数理解析研究所講究録 1302 巻 2003 年 108-115

A generalization of determinant and permanent

白井 朋之 (金沢大学理学部) *

1 はじめに

$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ に対して,

$$\det_\alpha A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

を考える. ここで, $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群, α は不定元, $\nu(\sigma)$ は σ を巡回置換の積に分解したときの巡回置換の個数である. 例えば, $n = 2, 3$ のときに具体的に書き下してみると,

$$\begin{aligned}
\det_\alpha A &= a_{11}a_{22} + \alpha a_{12}a_{21}, \text{ for } n = 2 \\
\det_\alpha A &= a_{11}a_{22}a_{33} + \alpha(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{31}a_{13} + a_{33}a_{12}a_{21}) \\
&\quad + \alpha^2(a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}), \text{ for } n = 3
\end{aligned}$$

となる. また, $\alpha = -1, 0, 1$ のときはそれぞれ

$$\begin{aligned}
\det_{-1} A &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\
\det_0 A &= \prod_{i=1}^n a_{ii} \\
\det_1 A &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}
\end{aligned}$$

となり, 明らかに $\det_{-1} = \det$, $\det_1 = \mathrm{per}$ である (cf. [13]).

非負定値エルミート行列 A (以下 $A \geq 0$ とも書く) に対して, 次の不等式が成り立つことが知られている.

$$\mathrm{per}\, A \geq \prod_{i=1}^n a_{ii} \geq \det A \geq 0.$$

一つ目の不等式は Lieb の不等式から (cf. [3]), 二つ目の不等式は Fisher の不等式から得られる. 特に, $A \geq 0$ のとき, $\det_1 A, \det_0 A, \det_{-1} A$ はすべて非負である.

*本講演は高橋陽一郎氏 (京大数理研) との共同研究に基づく

これらのことを踏まえて，以下のような問題を考える．

問題 1.1. $\mathcal{H}$ を非負定値エルミート行列全体とする．どのような $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して，

$$A \in \mathcal{H} \Longrightarrow \det_\alpha A \geq 0$$

が成り立つか？

上で述べたように $\alpha = -1, 0, 1$ に対しては $\det_\alpha$ は上の性質を持つ．$\mathcal{H}_n$ を $n \times n$ 非負定値エルミート行列全体とすると，$A \in \mathcal{H}_2 \Longrightarrow \det_\alpha A \geq 0$ であるための必要十分条件は $\alpha \geq -1$ であり，$A \in \mathcal{H}_3 \Longrightarrow \det_\alpha A \geq 0$ であるための必要十分条件は $\alpha = -1, -1/2 \leq \alpha \leq 4$ である．

次節では，この問題の動機について述べる．

2 ランダム場 (ボゾン，フェルミオン，ポアソン)

ランダム行列の固有値分布については様々な研究がなされている．ガウシアン・ユニタリー・アンサンブル (GUE) とは，$N \times N$ エルミート行列全体のなす空間にガウス分布

$$P_N(dX) = Z_N^{-1} \exp(-\operatorname{Tr} X^2) dX$$

を考えたものである．GUE の実固有値の分布は，

$$\begin{aligned} \mu_N(x_1, \ldots, x_N) &= c_N^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^2 \exp(-\sum_{i=1}^{N} x_i^2) \\ &= \det(K^{(N)}(x_i, x_j))_{i,j=1}^{N} \qquad (1) \end{aligned}$$

によって与えられることはよく知られている [8]．ただし，積分核 $K^{(N)}(x, y)$ は $\psi_i(x)$ を適当に正規化されたエルミート関数の列とすると，

$$K^{(N)}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) \psi_i(y)$$

によって与えられる．以下，こうして得られるランダムな N 個の実固有値を $\mathbf{R}$ 上のランダム N 点場として捉えることにしよう．

ここでランダム点場の定義を与えておこう．R を（粒子の存在する）局所コンパクト位相空間，$Q = Q(R)$ は R 上の局所有限な点配置空間とする．つまり，Q の元は $\xi = \sum_i \delta_{x_i}, x_i \in Q$ のように書け，任意のコンパクト集合 A に対して $\xi(A)$ が有限となる非負測度全体である．ランダム点場とは Q 上の確率測度 μ のこと（または，組 (Q, μ) のこと）をいう．

