数理解析研究所講究録 1310 巻 2003 年 186-201

Geometric Crystals, Schubert Varieties and Crystal Bases

中島 俊樹 (NAKASHIMA Toshiki)

上智大学理工学部数学科
(Sophia University)
e-mail: toshiki@mm.sophia.ac.jp

1 Introduction

幾何クリスタルの理論は、[1] により基礎付けがなされ、その後、[7],[16] において tropical R matrix との関係についての研究でその有用性が認められた。この論説では、[15] の crystal bases との関係についての解説を行う。ここで用語の定義、記号は [15] に従うものとする。

2 Geometric Crystals and Unipotent Crystals

G (resp. $\mathfrak{g}$) を symmetrizable GCM $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ に associate した Kac-Moody 群 (resp. 代数) とし、$G\supset B^{\pm}\supset U^{\pm}\supset T$ をそれぞれ Borel subgroup, unipotent subgroup, maximal torus とする。(Kac-Moody group については、[10],[12],[17] を参照。) $\Delta:=\{\alpha\in\mathfrak{t}^*|\alpha\neq 0,\ \mathfrak{g}_\alpha\neq(0)\}$ を root system, $Q=\sum_i\mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とする。$Q_+=\sum_i\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$, $\Delta_+:=\Delta\cap Q_+$ とおく。Weyl 群 $W=\langle s_i|i\in I\rangle$ (s_i は simple relfection) は $W\cong N_G(T)/T$ となる。$i\in I$ に対して、homomorphism $\phi_i:SL_2(\mathbb{C})\to G$ があって

$$\phi_i\left(\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\right)=\exp te_i,\ \phi_i\left(\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\right)=\exp tf_i\,(t\in\mathbb{C}).$$

ここで、e_i, f_i は $\mathfrak{g}$ の生成元。

$w\in W$ に対して

$$R(w):=\{(i_1,i_2,\cdots,i_l)\in I^l|w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_l}\},$$

とおく。ここで、l は length of w.

$\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times,T)$) の元を T の *character* (resp. *co-character*) と呼ぶ。*simple co-root* $\alpha_i^\vee\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times,T)$ $(i\in I)$ を $\alpha_i^\vee(t):=T_i$ で定義すると、pairing $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=a_{ij}$ を得る。

Definition 2.1. (i) X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\gamma:X\to T$, $e_i:\mathbb{C}^\times\times X\to X$ $(i\in I)$;

$$\begin{array}{rccc}e_i^c&:\mathbb{C}^\times\times X&\longrightarrow&X\\&(c,x)&\mapsto&e_i^c(x),\end{array}$$

を rational morphisms とする。3つ組 $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ が *geometric pre-crystal* とは $e^1(x) = x$ かつ

$$\gamma(e_i^c(x)) = \alpha_i^\vee(c)\gamma(x), \tag{2.1}$$

をみたすこと。

(ii) $(X, \gamma_X, \{e_i^X\}_{i \in I})$, $(Y, \gamma_Y, \{e_i^Y\}_{i \in I})$ を geometric pre-crystal とする。rational morphism $f : X \to Y$ が *moprhism of geometric pre-crystals* とは f が次をみたすこと：

$$f \circ e_i^X = e_i^Y \circ f, \quad \gamma_X = \gamma_Y \circ f.$$

特に、 morphism f が ind-varcities の birational isomorphism であるとき f は *isomorphism of geometric pre-crystals* という。

$\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ を geometric pre-crystal とする。word $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_l) \in R(w)$ $(w \in W)$ に対して $\alpha^{(l)} := \alpha_{i_l}$, $\alpha^{(l-1)} := s_{i_l}(\alpha_{i_{l-1}})$, $\cdots$, $\alpha^{(1)} := s_{i_l} \cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})$ とおく。ここで、word $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_l) \in R(w)$ に対して rational morphism $e_{\mathbf{i}} : T \times X \to X$ を、次で定義する。

$$(t, x) \mapsto e_{\mathbf{i}}^t(x) := e_{i_1}^{\alpha^{(1)}(t)} e_{i_2}^{\alpha^{(2)}(t)} \cdots e_{i_l}^{\alpha^{(l)}(t)}(x).$$

Definition 2.2. (i) 上の設定で geometric pre-crystal χ が *geometric crystal* とは、任意の $w \in W$, $\mathbf{i}$ と $\mathbf{i}' \in R(w)$ に対して

$$e_{\mathbf{i}} = e_{\mathbf{i}'}. \tag{2.2}$$

が成立すること。

(ii) $(X, \gamma_X, \{e_i^X\}_{i \in I})$ 及び $(Y, \gamma_Y, \{e_i^Y\}_{i \in I})$ を geometric crystal　とする。rational morphism $f : X \to Y$ が *of geometric crystals の morphism* (resp. *isomorphism*) とは geometric pre-crystals の morphism (resp. an isomorphism) であること。

次の補題が成り立つ：

Lemma 2.3. (2.2) は次の関係と同値

$$\begin{array}{ll}
e_i^{c_1} e_j^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = 0, \\
e_i^{c_1} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\
e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -2,\ \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\
e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1^3 c_2} e_j^{c_1^3 c_2^2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^3 c_2^2} e_i^{c_1^3 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -3,\ \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1,
\end{array}$$

Remark. $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle \geq 4$ のとき e_i と e_j の間には関係なし。

以下 U^+ を U と書く。次に Kac-Moody groups に対して unipotent crystals (see [1]) を定義する。

Definition 2.4. X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\alpha : U \times X \to X$ を $\{e\} \times X$ 上で定義される U-action とする。このとき、pair $\mathbf{X} = (X, \alpha)$ が *U-variety* とは、U-varieties $\mathbf{X} = (X, \alpha_X)$ と $\mathbf{Y} = (Y, \alpha_Y)$ に対して rational morphism $f : X \to Y$ が *U-morphism* とは U-action と可換となること。

ここで、$B^- = U^-T$ に U-variety structure を入れる。B^- は G の ind-subgroup であり、また G における multiplication map は open embedding; $B^- \times U \hookrightarrow G$ を induce するので birational isomorphism であり、その inverse birational isomorphism を

$$g : G \longrightarrow B^- \times U.$$

とする。ここで、rational morphisms $\pi^- : G \to B^-$ と $\pi : G \to U$ を $\pi^- := \mathrm{proj}_{B^-} \circ g$ と $\pi := \mathrm{proj}_U \circ g$ で定義し B^- への rational U-action α_{B^-} を

$$\alpha_{B^-} := \pi^- \circ m : U \times B^- \longrightarrow B^-,$$

と定義すると (m multiplication map in G), U-variety $\mathbf{B}^- = (B^-, \alpha_{B^-})$ を得る。

