数理解析研究所講究録 1308 巻 2003 年 145-157

non-parametric な状況下での多次元分布の平均ベクトルの逐次点推定問題のregretのsecond order について

長尾壽夫 (大阪府立大・工学研究科)

Hisao Nagao (Dept. Math. Sci. Osaka Pref. Univ.)

1. 序

ここでは多次元分布を特定せず，連続でありその台は母数には依存しないという仮定の下で考える． ここでの推定問題は，平均ベクトルの逐次点推定問題のregretの評価である． この問題の一次元の場合は，Martinsek('83)があたえている． また彼('90)は回帰係数の問題に対しても分布を特に仮定せず，平均に関して対称という仮定の下で同じ問題を考えている． 一方，Takada('92)は一次元正規分布の平均の問題について，一点だけ改良する stopping rule をあたえてregret の漸近展開を求めている． Sriram ('92)はTakadaと同じ流儀で回帰係数の問題に対して特に分布を仮定せず平均に関して対称という仮定の下で求めている．ここでの問題は，Martisek('83) の多次元化である． 基礎となるのはMartisek('83)は勿論であるが，Chow and Martinsek('82), Chow, Robbins and Teicher('65) などである．

2. 問題の設定

ここではまず初めにregret等の問題について過去の結果についてふれておく． $p\times 1$ ベクトル $X, X_1, X_2, \cdots$ を独立でmomentは未知であり known な関数形を持つpdfを考える．

$$\mathrm{E}(X)=\mu,\quad \mathrm{Var}(X)=\Sigma\quad (|\Sigma|\neq 0)$$

とする． 平均ベクトル μ を $\bar{X}_n=\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ で推定を行う． loss として，

$$L_n=(\bar{X}_n-\mu)'(\bar{X}_n-\mu)+cn$$

を考える． ただし，$c>0$. すると risk は

$$R_n=\mathrm{E}L_n=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\Sigma+cn.$$

したがって最小となる sample size は，$n_c=\sqrt{\dfrac{\mathrm{tr}\Sigma}{c}}$となる． よって最小となる risk は

$R_{n_c} = 2cn_c$. Σ が未知の時，n_c は用いられない．そこで

$$N_c = N \quad = \inf\{n \geq m \mid n \geq \sqrt{\frac{\mathrm{tr}S_n}{c}}\}$$

$$= \inf\{n \geq m \mid n(\frac{\mathrm{tr}\Sigma}{\mathrm{tr}S_n})^{1/2} \geq n_c\}.$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(X_i - \bar{X}_n)'/n$ であり，m は c に依存する．よってStopping time N に対するrisk は

$$R_c^* = \mathrm{E}\{(\bar{X}_N - \mu)'(\bar{X}_N - \mu) + cN\}$$

となり，$\omega(c) = R_c^* - R_{n_c}$ をregret という．ここでは $c \to 0$ のとき，$\omega(c)$ の二次近似をあたえる．過去の結果にふれると，$p = 1$ で正規分布のとき，Robbins('59) は $\bar{X}_n$ と $S_m, \cdots, S_n$ $(n = m, m+1, \cdots)$ が独立であることを示して，EN の数値例をあたえた．同じ仮定の下で，Starr ('66) は $R_c^*/R_{n_c} \to 1$ を示し，Starr and Woodroofe ('69) はより強い結果 $\omega(c) = O(c)$ を示した．また Woodroofe ('77) は $\omega(c) = \frac{c}{2} + o(c)$ を示した．これらは，m はc に依存しない．多次元正規分布のとき，Khan('68), Rohatgi and O'Neill('73) は共分散行列が未知な成分を持つ対角行列の仮定の下で推定問題を考えている．一般の正値行列のとき，Ghosh, Sinha and Mukhapadyay ('76), Wang('80) は$\omega(c) = O(c)$ をあたえた．非正規分布として，Starr and Woodroofe ('72) は指数分布の場合を扱っている．また$\omega(c) \leq O(c)$ を示した．一次元のとき，Ghosh and Mukhopadhyay ('79), Martinsek ('83) はこの論文と同じ問題を扱っている．前者は$R_c^*/R_{n_c} \to 1$を，後者は$\omega(c)$ のsecond order をあたえた．またGhosh, Mukhopadyay and Sen ('97) を見よ．