ランダム場を記述するには，ラプラス変換を用いるのが便利である．ラプラス変換とは，テスト関数 $f : R \to \mathbf{R}$ に対して，

$$\int_Q \mu(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle)$$

によって定義されるものである．ただし，$\xi = \sum_i \delta_{x_i}$ のとき $\langle \xi, f\rangle = \sum_i f(x_i)$ である．代表的な無相関な点場の例としてポアソン場がある．点場が以下の２条件を満たすとき，intensity 測度 λ のポアソン場といい，ここでは μ のかわりに Π_λ と書くことにする．

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset R$ が互いに素ならば，非負整数値確率変数 $\xi(A_1)$, $\xi(A_2), \ldots, \xi(A_n)$ は独立である．
2. R 上の非負ラドン測度 $\lambda(dx)$ に対して，

$$\mu(\xi(A) = n) = \frac{\lambda(A)^n e^{-\lambda(A)}}{n!}$$

を満たす．

ポアソン場のラプラス変換は，

$$\int_Q \Pi_\lambda(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \exp\left(-\int_R (1-e^{-f(x)})\lambda(dx)\right)$$

となることが簡単な計算よりわかる．

GUE の固有値から得られる点場のラプラス変換は，(1) に与えられた密度関数の形から

$$\int_Q \mu^{(N)}(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I - (1-e^{-f})K^{(N)})$$

となることがわかる．ただし，$K^{(N)}$ は上で定義した $K^{(N)}(x,y)$ を積分核とする積分作用素，右辺は $L^2(\mathbf{R})$ 上の積分作用素 $(1-e^{-f})K^{(N)}$ のフレドホルム行列式である．さらに $N \to \infty$ では $K(x,y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$ とおくと

$$\int_Q \mu(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I - (1-e^{-f})K)$$

となり，ある点場 μ が存在する．ラプラス変換がこの形で与えられる点場は，もっと一般の積分核 K に対しても存在する．実際，次のような存在定理を得る [11, 12]．

定理 2.1. $K : L^2(R) \to L^2(R)$ を対称な局所トレース族[1]積分作用素で，スペクトルが $[0,1]$ に含まれているとする．このとき，$Q = Q(R)$ 上に

$$\int_Q \mu(d\xi)\exp(-\langle \xi, f\rangle) = \mathrm{Det}(I - (1-e^{-f})K)$$

[1]作用素 K の任意のコンパクト集合 $\Lambda(\subset R)$ への制限 K_Λ がトレース族であるとき，K が局所トレース族であるという．

を満たす唯一の確率測度 μ が存在する．また，相関関数は

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n)=\det(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

によって与えられる．

ここで得られたランダム点場を [6, 7] に従って，フェルミオン・ランダム（点）場とよぶ．同様にして以下のようにボゾン・ランダム（点）場も得られる．

定理 2.2. $K:L^2(R)\to L^2(R)$ を対称な局所トレース族積分作用素で，スペクトルが $[0,\infty)$ に含まれているとする．このとき，$Q=Q(R)$ 上に

$$\int_Q \mu(d\xi)\exp(-\langle\xi,f\rangle)=\mathrm{Det}(I+(1-e^{-f})K)^{-1}$$

を満たす唯一の確率測度 μ が存在する．また，相関関数は

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n)=\mathrm{per}(K(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$$

によって与えられる．

これらの一般化として次の問題を考えよう．

問題 2.3. 対称な局所トレース族積分作用素 $K:L^2(R)\to L^2(R)$ に対して然るべき条件のもと，

$$\int_Q \mu_{\alpha,K}(d\xi)\exp(-\langle\xi,f\rangle)=\mathrm{Det}(I+\alpha(1-e^{-f})K)^{-1/\alpha} \tag{2}$$

を満たす確率測度 $\mu_{\alpha,K}$ は存在するか？

この問題の意味を考えるためにもっとも簡単な例を考えてみよう．R を一点 x からなる空間とする．このとき配置空間 $Q=Q(R)$ は点 x にある粒子の個数と同一視できるから，$Q=\{0,1,2,\dots\}$ としてよい．このとき，左辺は

$$\int_Q \mu(d\xi)\exp(-\langle\xi,f\rangle)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nf}\mu(\{\xi=n\})$$

となる．一方，右辺は

$$\begin{aligned}&(1+\alpha(1-e^{-f})K)^{-1/\alpha}\\ &=\ (1+\alpha K)^{-1/\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha)}{n!}\left(\frac{K}{1+\alpha K}\right)^n e^{-nf}\end{aligned}$$