Definition 2.5. (i) $\mathbf{X} = (X, \alpha)$ を U-variety, $f : X \to \mathbf{B}^-$ を U-morphism とする。このとき、pair $(\mathbf{X}, f)$ を *unipotent G-crystal* と呼ぶ。

(ii) $(\mathbf{X}, f_X)$ 及び $(\mathbf{Y}, f_Y)$ を unipotent crystals とする。U-morphism $g : X \to Y$ が *morphism of unipotent crystals* とは $f_X = f_Y \circ g$ となることであり、特に g が ind-variety の birational isomorphism であるとき *isomorphism of unipotent crystals* という。

unipotent crystal の大きな特徴は crystal base と関係の深い積構造が入ることであるがここでは省略する。文献は [1],[15] を参照。

ここまで定義した unipotent crystal と geometric crystal には以下のような関係がある。

$i \in I$ に対して $U_i^\pm := U^\pm \cap \bar{s}_i U^\mp \bar{s}_i^{-1}$, $U_\pm^i := U^\pm \cap \bar{s}_i U^\pm \bar{s}_i^{-1}$ とおく。実は $U_i^\pm = U_{\pm\alpha_i}$. 半直積

$$U^- = U_{-\alpha_i} \cdot U_-^i,$$

より canonical projection $\xi_i : U^- \to U_{-\alpha_i}$ を得る。これを用いて U^- 上の関数

$$\chi_i := y_i^{-1} \circ \xi_i : U^- \longrightarrow U_{-\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{C}$$

と定義し、さらに $\chi_i(u \cdot t) := \chi_i(u)$ ($u \in U^-$, $t \in T$) により B^- 上の関数に延長する。unipotent G-crystal $(\mathbf{X}, f_X)$ に対して関数 $\varphi_i := \varphi_i^X : X \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi_i := \chi_i \circ f_X,$$

で、また ratinal morphism $\gamma_X : X \to T$ を

$$\gamma_X := \mathrm{proj}_T \circ f_X : X \to B^- \to T, \tag{2.3}$$

で定義する (proj_T は canonical projection). 今、関数 φ_i は X 上で恒等的に 0 でないとする。このとき、morphism $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \to X$ を

$$e_i^c(x) := x_i\left(\frac{c-1}{\varphi_i(x)}\right)(x). \tag{2.4}$$

とすると、次を得る：

Theorem 2.6 ([1]). $(\mathbf{X}, f_X)$ を *unipotent G-crystal* とする。任意の $i \in I$ に対してて関数 φ_i は X 上で恒等的に *0* でないとする。このとき、*rational morphisms* $\gamma_X : X \to T$ と $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \to X$ を上のように定義すると $(X, \gamma_X, \{e_i\}_{i\in I})$ は *geometric G-crystal* の構造を持つ。

3 Crystal structure on Schubert varieties

前節と同様に G は Kac-Moody group, $B^\pm = U^\pm T$ (resp. $U^\pm$) は Borel (resp. unipotent) subgroups, W は Weyl group とする。次の Bruhat/Birkhoff decomposition は有名：

Proposition 3.1 ([9],[12],[17]). *We have*

$$G = \bigsqcup_{w\in W} B^+\bar{w}B^+ = \bigsqcup_{w\in W} U^+\bar{w}B^+ \quad \text{(Bruhat decomposition)}, \tag{3.1}$$

$$G = \bigsqcup_{w\in W} B^-\bar{w}B^+ = \bigsqcup_{w\in W} U^-\bar{w}B^+ \quad \text{(Birkhoff decomposition)}. \tag{3.2}$$

$J \subset I$ に対して $W_J := \langle s_i | i \in J\rangle$ を対応する W の subgroup とする。$P_J := B^+W_JB^+$ とおき $J \subset I$ に付随した G の (*standard*) *parabolic subgroup* と呼ぶ。W^J を W/W_J の minimal coset representative の集合とする。このとき parabolic Bruhat/Birkhoff decompositions を得る：

Proposition 3.2 ([9],[12],[17]). $J \subset I$ に対して W_J と W^J を上のものとすると、

$$G = \bigsqcup_{w^*\in W^J} U^+\bar{w}^*P_J = \bigsqcup_{w^*\in W^J} U^-\bar{w}^*P_J.$$

さて、$\Lambda \in P_+$ (P_+ : dominant integral weight の集合) に対して $L(\Lambda)$ を highest weight λ の integral highest weight simple module とし、その projective space を $\mathbb{P}(\Lambda) := (L(\Lambda)\setminus\{0\})/\mathbb{C}^\times$ とかく。$v_\Lambda \in \mathbb{P}(\Lambda)$ を $L(\lambda)$ の highest weight vector を含む line とし $X(\Lambda) := G\cdot v_\Lambda \subset \mathbb{P}(\Lambda)$ (flag variety) とおく。$J_\Lambda := \{i \in I | \langle h_i, \Lambda\rangle = 0\}$ とすると、P_{J_Λ} は v_Λ の stabilizer なので 次を得る

Proposition 3.3 ([12],[17]).

$$\begin{array}{rcl} \rho : G/P_{J_\Lambda} = \bigsqcup_{w\in W^{J_\Lambda}} U^\pm\bar{w}P_{J_\Lambda}/P_{J_\Lambda} & \xrightarrow{\sim} & X(\Lambda) \\ g\cdot P_{J_\Lambda} & \mapsto & g\cdot v_\Lambda \end{array}$$

Definition 3.4. 上の $\rho(U^+\bar{w}P_{J_\Lambda}/P_{J_\Lambda})$ (resp. $\rho(U^-\bar{w}P_{J_\Lambda}/P_{J_\Lambda})$) を $X(\Lambda)_w$ (resp. $X(\Lambda)^w$) とかき *finite (resp. co-finite) Schubert cell* と呼び、その Zariski closure を $\overline{X}(\Lambda)_w$ と記し (resp. $\overline{X}(\Lambda)^w$) *finite (resp. co-finite) Schubert variety* と呼ぶ。

次の closure relations が成り立つ：

$$\overline{X}(\Lambda)_w = \bigsqcup_{y \le w, y \in W^{J_\Lambda}} X(\Lambda)_y, \quad \overline{X}(\Lambda)^w = \bigsqcup_{y \ge w, y \in W^{J_\Lambda}} X(\Lambda)^y. \tag{3.3}$$