また，Takada and Nagao ('01) と Nagao ('02) はLinex loss の下で前者は多変量正規分布の平均，後者は回帰係数の問題を取り扱っている．Nagao and Srivastava ('02) は多変量正規分布の下での平均のfixed width confidence region を求めている．

3. stopping time の平均

$U_c = N(\mathrm{tr}\Sigma/\mathrm{tr}S_N)^{1/2} - n_c$をexcess といい、$U_c \to U$ に法則収束することが知られている。$\mathrm{E}(\bar{X}_N - \mu)'(\bar{X}_N - \mu)$ を求めるのであるから、同じような問題を取り扱っているAras and Woodroofe ('93) とは異なる。これを計算するには、$\mu = 0$として良い。$Z_n =$

$n(\mathrm{tr}\Sigma/\mathrm{tr}S_n)^{1/2}$とおくと，$Z_n = W_n + \xi_n$ となる．なお，

$$W_n = \textstyle\sum_{i=1}^n (3 - (\mathrm{tr}\Sigma)^{-1} X_i' X_i)/2,$$

$$\xi_n = n(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1} \bar{X}_n' \bar{X}_n/2$$

$$+3 *^{-5/2} n(\mathrm{tr}(S_n - \Sigma))^2 (\mathrm{tr}\Sigma)^2/8,$$

ただし、$* \in (\mathrm{tr}\Sigma, \mathrm{tr}S_n)$. よってWald のLemma 等を用いて，

定理 3.1. stopping time N に対して，

$$\mathrm{E}(N - n_c) = \nu - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{Var}((X-\mu)'$$

$$\times (X-\mu)) + o(1),$$

ただし，$\nu = \mathrm{E}(U)$.

4. regret $\omega(c)$ の評価

$$\begin{aligned}\omega(c) &= \mathrm{E}(\bar{X}_N' \bar{X}_N) + c\mathrm{E}(N) - 2cn_c \\ &= \mathrm{E}(\bar{X}_N' \bar{X}_N - cN) + 2c\mathrm{E}(N - n_c) \\ &= c\mathrm{E}(\frac{1}{c}\bar{X}_N' \bar{X}_N - N) + 2c\mathrm{E}(N - n_c).\end{aligned}$$

そこで $\mathrm{E}(\frac{1}{c}\bar{X}_N' \bar{X}_N - N)$ を考える．
$\{Y_n, \mathcal{F}_n, 1 \le n < \infty\}$ を確率過程とする．ただし，Y_n は $\mathcal{F}_n$-可測とし，$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}, Y_0 = 0, Z_n = Y_n - Y_{n-1}$ とする．すると，

補題 4.1. (Chow, Robbins and Teicher). もし $Y_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ならば，任意の stopping time t に対して，

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^t z_i) = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^t \mathrm{E}(z_i|\mathcal{F}_{i-1}))$$

上の補題より、$S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i$ とおくと，$\mathrm{E}(S_N^{*\prime} S_N^*) = (\mathrm{tr}\Sigma)\mathrm{E}(N)$ であるから，

$$\mathrm{E}(\frac{1}{c}\bar{X}_N' \bar{X}_N - N) = I + II$$

である．ただし，

$$I \quad = \mathrm{E}(S_N^{*\prime} S_N^* ((cN^2)^{-1} - (\mathrm{tr}S_N)^{-1})$$

$$II \quad = \mathrm{E}(S_N^{*\prime} S_N^* ((\mathrm{tr}S_N)^{-1} - (\mathrm{tr}\Sigma)^{-1})).$$

したがって,

$$I = -\mathrm{E}(S_N^{*\prime} S_N^* \frac{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1/2}}{N} U_c(\frac{1}{\sqrt{c}N} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tr}S_N}})).$$

すると，$n_c > (N-1)(\frac{\mathrm{tr}\Sigma}{\mathrm{tr}S_{N-1}})^{1/2}$を用いて、Taylar 展開することにより、

$$U_c \leq \frac{3}{2} n_c (N-1)^{-1} + \frac{3}{8} n_c (N-1)^{-3/2}.$$

$\frac{n_c}{N}$が u.i. (uniformly integrable) を示す必要がある．またその他後の計算のために必要な事項をまとめる．詳しくは，Chow and Martinsek ('82) を見よ．

