数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 39-45

優線形二階常微分方程式の正値解の存在について
Existence of positive solutions for some superlinear ordinary differential equations

浅川秀一　岐阜大学工学部
Hidekazu ASAKAWA
Faculty of Engineering,
Gifu University

1. 序

次の非線形二階常微分方程式

$$\begin{aligned} &w''(t)+k(t)\,w(t)^p=0 \quad 0<t<1, \\ &w(0)=w(1)=0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

の正値解 w の存在について考える．ここで，p は $p>1$ なる定数とし，$k(t)$ は $L^1_{loc}(0,1)$ に属する非負の関数で，

$$g(t) = \frac{p+1}{2}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{p+1}{2}}\int_0^t s^{p+1}k(s)\,ds, \tag{1.2}$$

$$h(t) = \frac{p+1}{2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{p+1}{2}}\int_t^1 (1-s)^{p+1}k(s)\,ds$$

とするとき，極限値

$$a \equiv \lim_{t\to 0} g(t), \qquad b \equiv \lim_{t\to 1} h(t) \tag{1.3}$$

が存在するものとする．（陰に，$\int_0^1 [s(1-s)]^{p+1}k(s)\,ds<+\infty$ も仮定している．）方程式 (1.1) の解としては，$w\in C^1[0,1]$ かつ $w'\in AC_{loc}(0,1)$ なるものを考えることにする．以下では，常に

$$k_0(t)=[t(1-t)]^{-\frac{p+3}{2}}$$

とする．

結果は，次のようになる．

定理 1.1. $\delta_0,\,\delta_1\in(0,1)$ があって，

$$\begin{aligned} &(k(t)-a\,k_0(t))\geq 0, \quad (\text{a.e. } t\in(0,\delta_0)), \\ &(k(t)-b\,k_0(t))\geq 0, \quad (\text{a.e. } t\in(\delta_1,1)) \end{aligned} \tag{1.4}$$

とするとき，次の各々の場合に，方程式 (1.1) の正値解が存在する．

(i) $a=b=0$ の場合： $k(t)\not\equiv 0$.

(ii) $a\geq b\geq 0$ の場合：

$$\int_0^1 (k(s)-a\,k_0(s))(1-s)^{p+1}\,ds=\lim_{t\to 0}\int_t^1 (k(s)-a\,k_0(s))(1-s)^{p+1}\,ds>0.$$

(iii) $b\geq a\geq 0$ の場合：

$$\int_0^1 (k(s)-b\,k_0(s))s^{p+1}\,ds=\lim_{t\to 1}\int_0^t (k(s)-b\,k_0(s))s^{p+1}\,ds>0.$$

定理 1.1 の (ii) と (iii) は，$t=0$ と $t=1$ の立場を置き換えた対称な場合であり，同一のものとみなせる．また，(i) は，(ii) $((iii))$ の特別な場合に過ぎないが，証明の道筋からいうと別々の場合となるから書いてある．尚，(i) の場合には，k の非負値性により不等式 (1.4) は自動的に満たされる．k が必ずしも非負値でない場合にも適用できるような条件を考えることもできるが，煩雑になるだけであるから，ここでは述べない．

方程式 (1.1) で $k(t)\equiv ak_0(t)$ $(a>0)$ のときには，

$$v(t)=C(p,a)\left(t^{-\frac{p-1}{2}}+(1-t)^{-\frac{p-1}{2}}\right)^{-\frac{2}{p-1}}\quad(0\leq t\leq 1)$$

で定義される関数 v が，(1.1) の正値解となる．ここで，$C(p,a)$ は p と a によって決まる定数である．このことと定理1.1 の (ii) $((iii))$ の場合からの帰結として，$a=b>0$ のときには，次のことが成り立つ．

系 1.2. $a=b>0$ のとき，

$$k(t)-ak_0(t)\geq 0,\quad (\text{a.e. } t\in(0,1))$$

であれば，(1.1) の正値解が存在する．

方程式 (1.1) の解は，楕円型偏微分方程式の球対称解と密接に関連している（詳しくは，[8] をみよ）．例えば，楕円型方程式

$$\Delta u(x)+K(|x|)\,u(x)^p=0\quad x\in R^N \tag{1.5}$$

$(N>2)$ の球対称解 $u(r)=u(|x|)$ が満たす常微分方程式

$$(r^{N-1}u'(r))'+r^{N-1}K(r)\,u(r)^p=0\quad r>0 \tag{1.6}$$

に，変数変換:

$$t=\frac{1}{\phi(r)},\quad w(t)=\frac{u(r)}{\phi(r)},\qquad \phi(r)\equiv 1+\frac{1}{N-2}r^{2-N}$$