ここで $X(\Lambda)_w$ に unipotent crystal の構造を入れる。$X(\Lambda)_w$ の定義より Schubert cell $X(\Lambda)_w$ は U-variety である。

次に U-morphism $X(\Lambda)_w \to B^-$ を構成する：$w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k} \in W$ を reduced expression とし $U_w = U \cap \bar{w}U^-\bar{w}^{-1}$, $U^w = U \cap \bar{w}U\bar{w}^{-1}$ とおく。

$$\beta_1 = \alpha_{i_1},\ \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}),\ \cdots,\ \beta_k = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}),$$

とすると

$$U_w := U_{\beta_1}\cdot U_{\beta_2}\cdots U_{\beta_k} \cong U_{\beta_1}\times U_{\beta_2}\times\cdots\times U_{\beta_k} \cong \mathbb{C}^k$$

を得る ([17]). 分解 $U = U_w \cdot U^w$ から、次を得る：

Lemma 3.5. 任意の $u \in U$ と $w \in W$ に対して $u' \in U_w \cdot \bar{w}$ と $v \in U$ が一意に存在して $u\bar{w} = u'v$ をみたす。

この分解を使って、次の rational morphisms を得る：

$$\begin{array}{cccc} p_w: & U\cdot\bar{w} & \longrightarrow & U_w\cdot\bar{w} \\ & u\bar{w} & \mapsto & u' \\ p^w: & U\cdot\bar{w} & \longrightarrow & U \\ & u\bar{w} & \mapsto & v \end{array}$$

さらに $U_w \cdot \bar{w}$ への U-action を

$$\begin{array}{ccc} U\times U_w\cdot\bar{w} & \longrightarrow & U_w\cdot\bar{w} \\ (x, u\bar{w}) & \mapsto & x(u\bar{w}) := p_w(xu\bar{w}) = xu\bar{w}\cdot p^w(xu\bar{w})^{-1} \end{array}$$

とすると

Lemma 3.6. $x \in U$ と $u\bar{w} \in U_w\bar{w}$ について

$$\alpha_{B^-}(x, \pi^-(u\bar{w})) = \pi^-(x(u\bar{w})).$$

が成り立つ。

この Lemma より

$$\zeta : X(\Lambda)_w \xrightarrow{\sim} U_w \bar{w} \quad (w \in W^{J_\Lambda} \ \Lambda \in P_+).$$

という同型は U-morphism. そこで、rational morphism $f_w : X(\Lambda)_w \to B^-$ を $f_w = \pi^- \circ \zeta$ とおくと

Theorem 3.7. $\Lambda \in P_+$, $w \in W^{J_\Lambda}$ に対して $f_w : X(\Lambda)_w \to B^-$ を上で定義したものとすると、*pair* $(X(\Lambda)_w, f_w)$ は *unipotent G-crystal.*

$X(\Lambda)_w \hookrightarrow \overline{X}(\Lambda)_w$ は open embedding よって birational isomorphism である。$\omega : \overline{X}(\Lambda)_w \to X(\Lambda)_w$ を inverse birational isomorphism とすると $\bar{f}_w := f_w \circ \omega : \overline{X}(\Lambda)_w \to B^-$ は U-morphism となり

Corollary 3.8. *pair* $(\overline{X}(\Lambda)_w, \bar{f}_w)$ は *unipotent G-crystal.*

Remark. $w \leq w'$ に対して closed embedding $\overline{X}(\Lambda)_w \hookrightarrow \overline{X}(\Lambda)_{w'}$ ([17])、さらに isomoprhism

$$X(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{w \in W^{J_\Lambda}} \overline{X}(\Lambda)_w.$$

が存在する。しかし、一般にこの direct limit を用いても $X(\Lambda)$ 上に unipotent crystal structure を入れることはできない。なぜなら、$y < w$ に対して rational morphism $\bar{f}_w : \overline{X}(\Lambda)_w \to B^-$ は $\overline{X}(\Lambda)_y$ 上では定義できないからである。

さて、Schubert cell (resp. variety) $X(\Lambda)_w$ (resp. $\overline{X}(\Lambda)_w$) が unipotent crystal の構造をもったので上の議論より geometric crystal の構造を入れることができる。

$w \in W$ に対して $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ を reduced expression とし

$$I(w) := \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$$

とおく。(これは、reduced expression によらない)。すると、次が成り立つ：

$i \in I(w)$ ならば、関数 $\varphi_i : X(\Lambda)_w \to \mathbb{C}$ は恒等的に 0 ではない。

Theorem 2.6 により

Theorem 3.9. $w \in W$ に対して $I = I(w)$ とすると、*Schubert cell* $X(\Lambda)_w$ (*resp. variety* $\overline{X}(\Lambda)_w$) 上に次のようにして *geometric G-crystal structure* 入れられる (*see* (2.3) *and* (2.4))

$$\gamma_w := \mathrm{proj}_T \circ f_w \ (\mathrm{resp.}\, \overline{\gamma}_w := \mathrm{proj}_T \circ \bar{f}_w), \quad e_i^c(x) = x_i \left(\frac{c-1}{\varphi_i(x)}\right)(x),$$

ここで、$\mathrm{proj}_T : B^- = U^- T \to T$.

この induced geometric crystal を $(X(\Lambda)_w, \gamma_w, \{e_i\}_{i\in I})$ (resp. $(\overline{X}(\Lambda)_w, \overline{\gamma}_w, \{e_i\}_{i\in I})$) と書くこととすると、$(X(\Lambda)_w, \gamma_w, \{e_i\}_{i\in I})$ は次の意味で B^- の中で実現される：

Proposition 3.10. $w = s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ に対して,

$$B_w^- := \{Y_w(c_1,\cdots,c_k) := y_{i_1}(\frac{1}{c_1})\alpha_{i_1}^\vee(c_{i_1})\cdots y_{i_k}(\frac{1}{c_k})\alpha_{i_k}^\vee(c_{i_k}) \in B^-|c_i \in \mathbb{C}^\times\}.$$

とおき、*U-actions* を

$$u(Y_w(c_1,\cdots,c_k)) := \pi^-(u\cdot Y_w(c_1,\cdots,c_k)) \quad (u \in U).$$

で定義すると、$X(\Lambda)_w$ と B_w^- は f により *birationally equivalent* となり、さらに *unipotent crystal/ induced geometric crystal* としても同型となる。