補題 4.2. $Q_n = \sum_{i=1}^n X_i' X_i$ とおく．ただし，$Q_0 = 0$. ここで，$\delta c^{-1/4} \leq m = o(c^{-1/2})$ を満たす正の数δが存在するとする．

(1) もし $\mathrm{E}(X'X) < \infty$ であるならば, 任意の $q > 0$ に対して，$(\frac{n_c}{N})^q$ はi.u. である．

(2) もし $t \geq 1$ に対して，$\mathrm{E}(X'X)^t < \infty$ ならば，$(\frac{N}{n_c})^t$ は u.i. である．

(3) もし $t \geq 1$ に対して $\mathrm{E}(X'X)^t < \infty$ ならば，$|\frac{1}{n_c} S_N^{*\prime} S_N^*|^t$ は u.i. である．

(4) もし $t \geq 2$ に対して $\mathrm{E}(X'X)^t < \infty$ ならば，$|\frac{1}{\sqrt{n_c}}(Q_N - N\mathrm{tr}\Sigma)|^t$ は u.i. である．

これより，$I = -2\nu + o(1)$ となる．

次に，II について考える． $II = II_a + II_b$とおくと，

$$
\begin{aligned}
II_a = \ & \frac{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}}{n_c} \mathrm{E}\Big\{ (S_N^{*\prime} S_N^* - \mathrm{tr}V_N)(N \\
& -(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{tr}V_N)\Big\} \\
II_b = \ & \frac{1}{n_c} \mathrm{E}\Big\{ (S_N^{*\prime} S_N^* - \mathrm{tr}V_N)(n_c - (\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{tr}V_N) \\
& \times(\mathrm{tr}V_N)^{-1}(N - (\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{tr}V_N)\Big\} \\
& +(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{E}(\frac{1}{N} S_N^{*\prime} S_N^*).
\end{aligned}
$$

となる． II_a を求めるために，次の２つの補題を必要とする．

補題 4.3.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{n_c}\mathrm{E}(\frac{1}{N} S_N^{*\prime} S_N^*)^2 = o(1), \\
& \frac{1}{n_c}\mathrm{E}(\frac{1}{N} (S_N^{*\prime} S_N^*)^2) = (\mathrm{tr}\Sigma)^2 + 2\mathrm{tr}\Sigma^2 + o(1), \\
& \frac{1}{n_c}\mathrm{E}(\frac{1}{N} Q_N(S_N^{*\prime} S_N^*)) = (\mathrm{tr}\Sigma)^2 + o(1).
\end{aligned}
$$

証明の概略。最初の項はHölder の不等式を用いて、補題 4.2 を用いる。次の項は、

$$
\frac{1}{n_c}\mathrm{E}(\frac{1}{N}(S_N^{*\prime} S_N^*)^2) = \frac{n_c}{N}\mathrm{E}(\frac{1}{n_c}(S_N^{*\prime} S_N^*)^2)
$$

とし、再び補題 4.2 を用いる。最後の項は

$$
\frac{1}{n_c}\mathrm{E}(\frac{1}{N} Q_N(S_N^{*\prime} S_N^*)) = \frac{1}{n_c}\mathrm{E}(\frac{1}{N}(Q_N - N\mathrm{tr}\Sigma)(S_N^{*\prime} S_N^*) + (\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{E}(\frac{N}{n_c})
$$

より得る。

補題 4.1 を用いることによって次を得る。

補題 4.4.

$$\mathrm{E}(S_N^{*\prime}S_N^* - Q_N)^2 = 4\mathrm{E}(\textstyle\sum_{k=1}^N S_{k-1}^{*\prime}\Sigma S_{k-1}^*),$$

$$\mathrm{E}((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}S_N^{*\prime}S_N^* - N)^2 = 4(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}(\textstyle\sum_{k=1}^N S_{k-1}^{*\prime}$$

$$\times\Sigma S_{k-1}^*) + 4(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}((X'X)X')\mathrm{E}\textstyle\sum_{i=1}^N S_{i-1}^*$$

$$+\{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}(X'X)^2 - 1\}\mathrm{E}(N),$$

$$\mathrm{E}((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N - N)^2 = ((\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}(X'X)^2$$

$$-1)\mathrm{E}(N).$$

$\mathrm{tr}V_N = Q_N - \frac{1}{N}S_N^{*\prime}S_N^*$, 補題 4.2, 4.3 を用いて，次を得る.