を施すと方程式 (1.1) が得られる．ただし，$k(t)=r^{2(N-1)}\phi(r)^{p+3}K(r)$ となる．特に，(1.6) で $K(r)\equiv 1$ かつ $p=\frac{N+2}{N-2}$ の場合は，

$$k(t)=(N-2)^{-\frac{p+3}{2}}\left[t(1-t)\right]^{-\frac{p+3}{2}}=(N-2)^{-\frac{p+3}{2}}k_0(t)$$

である．また，

$$u(r)=\frac{w(t)}{t},\quad r^{N-2}u(r)=\frac{t}{(N-2)(1-t)}\frac{w(t)}{t},\qquad (0<t<1)$$

に注意すれば，w が $C^1[0,1]$ に属する境界条件 $w(0)=w(1)=0$ も込めた方程式 (1.1) の正値解であることは，u が $C[0,+\infty)\cap C^1(0,+\infty)$ に属し

$$u(0)>0,\quad {}^{\exists}\lim_{r\to+\infty}r^{N-2}u(r)=c>0$$

を満たす，方程式 (1.6) の正値解であることと同値である．尚，(1.6) の"$r=0$ に於ける本来の境界条件" $u'(0)=0$ は，

$$\lim_{t\to 0}t^{-\frac{N-1}{N-2}}\left(tw'(t)-w(t)\right)=0$$

と同値であり，これは，$w\in C^1[0,1)$ かつ $w(0)=0$ なら成り立つ．

楕円型方程式 (1.5) の正値解の存在については，非常に多くの研究があり，変分法等の関数解析的手法（[1]，[3] とその参考文献），振動論や捕獲法等の常微分方程式的手法（[7]，[8] とその参考文献）等々の手法が知られている．定理 1.1 を示す方法は，古典的な制限付きの変分法による．定理 1.1 における正値解が存在するための k の条件は，対応する楕円型方程式 (1.5) の K の条件としてみると，少なくとも見かけ上は変分法による存在定理に用いられる条件に近いのであるが，g と h は振動論の非振動条件に現れるタイプの関数であって，常微分方程式手的法よる [7] の存在条件との関連も深い．

楕円型方程式 (1.5) に対する [7] の主定理を方程式 (1.1) の場合に焼き直してみるために，次の関数を導入しよう．

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{1}{p+1}t^{p+2}(1-t)k(t)-\frac{1}{2}\int_0^t s^{p+1}k(s)\,ds,\\
H(t) &= \frac{1}{p+1}(1-t)^{p+2}tk(t)-\frac{1}{2}\int_t^1 (1-s)^{p+1}k(s)\,ds,\\
Z(t) &= h(t)-g(t)\\
&= (p+1)\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{p+1}{2}}G(t)-(p+1)\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{p+1}{2}}H(t)\quad (1.7)
\end{aligned}$$

方程式 (1.1) の場合の [7] の主定理は，次のようになる．

定理 A (柳田-四ッ谷 [7] Theorem 1)
$k(t) \not\equiv 0$ は，$C(0,1)$ に属する非負の関数とする．また，$r_G \in (0,1]$ と $r_H \in [0,1)$ があって，

$$G(t) \geq 0 \qquad (t \in (0, r_G]), \qquad H(t) \geq 0 \qquad (t \in [r_H, 1)) \tag{1.8}$$

としよう．さらに，$r_0 \in (0, r_G]$ と $r_1 \in [r_H, 1)$ があって，

$$Z(r_0) > 0, \qquad Z(r_1) < 0 \tag{1.9}$$

であれば，方程式 (1.1) の正値解が存在する．

定理 1.1 の証明を述べるよりも，意義のあることのように思えるから，次節では，定理 1.1 と定理 Aの関連性を調べることにする．

2. 関数 g と h

k を $L^1_{loc}(0,1)$ に属する非負値の関数で $\int_0^1 [s(1-s)]^{p+1} k(s)\,ds < +\infty$ を満たすものとする．また，g と h を (1.2) で定義される関数とし，G, H, Z を (1.7) で定義される関数とする．