Example 3.11. $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ の場合に具体例を見て見よう。$I = \{1,2,\cdots,n\}$ とし $\tilde{w} = s_1s_2\cdots s_n \in W$ に対して $I = I(\tilde{w})$ が成り立ち

$$\pi^-(x_1(c_1)\bar{s}_1x_2(c_2)\bar{s}_2\cdots x_n(c_n)\bar{s}_n) = y_1(\frac{1}{c_1})\alpha_1^\vee(c_1)y_2(\frac{1}{c_2})\alpha_2^\vee(c_2)\cdots y_n(\frac{1}{c_n})\alpha_n^\vee(c_n).$$

となる。ここで、 $c_i = a_1a_2\cdots a_i$ である。$y_i(a) = I_n + aE_{i+1\,i}$ とおくと

$$f_{\tilde{w}}(X(\Lambda)_{\tilde{w}}) = \left\{ u(a) := \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ 1 & a_2 & & & & \\ & 1 & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & a_n & \\ & & & & 1 & \frac{1}{a_1\cdots a_n} \end{pmatrix} ; a_i \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

ここで、$a = (a_1,\cdots,a_{n+1})$, $a_1a_2\cdots a_{n+1} = 1$ である。実は、$\varphi_i(u(a)) = \frac{1}{a_i}$ であるので

$$e_i^c(u(a)) = x_i(a_i(c-1))\cdot u(a)\cdot x_i(a_{i+1}(c^{-1}-1)) = u(a_1,\cdots,ca_i,c^{-1}a_{i+1},\cdots,a_{n+1}).$$

さらに、次を得る：

$$\gamma_{\tilde{w}}(x_1(c_1)\bar{s}_1x_2(c_2)\bar{s}_2\cdots x_n(c_n)\bar{s}_n) = \alpha_1^\vee(c_1)\alpha_2^\vee(c_2)\cdots\alpha_n^\vee(c_n).$$

4 Tropicalization of Crystals

geometric crystals 上の positive structure と ultra-discritization/tropicalizations について解説する。([1]).

T を algebraic torus/$\mathbb{C}$, $X^*(T)$ (resp. $X_*(T)$) を latttice of characters (resp. co-characters) とする。$R := \mathbb{C}[[c]][c^{-1}]$, $L(T) := \{\phi \in \mathrm{Hom}(O_T, R)\}$ (O_T: ring of regular functions on T) とおく。discrete valuation

$$\begin{array}{cccc} v: & R\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \sum_{n>-\infty} a_nc^n & \mapsto & -\min\{n \in \mathbb{Z}|a_n \neq 0\}. \end{array}$$

をとり、任意の $\phi \in L(T)$ について $\deg_T(\phi) := v \circ \phi|_{X^*(T)}$ とする。$f_1, f_2 \in R \setminus \{0\}$ に対して $v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2)$, であるので $\deg_T(\phi)$ は $X_*(T) = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbb{Z})$ の元と見なされ、よって、 $\deg_T$ は $\deg_T : L(T) \to X_*(T)$ とみなせる。任意の $\lambda^\vee \in X_*(T)$ に対して $L_{\lambda^\vee}(T) := \deg_T^{-1}(\lambda^\vee) \subset L(T)$ と定義すると $\deg_T^{-1}(\lambda^\vee)$ は irreducible pro-$\mathbb{C}$ variety structure を持ち $L(T) = \bigsqcup_{\lambda^\vee \in X_*(T)} L_{\lambda^\vee}(T)$ なので irreducible component の集合 $\pi_0(L(T)) = \{L_{\lambda^\vee}(T) | \lambda^\vee \in X_*(T)\}$ は $X_*(T)$ と同一視される。

もうすこし、具体的にいうと $T = (\mathbb{C}^\times)^l$ として $L(T)$ と $(R^\times)^l$ を同一視すると $\lambda^\vee(c) = (c^{m_1}, c^{m_2}, \cdots, c^{m_l})$ に対して $(m_j \in \mathbb{Z})$,

$$L_{\lambda^\vee}(T) = \left\{ \left(b_1 c^{-m_1} + \sum_{n > -m_1} a_n c^n, \cdots, b_l c^{-m_l} + \sum_{n > -m_l} a_n c^n \right) : b_1, \cdots, b_l \neq 0 \right\}.$$

$f : T \to T'$ を 2つの algebraic tori の間の rational morphism とすると、f は rational morphism $\tilde{f} : L(T) \to L(T')$ および map $\pi_0(\tilde{f}) : \pi_0(L(T)) \to \pi_0(L(T'))$, を induce する。

rational function $f(c) \in \mathbb{C}(c)$ $(f \neq 0)$ が *positive* とは f が 2つの正係数多項式の商としてあらわされること。

f_1, $f_2 \in \mathbb{C}(c) (\subset R)$ が positive ならば

$$v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2), \tag{4.1}$$
$$v\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = v(f_1) - v(f_2), \tag{4.2}$$
$$v(f_1 + f_2) = \max(v(f_1), v(f_2)). \tag{4.3}$$

が成り立つ。これを、一般化したものが次：

Definition 4.1 ([1]). 2つの algebraic tori の間の rational morphism $f : T \to T'$ が *positive* とは、次がみたされること、

(i) 任意の co-character $\lambda^\vee : \mathbb{C}^\times \to T$ について $\lambda^\vee$ の image が $\mathrm{dom}(f)$ に入る。
(ii) 任意の co-character $\lambda^\vee : \mathbb{C}^\times \to T$ と任意の character $\mu : T' \to \mathbb{C}^\times$ について $\mu \circ f \circ \lambda^\vee$ が positive rational function である。

$\mathcal{T}_+$ を object が algebraic torus, arrow が positive rational morphism である category とすると、次の functor を得る：

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{UD}: & \mathcal{T}_+ & \longrightarrow & \mathfrak{Set} \\ & T & \mapsto & X_*(T) \\ & (f : T \to T') & \mapsto & (\deg(f) : X_*(T) \to X_*(T')) \end{array}$$

Definition 4.2 ([1]). $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ を geometric pre-crystal とし、 T を algebraic torus $\theta : T \to X$ を birational isomorphism とする。θ が χ 上の *positive structure* とは、次をみたすこと：

(i) the rational morphism $\gamma\circ\theta : T' \to T$ は positive.
(ii) 任意の $i \in I$ に対して rational morphism $e_{i,\theta} : \mathbb{C}^\times \times T' \to T'$

$$e_{i,\theta}(c,t) := \theta^{-1}\circ e_i^c \circ \theta(t)$$

は positive.

functor $\mathcal{UD}$ を positive rational morphism $e_{i,\theta} : \mathbb{C}^\times \times T' \to T'$ と $\gamma\circ\theta : T' \to T$ に適用してみると

