear in *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*

[4] M. Sawabe, On a p-local geometry associated with a complex of non-trivial p-subgroups, preprint.

[5] M. Sawabe and K. Uno, Conjectures on character degrees for the simple Lyons group, preprint.

[6] S. Yoshiara, The Borel-Tits property for finite groups, *in* "Groups and Geometries" (L. di Martino et al., Eds.,) *Trends Math.* (1998), 237–249.