となり，両辺比較することにより，

$$\mu(\{\xi=n\})=(1+\alpha K)^{-1/\alpha}\frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha)}{n!}\left(\frac{K}{1+\alpha K}\right)^n$$

を得る．μ が確率測度になるためには，任意の $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha) \geq 0$ となることが必要十分であり，これは

$$\alpha \in [0, \infty) \cup \{-1/m \,;\, m = 1, 2, \ldots\}$$

と同値である．このとき，μ は「一般化された二項分布」と呼ばれるものである．上の簡単な考察により，一般の α と K に対しては (2) を満たす確率測度 $\mu_{\alpha,K}$ は存在しないことがわかった．

それでは，どのような α と K の条件のもと，$\mu_{\alpha,K}$ は存在するのか？もしもランダム場 $\mu_{\alpha,K}$ が存在したとすると，相関関数は

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = \det_\alpha(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

となる．よって，ランダム場が存在するためには，この量が非負になることが必要である．このようにして 1 節で考えた問題に辿りつく．実際，もう少し考察を進めると，与えられた K に対して，$J_\alpha = K(I + \alpha K)^{-1}$ を考えて，この J に対する $\det_\alpha(J(x_i, x_j))_{i,j=1}^n, \forall x_1, \ldots, x_n, \forall n \geq 0$ の非負性が，ランダム場 $\mu_{\alpha,K}$ の存在と同値になることがわかる．

注意 2.4. $\alpha = 0$ は何に対応しているのか考えてみる．$\lambda_i, i \geq 1$ を $(1-e^{-f})K$ の固有値とする．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}(I + \alpha(1 - e^{-f})K)^{-1/\alpha} \\
&= \prod_{i\geq 1}(1 + \alpha\lambda_i)^{-1/\alpha} \to \prod_{i\geq 1} e^{-\lambda_i} \\
&= \exp(-\mathrm{Tr}(1 - e^{-f})K) = \exp\left(\int_R (1 - e^{-f})K(x, x)dx\right).
\end{aligned}$$

となり，$\mu_{0,K}$ は intensity 測度が $K(x, x)dx$ のポアソン場になり，ポアソン場はこの枠組に入ることがわかる．

3　現在までわかっていること

現在まででわかっていることは以下のことである．

定理 3.1. $\alpha \in \{-1/m \,;\, m = 1, 2, \ldots\} \cup \{0\} \cup \{2/m \,;\, m = 1, 2, \ldots\}$ に対しては，任意の非負定値な K に対するランダム場 $\mu_{\alpha,K}$ が唯一存在する．その相関関数は $\det_\alpha(K(x_i, x_j))$ で与えられる．

注意 3.2. 上の定理は，任意の非負定値な K に対してランダム場 $\mu_{\alpha,K}$ が存在するための α の条件を与えている．逆に，与えられた K に対して，$J_\alpha(x, y) = K(I + \alpha K)^{-1}(x, y) \geq 0, \forall x, y \in R$ となることは，任意の $\alpha \geq 0$ に対して $\mu_{\alpha,K}$ が存在するための十分条件となる．

定理 3.1 の系として次が得られる．

系 3.3. $\alpha \in \{-1/m\ ;\ m=1,2,\dots\} \cup \{0\} \cup \{2/m\ ;\ m=1,2,\dots\}$ に対しては,

$$A \geq 0 \Longrightarrow \mathrm{det}_\alpha A \geq 0.$$

定理 3.1 の証明のアイディアは以下の通りである．

$\alpha = \pm 1$ のときの確率測度 $\mu_{\pm 1,K}$ の存在は定理 2.1 と定理 2.2 によりわかっている．一方，独立なランダム場の m 個の重ねあわせのラプラス変換は，ラプラス変換の m 乗になることに注意すれば，$\alpha = \pm 1/m$ の確率測度の存在はわかる．

$\alpha = 2$ は少し特別である．任意の非負定値な K に対しては，$E[X(x)] = 0, E[X(x)X(y)] = K(x,y)$ となるガウス場 $\{X(x), x \in R\}$ が存在することが知られている．ランダムな intensity 測度 $X^2(x)\lambda(dx)$ を持つポアソンランダム場 Π_{X^2} をガウス場について平均をとった $E[\Pi_{X^2}]$ が $\mu_{2,K}$ になることがラプラス変換の計算によりわかる．$\alpha = 2$ の存在がわかれば，$\alpha = 2/m$ の場合は $\alpha = \pm 1/m$ の場合と同様である．