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i &:= \mathcal{UD}(e_{i,\theta}) : \mathbb{Z}\times X_*(T) \to X_*(T)\\ \tilde{\gamma} &:= \mathcal{UD}(\gamma\circ\theta) : X_*(T') \to X_*(T).\end{aligned}$$

を得る。

geometric pre-crystal $\chi = (X,\gamma,\{e_i\}_{i\in I})$ 上に与えられた positive structure $\theta : T' \to X$ に対して triplet $(X_*(T'),\tilde{\gamma},\{\tilde{e}_i\}_{i\in I})$ は pre-crystal structure (see [1, 2.2]) を持つことが知られている。次が成り立つ：

Theorem 4.3. *geometric crystal* $\chi = (X,\gamma,\{e_i\}_{i\in I})$ と *positive structure* $\theta : T' \to X$ について *pre-crystal* $\mathcal{UD}_{\theta,T'}(\chi) = (X_*(T'),\tilde{\gamma},\{\tilde{e}_i\}_{i\in I})$ は *free W-crystal (see [1, 2.2])* である。

この functor $\mathcal{UD}$ を *"ultra-discritization"* と呼ぶ。これは [1] において "tropicalization" とよばれていたものである。ここでは、"tropicalization" は [1] における inverse tropicalization を意味するものとする。詳しく言うと、object B in $\mathfrak{Set}$ に対して crystal として $\mathcal{UD}(T) \cong B$ となる object T in $\mathcal{T}_+$ が存在するとき T を B の *tropicalization* という。

ここで geometric crystal B_w^- 上に、ある positive strucuture を入れ ($I = I(w)$, and $w \in W^{J_\Lambda}$) それがある Kashiwara's crystal の (Langlands dual) の tropicalization であることを見てみよう。

まず、crystal B_i について復習する：$i \in I$ に対して, B_i は次で定義される (see *e.g.*[6])

$$\begin{gathered}B_i := \{(x)_i | x \in \mathbb{Z}\},\\ \tilde{e}_i(x)_i = (x+1)_i,\ \tilde{f}_i(x)_i = (x-1)_i,\ \tilde{e}_j(x)_i = \tilde{f}_j(x)_i = 0\ (i\neq j)\\ wt(x)_i = x\alpha_i, \varepsilon_i(x)_i = -x,\ \varphi_i(x)_i = x,\ \varepsilon_j(x)_i = \varphi_j(x)_i = -\infty\ (i\neq j).\end{gathered}$$

さて $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k} \in W$ と $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in R(w)$ に対して morphism $\theta_{\mathbf{i}} : (\mathbb{C}^\times)^k \to B_w^-$ を

$$\theta_{\mathbf{i}}(c_1,c_2,\cdots,c_k) := y_{i_1}(\frac{1}{c_1})\alpha_{i_1}^\vee(c_1)\cdots y_{i_k}(\frac{1}{c_k})\alpha_{i_k}^\vee(c_k) \tag{4.4}$$

で定義する。次の結果は reductive case については [1, Theorem 2.11] で与えられている。ここでは Kac-Moody case も含む。

Proposition 4.4. *(i)* 任意の $\mathbf{i} \in R(w)$ $(w \in W)$ と *morphism* $\theta_{\mathbf{i}}$ は *geometric crystal* B_w^- 上の *positive structure.*

(ii) Geometric crystal B_w^- は *positive structure* $\theta_{\mathbf{i}}(c_1, c_2, \cdots, c_k)$ に関して *crystal* $B_{i_1} \otimes B_{i_2} \otimes \cdots \otimes B_{i_k}$ の *Langlands dual* の *tropicalization.*

Proof. $\theta_{\mathbf{i}}$ が birational は明らかで、また、ratinal morphism $\gamma : B_w^- \to T$

$$\gamma\left(y_{i_1}(\frac{1}{c_1})\alpha_{i_1}^\vee(c_1)\cdots y_{i_k}(\frac{1}{c_k})\alpha_{i_k}^\vee(c_k)\right) = \alpha_{i_1}^\vee(c_1)\cdots\alpha_{i_k}^\vee(c_k),$$

について $\gamma\circ\theta_{\mathbf{i}}$ が positive も自明。$e_{i,\theta_{\mathbf{i}}} : \mathbb{C}^\times \times T' \to T'$ が positive をいうために e_i^c の $Y_w(c_1, \cdots, c_k)$ 上への具体的な作用をみると

$$e_i^c(Y_w(c_1,\cdots,c_k)) = x_i\left(\frac{c-1}{\varphi_i(Y_w(c_1,\cdots,c_k))}\right)(Y_w(c_1,\cdots,c_k))) =: Y_w(\mathcal{C}_1,\cdots,\mathcal{C}_k),$$

ここで

$$\mathcal{C}_j := c_j \cdot \frac{\displaystyle\sum_{1\le m\le j, i_m=i} \frac{c}{c_1^{a_{i_1,i}}\cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1},i}} c_m} + \sum_{j<m\le k, i_m=i} \frac{1}{c_1^{a_{i_1,i}}\cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1},i}} c_m}}{\displaystyle\sum_{1\le m< j, i_m=i} \frac{c}{c_1^{a_{i_1,i}}\cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1},i}} c_m} + \sum_{j\le m\le k, i_m=i} \frac{1}{c_1^{a_{i_1,i}}\cdots c_{m-1}^{a_{i_{m-1},i}} c_m}}. \tag{4.5}$$

を得る。これより、$e_{i,\theta_{\mathbf{i}}}$ は positive. (i) はいえた。

(ii) 次に $\tilde{e}_i^c$ の $B_{i_1} \otimes \cdots \otimes B_{i_k}$ への作用をみると：$b_{\mathbf{i}} = (b_1)_{i_1} \otimes \cdots \otimes (b_k)_{i_k}$ $(\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_k),\ b_j \in \mathbb{Z})$ に対して

$$\tilde{e}_i^c(b_{\mathbf{i}}) = (\beta_1)_{i_1} \otimes \cdots \otimes (\beta_k)_{i_k},$$

ここで

$$\begin{aligned}\beta_j = b_j &+ \max\left(\max_{\substack{1\le m\le j,\\ i_m=i}}(c - b_m - \sum_{l<m} b_l a_{i,i_l}),\ \max_{\substack{j<m\le k,\\ i_m=i}}(-b_m - \sum_{l<m} b_l a_{i,i_l})\right)\\ &-\max\left(\max_{\substack{1\le m< j,\\ i_m=i}}(c - b_m - \sum_{l<m} b_l a_{i,i_l}),\ \max_{\substack{j\le m\le k,\\ i_m=i}}(-b_m - \sum_{l<m} b_l a_{i,i_l})\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで、(4.5) と (4.6) は tropicalization/ultra-discritzation operations で対応してい