補題 2.1. $0 < r < 1$ とするとき，次が成り立つ．

(a) $G(t) \geq 0$ (a.e. $t \in (0,r)$) ならば，g は，$(0,r]$ 上で単調増加であり，(1.3) の極限値 $a = \lim_{t\to 0} g(t)$ が存在し，

$$k(t) \geq a k_0(t) \quad (\text{a.e. } t \in (0,r)).$$

(b) $H(t) \geq 0$ (a.e. $t \in (r,1)$) ならば，h は，$[r,1)$ 上で単調減少であり，(1.3) の極限値 $b = \lim_{t\to 1} h(t)$ が存在し，

$$k(t) \geq b k_0(t) \quad (\text{a.e. } t \in (r,1)).$$

証明: (a) と (b) は対称だから,(a) だけを示せばよい.$G(t) \geq 0$ (a.e. $t \in (0,r)$) としよう．g は，$(0,r]$ 上では局所絶対連続関数であり，殆どすべての $t \in (0,r)$ に対して，

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{(p+1)^2}{2}(1-t)^{\frac{p-1}{2}} t^{-\frac{p+3}{2}} \left\{ \frac{(1-t)t^{p+2}}{p+1} k(t) - \frac{1}{2}\int_0^t s^{p+1} k(s)\,ds \right\} \\ &= \frac{(p+1)^2}{2}(1-t)^{\frac{p-1}{2}} t^{-\frac{p+3}{2}} G(t) \end{aligned}$$

である．よって，g は $(0,r]$ で単調増加であり，$a = \lim_{t\to 0} g(t)$ が存在する．これより，

$$\int_0^t s^{p+1} k(s)\,ds, \geq \frac{2a}{p+1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{p+1}{2}} \qquad (t \in (0,r))$$

となる．一方，$G(t) \geq 0$ (a.e. $t \in (0,r)$) より，

$$k(t) \geq \frac{p+1}{2} t^{-(p+2)}(1-t)^{-1} \int_0^t s^{p+1} k(s)\, ds \quad (\text{a.e. } t \in (0,r))$$

である．以上より，

$$\begin{aligned} k(t) &\geq \frac{p+1}{2} t^{-(p+2)}(1-t)^{-1} \frac{2a}{p+1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{p+1}{2}} \\ &= a[t(1-t)]^{-\frac{p+3}{2}} = ak_0(t) \quad (\text{a.e. } t \in (0,r)) \end{aligned}$$

を得る． ∎

上の補題は，定理 A の仮定 (1.8) と，極限値 (1.3) の存在も含めた定理 1.1 の仮定の不等式(1.4) との関係を示している．次の補題は，定理A の仮定 (1.9) に関するものである．

補題 2.2. $r_G \in (0,1]$ と $r_H \in [0,1)$ があって，

$$G(t) \geq 0 \qquad (\text{a.e. } t \in (0, r_G)), \quad H(t) \geq 0 \qquad (\text{a.e. } t \in (r_H, 1))$$

とする．（補題 2.1 により，(1.3) の極限値 a と b が存在する．）このとき，次のことが成り立つ．

(a) $r_0 \in (0, r_G]$ があって $Z(r_0) > 0$ ならば，

$$\int_0^1 (k(t) - a\, k_0(t))(1-t)^{p+1}\, dt > 0$$

が成り立つ．（$r_0 = 1$ のときは，$b > a$ である．）

(b) $r_1 \in [r_H, 1)$ があって $Z(r_1) < 0$ ならば，

$$\int_0^1 (k(t) - b\, k_0(t)) t^{p+1}\, dt > 0$$

が成り立つ．（$r_1 = 0$ のときは，$a > b$ である．）

証明： 補題の主張の (a) と (b) は対称だから，(a) だけを示せばよい．仮定と補題 2.1 により，g は $(0, r_G)$ 上で単調増加である．先に，$r_0 < 1$ の場合を考えよう．$g(r_0) \geq a$ であり，$Z(r_0) = h(r_0) - g(r_0) > 0$ とあわせると，$h(r_0) > a$ となる．したがって，

$$\int_{r_0}^1 (1-s)^{p+1} k(s)\, ds > \frac{2a}{p+1} \left(\frac{1-r_0}{r_0}\right)^{\frac{p+1}{2}}$$

がわかる．簡単な計算により，

$$\int_{r_0}^{1}(1-s)^{p+1}k_0(s)\,ds=\frac{2}{p+1}\left(\frac{1-r_0}{r_0}\right)^{\frac{p+1}{2}}$$