$$II_a = \frac{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}}{n_c}\{\mathrm{E}(S_N^{*\prime}S_N^* - N\mathrm{tr}\Sigma)(N - (\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)$$

$$+(\mathrm{tr}\Sigma)\mathrm{E}(N - (\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2\} + 2(\mathrm{tr}\Sigma^2)$$

$$\times(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2} + o(1).$$

また次であることを用いる. $2\mathrm{E}((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}S_N^{*\prime}S_N^* - N)$

$$\times((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N - N) = -(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}(S_N^{*\prime}S_N^* - Q_N)^2$$

$$+\mathrm{E}((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}S_N^{*\prime}S_N^* - N)^2 + \mathrm{E}((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N - N)^2.$$

補題 4.1 より，次の補題を得る.

補題 4.5.

$$\mathrm{E}(S_N^{*\prime}S_N^* - Q_N)^2 = 4\mathrm{E}(\textstyle\sum_{k=1}^N S_{k-1}^{*\prime}\Sigma S_{k-1}^*),$$

$$\mathrm{E}((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}S_N^{*\prime}S_N^* - N)^2 = 4(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}(\textstyle\sum_{k=1}^N S_{k-1}^{*\prime}$$

$$\times\Sigma S_{k-1}^*) + 4(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}((X'X)X')\mathrm{E}\textstyle\sum_{i=1}^N S_{i-1}^*$$

$$+\{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}(X'X)^2 - 1\}\mathrm{E}(N),$$

$$\mathrm{E}((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N - N)^2 = ((\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{E}(X'X)^2$$

$$-1)\mathrm{E}(N).$$

また次の補題を必要とする.

補題 4.6. 次の関係式が成り立つ.

$$\mathrm{E}\sum_{i=1}^{N} S_{i-1}^* = \mathrm{E}NS_N^*$$

証明。 a を $p\times 1$ の固定したベクトルとする。 $u_i = a'X_i$ とし、$a'S_N^* = U_N = \sum_{i=1}^N u_i$ とおく。また $U_0 = 0$ とし、$Y_n = nU_n$とおくと、

$$Y_n - Y_{n-1} = U_{n-1} + nu_n.$$

となる。すると、 $Y_n = \sum_{j=1}^n (U_{j-1} + ju_j)$. 従って、

$$\mathrm{E}NU_N = \mathrm{E}\sum_{j=1}^{N}(U_{j-1} + ju_j) = \mathrm{E}\sum_{j=1}^{N} U_{j-1} + \mathrm{E}\sum_{j=1}^{N} ju_j.$$

この補題を示すためには、 $\mathrm{E}\sum_{j=1}^N U_{j-1}$ と $\mathrm{E}\sum_{j=1}^N ju_j$ が絶対収束を示す必要がある。すると、

$$\mathrm{E}|\sum_{j=1}^{N} ju_j| \le \mathrm{E}(N\sum_{j=1}^{N}|u_j|) \le (\mathrm{E}N^2)^{1/2}\{\mathrm{E}(\sum_{j=1}^{N}|u_j|)^2\}^{1/2}.$$

となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\textstyle\sum_{j=1}^N |u_j|)^2 = &\ \mathrm{E}\{(\textstyle\sum_{j=1}^N(|u_j| - \mathrm{E}|u_j|)) + N\mathrm{E}|u_1|\}^2\\ &\le 2\{\mathrm{E}(\textstyle\sum_{j=1}^N(|u_j| - \mathrm{E}|u_j|))^2\} + (\mathrm{E}N^2)(\mathrm{E}|u_1|)^2\}\end{aligned}$$

であり、また $\mathrm{E}(\sum_{j=1}^N(|u_j| - \mathrm{E}(|u_j|))^2 = (\mathrm{E}N)\mathrm{Var}(|u_1|) \le (\mathrm{E}N)(\mathrm{E}(u_1^2),$ であるから $\mathrm{E}\sum_{j=1}^N ju_j$ は絶対収束する。次に $\sum_{j=1}^N U_{j-1}$を考える。すると、 $|U_{j-1}| \le \sum_{i=1}^j |u_i|$ であるから、$\sum_{j=1}^N |U_{j-1}| \le \sum_{i=1}^N (N-i+1)|u_i| \le N\sum_{i=1}^N |u_i|$ を得る。補題4.1 と似た計算によって結果を得る。