ることがわかる

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_j & \underset{\text{tropicalization}}{\overset{\text{ultra-discritization}}{\rightleftarrows}} & \beta_j \\
c_j & \longleftrightarrow & b_j \\
x \cdot y & \longleftrightarrow & x + y \\
\frac{x}{y} & \longleftrightarrow & x - y \\
x + y & \longleftrightarrow & \max(x, y) \\
a_{i,j} & \underset{\text{Langlands dual}}{\longleftrightarrow} & a_{j,i}
\end{array}
$$

(ii) も OK. □

(4.5), (4.6) と同様の公式は [2, 5.2.] で与えられている。

次は Proposition 4.4 と Lemma 2.3 からの自明な帰結であり crystal の立場からの証明については [6],[13] を参照。

Corollary 4.5. *crystal* $B_{i_1} \otimes \cdots \otimes B_{i_k}$ 上で $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つ：

$$
\begin{array}{ll}
\tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{c_2} = \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = 0, \\
\tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_2} = \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\
\tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{c_2} = \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -1,\ \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -2, \\
\tilde{e}_i^{c_1} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{3c_1+c_2} \tilde{e}_j^{3c_1+2c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{c_2} & \\
\qquad = \tilde{e}_j^{c_2} \tilde{e}_i^{c_1+c_2} \tilde{e}_j^{3c_1+2c_2} \tilde{e}_i^{3c_1+c_2} \tilde{e}_j^{2c_1+c_2} \tilde{e}_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -1,\ \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -3.
\end{array}
$$

Remark. Example 3.11 で考えた例は上とは異なる positive structure である。つまり、$c_i = a_1 a_2 \cdots a_i$ とすると

$$
\begin{array}{cccc}
\tilde{\theta}: & (\mathbb{C}^\times)^n & \longrightarrow & B_{\tilde{w}}^- \\
& (a_1, \cdots, a_n) & \mapsto & y_1(\frac{1}{c_1})\alpha_1^\vee(c_1) \cdots y_n(\frac{1}{c_n})\alpha_n^\vee(c_n),
\end{array}
$$

は positive structure. 実際、e_i の作用は

$$e_i^c(Y_{\tilde{w}}(c_1, \cdots, c_n)) = Y_{\tilde{w}}(c_1, \cdots, c_{i-1}, cc_i, c_{i+1}, \cdots, c_n),$$

で

$$e_{i,\tilde{\theta}}(c, (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})) = (a_1, \cdots, ca_i, c^{-1}a_{i+1}, \cdots, a_n, a_{n+1}),$$

を得る。$(a_1 \cdots a_{n+1} = 1.)$. この positive structure $\tilde{\theta}$ に関する geometric crystal $B_{\tilde{w}}^-$ の ultra-discritization は次のようになる：$\tilde{B} := \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} | x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0\}$ とし、 $x := (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \tilde{B}$ に対して

$$\tilde{e}_i^c(x) = (x_1, \cdots, x_i + c, x_{i+1} - c, \cdots, x_{n+1}) \quad (c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

$\tilde{f}_i^c = \tilde{e}_i^{-c}$ と定義すると、$\mathcal{UD}_{\tilde{\theta},\mathbb{C}^n}(B_{\tilde{w}}^-, \gamma, \{c_i\})$ は crystal $\tilde{B}$ の Langlands dual に同型となる。この crystal $\tilde{B}$ は “symmetric tensor 表現” の crystal base のある種の極限とみ

5 Tropical Braid-type isomorphisms

最後に tropicalization/ultra-discritzation の応用として [14] の braid-type isomorphism の新しい証明を与える。そのために"tropical braid-type isomorphism" を与える。

Proposition 5.1. 次の等式が成り立つ：

(*i*) *Type* A_2*:*

$$y_i(\frac{1}{c_1})\alpha_i^\vee(c_1)y_j(\frac{1}{c_2})\alpha_j^\vee(c_2)y_i(\frac{1}{c_3})\alpha_i^\vee(c_3) \tag{5.1}$$
$$= y_j(\frac{c_1}{c_1c_3+c_2})\alpha_j^\vee(\frac{c_1c_3+c_2}{c_1})y_i(\frac{1}{c_1c_3})\alpha_i^\vee(c_1c_3)y_j(\frac{c_1c_3+c_2}{c_1c_2})\alpha_j^\vee(\frac{c_1c_2}{c_1c_3+c_2})$$

(*ii*) *Type* B_2 $(\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=-2,\ \langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle=-1)$*:*

$$y_i(\frac{1}{c_1})\alpha_i^\vee(c_1)y_j(\frac{1}{c_2})\alpha_j^\vee(c_2)y_i(\frac{1}{c_3})\alpha_i^\vee(c_3)y_j(\frac{1}{c_4})\alpha_j^\vee(c_4)$$
$$= y_j(\frac{1}{d_1})\alpha_j^\vee(d_1)y_i(\frac{1}{d_2})\alpha_i^\vee(d_2)y_j(\frac{1}{d_3})\alpha_j^\vee(d_3)y_i(\frac{1}{d_4})\alpha_i^\vee(d_4),$$

ここで $d_1=c_4+\frac{1}{c_2}\left(c_3+\frac{c_2}{c_1}\right)^2,\quad d_2=c_1c_4+c_3+\frac{c_1c_3^2}{c_2},$ (5.2)

$$d_3=\frac{1}{\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_2^2c_4}\left(c_3+\frac{c_2}{c_1}\right)^2},\qquad d_4=\frac{1}{\frac{c_4}{c_3}+\frac{c_3}{c_2}+\frac{1}{c_1}}. \tag{5.3}$$

(*iii*) *Type* G_2 $(\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=-3,\ \langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle=-1)$:

$$y_i(\frac{1}{c_1})\alpha_i^\vee(c_1)y_j(\frac{1}{c_2})\alpha_j^\vee(c_2)y_i(\frac{1}{c_3})\alpha_i^\vee(c_3)y_j(\frac{1}{c_4})\alpha_j^\vee(c_4)y_i(\frac{1}{c_5})\alpha_i^\vee(c_5)y_j(\frac{1}{c_6})\alpha_j^\vee(c_6)$$
$$= y_j(\frac{1}{d_1})\alpha_j^\vee(d_1)y_i(\frac{1}{d_2})\alpha_i^\vee(d_2)y_j(\frac{1}{d_3})\alpha_j^\vee(d_3)y_i(\frac{1}{d_4})\alpha_i^\vee(d_4)y_j(\frac{1}{d_5})\alpha_j^\vee(d_5)y_i(\frac{1}{d_6})\alpha_i^\vee(d_6), \tag{5.4}$$