特に $\alpha = 2$ の場合の結果より，以下の系を得る．

系 3.4. $X_1, \dots, X_n$ を平均 0, 共分散行列が A のガウス分布とすると,

$$\mathrm{det}_2 A = E[X_1^2 \cdots X_n^2].$$

また，数値計算などにより，det_α について以下のことを予想している．

予想 3.5. $\alpha \in [0,2] \cup \{-1/m\ ;\ m=1,2,\dots\}$ のとき,

$$A \geq 0 \Longrightarrow \mathrm{det}_\alpha A \geq 0.$$

4　関連する話題

正値性の問題は，組合せ論，確率論においてしばしばあらわれる．

(1) $\mathrm{det}_\alpha A$ と同様に $\det A$ と $\mathrm{per}\, A$ を補間するものとして，$\mathrm{det}_q A$ という q-アナログに関連するものがあり,

$$\mathrm{det}_q A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\iota(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

によって定義される．ただし，$\iota(\sigma)$ は反転数と呼ばれ,

$$\iota(\sigma) = \#\{(i,j)\ ;\ 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

である．この $\mathrm{det}_q A$ についても問題 1.1 と同様の問題が考えられるが，$-1 \leq q \leq 1$ のとき，行列 $(q^{\iota(\sigma\eta^{-1})})_{\sigma,\eta \in \mathfrak{S}_n}$ が非負定値となることにより，$\mathrm{det}_q A$ の非負値性が従う [1].

(2) χ_λ を n の分割 λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の指標とする．この既約指標に対して，

$$\det{}_\lambda A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

と定義する．これは immanant と呼ばれ [3, 5]，任意の非負定値行列 A に対して

$$\det{}_\lambda A \geq 0$$

となることが簡単にわかる．さらに，Schur は以下のことを証明している [10].

$$\det{}_\lambda A \geq \chi_\lambda(1) \det A.$$

この類似で，任意の非負定値行列 A に対して

$$\det{}_\lambda A \leq \chi_\lambda(1) \operatorname{per} A.$$

が成り立つであろうという Lieb による予想がある．現在までのところ，$n \leq 13$ までは正しいことが証明されている [9].

(3) $\det_\alpha A$ は immanant を用いて展開することができる．

$$\det{}_\alpha A = \sum_{|\lambda|=n} \alpha^n \binom{\alpha^{-1}}{\lambda'} \det{}_\lambda A.$$

ただし，λ' は λ の dual, $\binom{\beta}{\lambda}$ は一般化された二項係数で，

$$\binom{\beta}{\lambda} = \prod_{x \in \lambda} \left(\frac{\beta - c(x)}{h(x)} \right)$$

である．x が λ に対応するヤング図形の i 行 j 列の箱のとき $c(x) = j - i$, $h(x)$ は hook length をあらわす．

この表示より，$|\alpha| \leq 1/n$ のときは，

$$A \in \mathcal{H}_n \Longrightarrow \det{}_\alpha A \geq 0$$

となる．

参考文献

[1] M. Bożejko and R. Speicher, *An example of a generalized Brownian motion*, Commun. Math. Phys. **137** (1991), 519–531.

[2] D. J. Daley and D. Veres-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer Verlag, 1988.

[3] G. James, *Permanents, Immanants, and Determinants*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **47** (1987), 431–436.

[4] E. H. Lieb, *Proofs of some conjectures on permanents*, J. Math. and Mech. **16** (1966), 127–134.

[5] D. E. Littlewood, The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, 2nd edition, Oxford University Press, London, 1958.

[6] O. Macchi. *The coincidence approach to stochastic point processes*, Adv. Appl. Prob. **7** (1975), 83-122.

[7] O. Macchi, *The fermion process – a model of stochastic point process with repulsive points*, Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the Eighth European Meeting of Statisticians (Tech. Univ. Prague, Prague, 1974), Vol. A, 391–398.

[8] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd edition, Academic Press, 1991.

[9] T. H. Pate, *Tensor inequalities, ξ-functions and inequalities involving immanants*, Linear Alg. and its Applications **295** (1999), 31–59.

[10] I. Schur, *Über endiche Gruppen und Hermitische Formen*, Math. Z. **1** (1918), 184-207.

[11] T. Shirai and Y. Takahashi, *Random points fields associated with certain Fredholm determinants I : Fermion, Poisson and Boson point process*, RIMS preprint.

[12] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 923–975.

[13] D. Vere-Jones, *A generalization of permanents and determinants*, Linear Algebra Appl. **111** (1988), 119–124.