上の関係式と $\mathrm{E}S_N^* = 0$を用いて次を得る.

$$\begin{aligned}II_a = &-2\frac{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}}{n_c}\mathrm{E}(X'XX')\mathrm{E}(N-n_c)S_N^*\\ &+2(\mathrm{tr}\Sigma^2)(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2} + o(1).\end{aligned}$$

$N-n_c=U_c+((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N-N)-\xi_N$であるから,

$$II_a=-\{\mathrm{E}(X'XX')\}\{\mathrm{E}(XX'X)\}(\mathrm{tr}\Sigma)^{-3}$$
$$+2(\mathrm{tr}\Sigma^2)(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}+o(1).$$

また, $II_b=II_{b_1}+II_{b_2}$とおく. ただし,

$$II_{b_1}=\frac{1}{n_c}\mathrm{E}\Big\{(S_N^{*\prime}S_N^*-\mathrm{tr}V_N)(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{tr}V_N)$$
$$\times((\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N-U_c+\xi_N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{tr}V_N)$$
$$\times(\mathrm{tr}V_N)^{-1}\Big\}+(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{E}(\frac{1}{N}S_N^{*\prime}S_N),$$
$$II_{b_2}=\frac{3}{2}\frac{1}{n_c}\mathrm{E}\Big\{(S_N^{*\prime}S_N^*-\mathrm{tr}V_N)(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{tr}V_N)$$
$$\times(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)(\mathrm{tr}V_N)^{-1}\Big\}.$$

$(\mathrm{tr}V_N)^{-1}\le(\mathrm{const})\frac{n_c^2}{N^3}$であるから, $II_{b_1}=1+o(1)$である. $\mathrm{tr}V_N=Q_N-S_N^{*\prime}S_N^*/N$を用いると,

$$II_{b_2}=\frac{3}{2n_c}\mathrm{E}\{\frac{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}}{N}(S_N^{*\prime}S_N^*)^2(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)$$
$$\times(\mathrm{tr}V_N)^{-1}\}-\frac{3}{2n_c}(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{E}(\frac{1}{N}S_N^{*\prime}S_N^*(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N))$$
$$-\frac{3}{2n_c}\mathrm{E}(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2$$
$$+\frac{3}{2n_c}\mathrm{E}\{S_N^{*\prime}S_N^*(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2(\mathrm{tr}V_N)^{-1}\}.$$

上の最初の項はHölder の不等式で評価すると$O(n_c^{-1/2})$. また次の項も$O(n_c^{-1/2})$となり、

$$II_{b_2}=-\frac{3}{2n_c}\mathrm{E}(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2$$
$$+\frac{3}{2n_c}\mathrm{E}\{S_N^{*\prime}S_N^*(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2(\mathrm{tr}V_N)^{-1}\}+o(1)$$

となる。上の$\frac{3}{2}$を除いた第2項は

$$\frac{1}{n_c}\mathrm{E}\left\{S_N^{*\prime}S_N^*(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2(\mathrm{tr}V_N)^{-1}\right\}$$

$$=\frac{(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}}{n_c^2}\mathrm{E}\left\{S_N^{*\prime}S_N^*(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2\right\}+\frac{1}{n_c^2}\mathrm{E}\left\{S_N^{*\prime}S_N^*\right.$$

$$\left.\times(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2\,(n_c-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}(\mathrm{tr}V_N))(\mathrm{tr}V_N)^{-1})\right\}$$

となる。

$$\mathrm{E}S_N^{*\prime}S_N^*(N-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_N)^2=\mathrm{E}(1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}X'X)^2\mathrm{E}\textstyle\sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha-1}^{*\prime}S_{\alpha-1}^*$$

$$+4\mathrm{E}\textstyle\sum_{\alpha=1}^N\mathrm{E}(1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}X'X)(X'S_{\alpha-1}^*)(\alpha-1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_{\alpha-1})$$

$$+2\mathrm{E}\textstyle\sum_{\alpha=1}^N\mathrm{E}(1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}X'X)^2(X'S_{\alpha-1}^*)+(\mathrm{tr}\Sigma)\mathrm{E}\textstyle\sum_{\alpha=1}^N(\alpha-1$$

$$-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_{\alpha-1})^2+2\mathrm{E}(X'X)(1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}X'X)$$

$$\times\mathrm{E}\textstyle\sum_{\alpha=1}^N(\alpha-1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_{\alpha-1})+\mathrm{E}(X'X)(1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}X'X)^2\mathrm{E}(N).$$