ここで、

$$d_1=\frac{1}{c_2^2}\left(c_3+\frac{c_2}{c_1}\right)^3+\frac{1}{c_4}\left(c_5+\frac{c_4}{c_3}\right)^3+\frac{2c_4}{c_2}+\frac{3c_4}{c_1c_3}+\frac{3c_5}{c_1}+\frac{3c_3c_5}{c_2}+c_6, \tag{5.5}$$

$$d_2=\frac{c_1}{c_4}\left(c_5+\frac{c_4}{c_3}\right)^3+\frac{c_1c_3}{c_2^3}\left(c_3+\frac{c_2}{c_1}\right)^3+\frac{3c_1c_3c_5}{c_2}+\frac{2c_1c_4}{c_2}+\frac{2c_4}{c_3}+c_1c_6+2c_5, \tag{5.6}$$

$$d_5=\frac{1}{\frac{1}{c_6}\left(\frac{1}{c_4}\left(c_5+\frac{c_4}{c_3}\right)^2+\frac{c_3}{c_2}+\frac{1}{c_1}\right)^3+\frac{c_6}{c_4}+\frac{3c_3c_5}{c_2c_4}+\frac{3c_5}{c_1c_4}+\frac{3}{c_1c_3}+\frac{2}{c_2}}, \tag{5.7}$$

$$d_6=\frac{1}{\frac{1}{c_1}+\frac{c_3}{c_2}+\frac{1}{c_4}\left(c_5+\frac{c_4}{c_3}\right)^2+\frac{c_6}{c_5}},\qquad d_3=\frac{c_2c_4c_6}{d_1d_5},\qquad d_4=\frac{c_1c_3c_5}{d_2d_6} \tag{5.8}$$

Proof. 証明には、よく知られた次の関係式を用いる。 □

Lemma 5.2. (*i*) *Type* A_2 :

$$y_i(a)y_j(b) = y_{\alpha_i+\alpha_j}(ab)y_j(b)y_i(a). \tag{5.9}$$

(*ii*) *Type* B_2 $(\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle = -2,\ \langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle = -1)$:

$$y_i(a)y_j(b) = y_{2\alpha_i+\alpha_j}(a^2b)y_{\alpha_i+\alpha_j}(ab)y_j(b)y_i(a), \tag{5.10}$$

$$y_i(a)y_{\alpha_i+\alpha_j}(b) = y_{2\alpha_i+\alpha_j}(2ab)y_{\alpha_i+\alpha_j}(b)y_i(a). \tag{5.11}$$

(*iii*) *Type* G_2 $(\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle = -3,\ \langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle = -1)$:

$$y_i(a)y_j(b) = y_{3\alpha_i+2\alpha_j}(a^3b^2)y_{3\alpha_i+\alpha_j}(a^3b)y_{2\alpha_i+\alpha_j}(a^2b)y_{\alpha_i+\alpha_j}(ab)y_j(b)y_i(a), \tag{5.12}$$

$$y_{\alpha_i+\alpha_j}(a)y_{2\alpha_i+\alpha_j}(b) = y_{3\alpha_i+2\alpha_j}(3ab)y_{2\alpha_i+\alpha_j}(b)y_{\alpha_i+\alpha_j}(a), \tag{5.13}$$

$$y_j(a)y_{3\alpha_i+\alpha_j}(b) = y_{3\alpha_i+2\alpha_j}(-ab)y_{3\alpha_i+\alpha_j}(b)y_j(a). \tag{5.14}$$

Proposition 5.1 により各 d_j は c_j たちの positive rational function であることがわかる。すると、

$$(c_1, c_2, \cdots) \mapsto y_j(\frac{1}{d_1})\alpha_j^\vee(d_1)y_i(\frac{1}{d_2})\alpha_i^\vee(d_2)\cdots$$

は $B_{w_0}^-$ 上の positive structures を与えていることがわかる (w_0 は A_2, B_2, G_2 の Weyl group の longest element). すると この positive strucutre の ultra-discritization が いわゆる braid-type isomorphism([14]) を与える :

Proposition 5.3 ([14]). (*i*) *If* $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle = \langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle = 0$,

$$\begin{aligned}\phi_{ij}^{(0)} : B_i\otimes B_i &\xrightarrow{\sim} B_j\otimes B_i\\ (x)_i\otimes(y)_j &\mapsto (y)_j\otimes(x)_i.\end{aligned}$$

(*ii*) *If* $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle = \langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle = -1$,

$$\phi_{ij}^{(1)} : B_i\otimes B_j\otimes B_i \xrightarrow{\sim} B_j\otimes B_i\otimes B_j,$$

$$(z_1)_i\otimes(z_2)_j\otimes(z_3)_i \mapsto (\max(z_3, z_2-z_1))_j\otimes(z_1+z_3)_i\otimes(-\max(-z_1, z_3-z_2))_j, \tag{5.15}$$

(*iii*) *If* $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle = -1$, $\langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle = -2$,

$$\phi_{ij}^{(2)} : B_i\otimes B_j\otimes B_i\otimes B_j \xrightarrow{\sim} B_j\otimes B_i\otimes B_j\otimes B_i,$$

$$(z_1)_i\otimes(z_2)_j\otimes(z_3)_i\otimes(z_4)_j \mapsto (Z_1)_j\otimes(Z_2)_i\otimes(Z_3)_j\otimes(z_4)_i$$

$$\begin{cases} Z_1 = \max(z_4, z_2-2z_1, 2z_3-z_2)\\ Z_2 = \max(z_1+z_4, z_3, z_1-z_2+2z_3)\\ Z_3 = -\max(-z_2, -z_4-2z_1, -2z_2+2z_3-z_4)\\ Z_4 = -\max(-z_3+z_4, -z_1, z_3-z_2)\end{cases} \tag{5.16}$$