であるから，

$$\int_{r_0}^{1}(1-s)^{p+1}(k(s)-ak_0(s))\,ds>0$$

を得る．一方，$r_0\in(0,r_G]$ であるから，補題 2.1 によって，

$$k(t)-ak_0(t)\geq 0 \quad (\text{a.e. } t\in(0,r_0))$$

であり，

$$\int_{0}^{r_0}(1-s)^{p+1}(k(s)-ak_0(s))\,ds\geq 0$$

となる．以上より，

$$\int_{0}^{1}(1-s)^{p+1}(k(s)-ak_0(ts))\,ds>0$$

がわかった．今度は，$r_0=1$ の場合を考えよう．この場合には，g は $(0,1)$ 上で単調増加である．したがって，$Z(1)>0$ より，

$$b=h(1)>g(1)=\lim_{t\to 1}g(t)\geq a$$

となる．これより，

$$Z(1)=\lim_{t\to 1}(h(t)-g(t))=\lim_{t\to 1}Z(t)>0$$

であり，$r_0<1$ の場合に帰着される．

∎

補題 2.1 より，定理 A の仮定 (1.8) のもとでは，極限値 (1.3) が存在し，定理 1.1 の仮定の不等式 (1.4) も満たされる．さらに，補題 2.2 を使えば，定理 A を，定理 1.1 に帰着させることができる．また，定理 A における，(1.9) を満たす r_0, r_1 がとれるという仮定は必ずしも必要ではないこともわかる．とくに，$r_0=1$ のときは $b>a$ であり，$r_1=0$ のときは $a>b$ であるから，これらは必要のない仮定となる．したがって，補題2.1 と補題 2.2 を 定理 1.1 と併せれば，次を得る．

系 2.3. k を $L^1_{loc}(0,1)$ に属する非負値の関数で$\int_0^1[s(1-s)]^{p+1}k(s)\,ds<+\infty$ を満たすものとする．また，$r_G\in(0,1)$ と $r_H\in(0,1)$ があって，

$$G(t)\geq 0 \qquad (\text{a.e. } t\in(0,r_G)),\quad H(t)\geq 0 \qquad (\text{a.e. } t\in(r_H,1))$$

とする．このとき，次の各々の場合に，方程式 (1.1) の正値解が存在する．

(1) $a = b = 0$ の場合： $k(t) \not\equiv 0$.

(2) $a = b > 0$ の場合： $Z(r_0) > 0$ なる $r_0 \in (0, r_G]$, または, $Z(r_1) < 0$ なる $r_1 \in [r_H, 1)$ が存在する.

(3) $a > b \geq 0$ の場合： $Z(r_0) > 0$ なる $r_0 \in (0, r_G]$ が存在する.

(4) $b > a \geq 0$ の場合： $Z(r_1) < 0$ なる $r_1 \in [r_H, 1)$ が存在する.

以上で, 定理 1.1 と定理 A の関係はわかって頂けたであろう. 証明は述べられなかったが, 定理1.1 を示す方法は [**3**] の変分法である. 関数 g と h を用いたことによって, [**1**] 等に述べられている楕円型方程式(1.5) の正値球対称解に対する変分的方法による結果よりは, K に $r = 0$ や $r = \infty$ で少し広い意味の特異性を許すことにはなっていると思う. しかし, ここで述べたかったことは, 一見すると異種格闘技としか思えない, 関数解析的手法と常微分方程式的手法とにおける正値解の存在条件の間にも, 明確な関連があることであり, そのことを垣間見て頂けたなら幸いである.

参考文献

[1] G. Bianchi, J. Chabrowski and A. Szulkin; *On symmetric solutions of an elliptic equation with a nonlinearity involving critical Sobolev exponent,* Nonlinear Anal. 25 (1995) 41–59.

[2] H. Brezis and E. Lieb; *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals,* Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 486–490.

[3] H. Brezis and L. Nirenberg; *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437–477.

[4] T. Kusano and M. Naito; *Oscillation theory of entire solutions of second order superlinear elliptic equations,* Funkcial. Ekvac. 30 (1987) 269–282.

[5] B. Opic and A. Kufner; *Hardy-type inequalities, Pitman research notes in mathematics series 219,* Longman Scientific & Technical New York, Wiley, (1990)

[6] G. Talenti; *Best constant in Sobolev inequality,* Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976), 353–372.

[7] E. Yanagida and S. Yotsutani; *Existence of positive radial solutions to* $\Delta u + K(|x|)u^p = 0$ *in* R^n, J. Differential Equations 115 (1995) 477–502.

[8] E. Yanagida and S. Yotsutani; *Recent topics in nonlinear partial differential equations: the structure of radial solutions to semilinear elliptic equations (in Japanese),* Sugaku 51 (1999) 276–290.