補題 4.7. a を$p\times 1$ ベクトルとする。すると次が成り立つ。

$$\frac{1}{n_c^2}\mathrm{E}\sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha-1}^{*\prime}S_{\alpha-1}^*=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X'X)+o(1).$$

$$\frac{1}{n_c^2}\mathrm{E}\sum_{\alpha=1}^N a'S_{\alpha-1}^*(\alpha-1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_{\alpha-1})=\frac{1}{2}\mathrm{E}a'X$$

$$\times(1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}X'X)+o(1).$$

$$\frac{1}{n_c^2}\mathrm{E}a'\sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha-1}^*=\frac{1}{n_c^2}\mathrm{E}a'NS_N^*=o(1)$$

$$\frac{1}{n_c^2}\mathrm{E}\sum_{\alpha=1}^N(\alpha-1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_{\alpha-1})^2=\frac{1}{2}\mathrm{E}(1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}X'X)^2+o(1),$$

$$\frac{1}{n_c^2}\mathrm{E}\sum_{\alpha=1}^N(\alpha-1-(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}Q_{\alpha-1})=o(1).$$

補題 4.1. と$U_c, N-n_c$ の関係式を用いると次を得る.

$$II_b = 3(\mathrm{tr}\Sigma)^{-1}\mathrm{E}(X'XX')\mathrm{E}(XX'X) + 2(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}$$
$$\times(\mathrm{tr}\Sigma^2) + 1 + o(1).$$

従って，次を得る.

定理 4.1. ある $\epsilon > 0$ に対して，$\mathrm{E}((X-\mu)'(X-\mu))^{4+\epsilon} < \infty$ であり，ある $\delta > 0$ に対して，$\delta c^{-1/4} \leq m = o(c^{-1/2})$ のとき，regret $\omega(c)$ は

$$\omega(c) = c\{2(\mathrm{tr}\Sigma)^{-3}(m_3 m_3') + 2(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}(\mathrm{tr}\Sigma^2)$$
$$-3(\mathrm{tr}\Sigma)^{-2}\mathrm{Var}((X-\mu)'(X-\mu))/4\} + o(c),$$

ただし，$m_3 = \mathrm{E}(X-\mu)'(X-\mu)(X-\mu)'$.

5. 例

ここでいくつかの例を述べる。

p 次元正規分布を考える。すると

$$\frac{c}{2p} + o(c) \leq \omega(c) = \frac{c}{2}\frac{\mathrm{tr}\Sigma^2}{(\mathrm{tr}\Sigma)^2} + o(c) \leq \frac{c}{2} + o(c).$$

これより、すべての p に対して、regret は $c \to 0$ のとき Σ には無関係に有界となる。

この定理は多変量解析での多くのモデルを含む。例えば、Khan (68) および Rohatagi and O'Neill ('73) では共分散行列として $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \cdots, \sigma_p^2)$ を考えた。すると上の結果から regret は

$$\omega(c) = \frac{c}{2}\frac{\sum_{i=1}^{p}\sigma_i^4}{(\sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2)^2} + o(c).$$

つぎに p 次元正規分布の共分散行列が $\Sigma = \sigma^2\left[(1-\rho)I_p + \rho(1,\cdots,1)'(1,\cdots,1)\right]$ のとき、regret は

$$\omega(c) = c\left(\frac{1+\overline{p-1}\rho^2}{2p}\right) + o(c).$$

ただし、$-\frac{1}{p-1} < \rho < 1$. この表現からは、
$\omega(c)$ はσ^2に無関係になる。終わりに、誤差分布として、自由度kを持つ多次元t分布を考える。

確率ベクトルU と確率変数 Vは互いに独立とする。その分布は前者は平均0共分散行列Σを持つp次元正規分布とする。またVは自由度kのχ^2分布とする。このとき、$Z = U/\sqrt{V/k}$の分布を多次元t分布という。例えばAnderson (1984) を見よ。すると、

$$\mathrm{Var}(Z'Z) = 2(\frac{k}{k-2})^2\{\frac{k-2}{k-4}\mathrm{tr}\Sigma^2 + \frac{1}{k-4}(\mathrm{tr}\Sigma)^2\}.$$