(*iv*) *If* $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=-1$, $\langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle=-3$,

$$\phi_{ij}^{(3)}:B_i\otimes B_j\otimes B_i\otimes B_j\otimes B_i\otimes B_j\xrightarrow{\sim}B_j\otimes B_i\otimes B_j\otimes B_i\otimes B_j\otimes B_i$$

$$\begin{aligned}&(z_1)_i\otimes(z_2)_j\otimes(z_3)_i\otimes(z_4)_j\otimes(z_5)_i\otimes(z_6)_j\\ &\qquad\mapsto(Z_1)_j\otimes(Z_2)_i\otimes(Z_3)_j\otimes(Z_4)_i\otimes(Z_5)_j\otimes(Z_6)_i,\end{aligned}$$

$$\begin{cases}Z_1=\max(z_6,3z_5-z_4,-3z_3+2z_4,-2z_2+3z_3,-3z_1+z_2)\\ Z_2=\max(z_1+z_6,z_1-z_4+3z_5,z_1-3z_3+2z_4,z_1-2z_2+3z_3,-z_1+z_3)\\ Z_3=z_2+z_4+z_6-Z_1-Z_5,\\ Z_4=z_1+z_3+z_5-Z_2-Z_6,\\ Z_5=-\max(-z_4+z_6,-3z_4+6z_5-z_6,-6z_3+3z_4-z_6,\\ \qquad\qquad -3z_2+3z_3-z_6,-3z_1-z_6)\\ Z_6=-\max(-z_1,-z_2+z_3,-z_4+2z_5,-2z_3+z_4,-z_5+z_6)\end{cases}\tag{5.17}$$

$\phi_{ij}^{(k)}$ $(k=0,1,2,3)$ を *braid-type isomorphism* と呼ぶ。

Proof. さて、(5.1) において $\frac{c_1c_3+c_2}{c_1}$, c_1c_3, $\frac{c_1c_2}{c_1c_3+c_2}$ の ultra-discritizations は

$$\begin{aligned}v(\tfrac{c_1c_3+c_2}{c_1})&=\max(v(c_1)+v(c_3),v(c_2))-v(c_1)=\max(v(c_3),v(c_2)-v(c_1)),\\ v(c_1c_3)&=v(c_1)+v(c_3),\\ v(\tfrac{c_1c_2}{c_1c_3+c_2})&=v(c_1)+v(c_2)-\max(v(c_1)+v(c_3),v(c_2))=-\max(v(c_3)-v(c_2),-v(c_1))\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、$v(c_i)$ を z_i とすると (5.15) を得る。

同様にして、(5.2) and (5.3) において d_i の ultra-discritization を考えると (5.16) を得る。Proposition 5.3 (iii) において $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=-1$, $\langle\alpha_j^\vee,\alpha_i\rangle=-2$ としているが、これは Proposition 5.1 (ii) の Langlands dual である。

最後に G_2-case であるが、この場合には少し注意が必要である。(5.17) において例えば $v(d_1)$ は

$$\begin{aligned}v(d_1)&=\max(-2z_2+3z_3,-3z_1+z_2,3z_5-z_4,-3z_3+2z_4,z_6,\\ &\qquad z_4-z_2,z_4-z_1-z_3,z_5-z_1,z_3+z_5-z_2)\quad(v(c_j)=z_j),\end{aligned}\tag{5.18}$$

となるが、これは (5.17) における Z_1 とは見かけが異なる。しかし、次のことに注意すれば、実は一致していることがわかる：

$m_1,\cdots,m_k\in\mathbb{R}$ と $t_1+\cdots+t_k=1$ をみたす $t_1,\cdots,t_k\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して

$$\max\left(m_1,\cdots,m_k,\sum_{j=1}^k t_jm_j\right)=\max(m_1,\cdots,m_k)$$

実際、(5.18) において

$$\begin{aligned}&z_4-z_2=\tfrac12A_1+\tfrac12A_4,\qquad z_4-z_1-z_3=\tfrac16A_1+\tfrac13A_2+\tfrac12A_4,\\ &z_5-z_1=\tfrac16A_1+\tfrac13A_2+\tfrac13A_3+\tfrac16A_4,\qquad z_3+z_5-z_2=\tfrac12A_1+\tfrac13A_3+\tfrac16A_4,\end{aligned}$$

ここで $A_1:=-2z_2+3z_3$, $A_2:=-3z_1+z_2$, $A_3:=3z_5-z_4$, $A_4:=-3z_3+2z_4$ である。よって、$Z_1=v(d_1)$ となり、他のものも同様の考察により得られる。 □

参考文献

[1] Berenstein A. and Kazhdan D., Geometric crystals and Unipotent crystals, math.QA/9912105.

[2] Berenstein A. and Zelevinsky A.,Tensor product multiplicites, Canonical bases and Totally positive varieties, *Invent.Math.*, **143**, 77–128 (2001).

[3] Hatayama G., Hikami K., Inoue R., Kuniba A., Takagi T. and Tokihiro T., The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors, *Journal of Mathematical Physics*, **42** 274–308, (2001).

[4] Hatayama G., Kuniba A., Okado M., Takagi T. and Yamada Y., Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases, Contemporary Mathematics **297**, 151–182, (2002).

[5] Kac V.G., Infinite dimensional Lie algebras 3rd ed., Cambridge University Press.

[6] Kashiwara M., Crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula. Duke Math. J. **71** (3), 839–858 (1993).

[7] Kuniba A.,Okado M., Takagi T. and Yamada Y., Geometric crystal and tropical R for $D\ (1)_n$, math.QA/0208239.

[8] Kumar S., Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting, *Invent.Math.*, **89**, 395–423, (1987).

[9] Kumar S., Kac-Moody groups, their Flag varieties and Representation Theory, Progress in Mathematics 204, Birkhauser Boston, 2002.

[10] Kac V.G. and Peterson D.H., Regular functions on certain infinite-dimensional groups; in "Arithmetic and Geometry"(Artin M.,Tate J.,eds), 141–166, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1983).

[11] Kac V.G. and Peterson D.H., Defining relations of certain infinite dimensional groups, Société Mathématique de France, Astérisque, hors série, 1985, p.165–208.

[12] Peterson D.H., and Kac V.G., Infinite flag varieties and conjugacy theorems, Porc.Nat.Acad.Sci.USA, **80**, 1778–1782, (1983).

[13] Naito S. and Sagaki D., Crystal Basis Elements of an Extremal Weight Module Fixed by a Diagram Automorphism, 第5回「代数群と量子群の表現論」研究集会報告集 (2002).

[14] Nakashima T., Polyhedral Realizations of Crystal Bases and Braid-type Isomorphisms. Contemporary Mathematics **248**, 419–435 (1999).

[15] Nakashima T., Geometric Crystals on Schubert Vareities, (preprint), math.QA/0303087.

[16] Okado M., 幾何クリスタルとトロピカル R, 第 5 回「代数群と量子群の表現論」研究集会報告集 (2002).

[17] Slodowy P., On the geometry of Scubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras, Can.Math.Soc.Conf.Proc. on 'Algebraic geometry' (Vancouver) **6**, 405–442, (1986).