また $\mathrm{E}(Z'ZZ') = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\omega(c) = & \ c\{\frac{(k-10)}{2(k-4)}\frac{\mathrm{tr}\Sigma^2}{(\mathrm{tr}\Sigma)^2} - \frac{3}{2(k-4)}\} + o(c) \\ & \le \frac{c(k-13)}{2(k-4)} + o(c) \quad \text{if } \ 10 < k < 13.\end{aligned}$$

また $4 < k \le 10$のとき、

$$\begin{aligned}\omega(c) &\le \frac{c}{2(k-4)}\{\frac{(k-10)}{p} - 3\} + o(c) \\ &= \frac{c}{2(k-4)}(\frac{k-10-3p}{p}) + o(c).\end{aligned}$$

従って、$4 < k < 13$となるkを選ぶと、すべてのpに対して、regret は漸近的に negative となる。これはこの逐次法がたとえ共分散行列が
knownであっても、よりよいことを示している。$p = 1$のとき、 Martinsek ('88) は数値例を通じて negative regret を論じている。また $p = 1$のとき、 Ghosh, Mukhopadhyay and Sen ('97) は t分布について、$k \le 7$のとき、negative であると述べている。

参考文献

[1] Anderson, T.W.(1984) An introduction to Multivariate Statistical Analysis. 2nd Edition. John Wiley & Sons, New York.

[2] Chow, Y.S. and Martinsek, A.T.(1982) Bounded regret of a sequential procedure for estimation of the mean. Ann. Statist., 10, 909-914.

[3] Chow, Y.S., Robbins, H. and Teicher, H.(1965). Moments of randomly stopped sums. Ann. Math. Statist. 36, 789-799.

[4] Ghosh, M. and Mukhopadhyay, N.(1979). Sequential point estimation of the mean when the distribution is unspecified. Commun. Statist. Theory Methods A., 8, 637-652.

[5] Ghosh, M., Mukhopadhyay, N. and Sen, P.K.(1997). Sequential Estimation. John Wiley & Sons, New York.

[6] Ghosh, M., Sinha, B.K. and Mukhopadhyay, N.(1976). Multivariate sequential point estimation. Jour. Multivar. Anal., 6, 281-294.

[7] Khan, R.A.(1968). Sequential estimation of the mean vector of a multivariate normal distribution. Sankhyā Ser. A. 30, 331-342.

[8] Martinsek, A.T.(1983). Second order approximation to the risk of a sequential procedure. Ann. Statist., 11, 827-836; Correction (1986), Ann. Statist., 14, 359.

[9] Martinsek, A.T.(1988). Negative regret, optional stopping, and the elimination of outliers. Jour. Amer. Statist. Assoc. 83, 160-163.

[10] Nagao, H.(2002) Sequential estimations of some vector in linear regression model under a linex loss. To appear in Scien. Math. Japon.

[11] Nagao, H. and Srivastava, M.S.(2002). Fixed width confidence region for the mean of a multivariate normal distribution. Jour. Multivar. Anal., 81, 259-273.

[12] Robbins, H.(1959). Sequential estimation of the mean of a normal population. In Probability and Statistics, H. Cramér Volume (ed. by U. Grenander), 235-245. Uppsala: Almquist and Wiksell.

[13] Rohatgi, V.K. and O'Neill, R.T.(1973). On sequential estimation of the mean of a multinormal population. Ann. Inst. Statist. Math., 25, 321-325.

[14] Starr, N.(1966). On the asymptotic efficiency of a sequential procedure for estimating the mean. Ann. Math. Statist., 36, 1173-1185.

[15] Starr, N. and Woodroofe, M.(1969). Remarks on sequential point estimation. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 63, 285-288.

[16] Starr, N. and Woodroofe, M.(1972). Further remarks on sequential estimation: The exponential case. Ann. Math. Statist., 43, 1147-1154.

[17] Takada, Y. and Nagao, H. (2001). Sequential point estimation of a multivariate normal mean vector under a linex loss function. Submitted for publication.

[18] Wang, Y.H.(1980). Sequential estimation of the mean of a multinormal population. Jour. Amer. Statist. Assoc., 75, 977-983.

[19] Woodroofe, M.(1977). Second order approximations for sequential point and interval estimation. Ann. Statist., 5, 984-995.