数理解析研究所講究録 1314 巻 2003 年 1-10

Toric Hyperkähler 多様体の複素構造

東京工業大学大学院理工学研究科　青砥　禎彦　(AOTO Yosihiko)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1　序

リーマン多様体がhyperkählerであるとは、四元数の関係式を満たす複素構造I_1, I_2, I_3が存在し、リーマン計量がI_1, I_2, I_3のそれぞれについてケーラーであるときをいう。Hyperkählerの最も基本的な例は$\mathbf{H}^N$である。このような多様体を構成する方法としてHitchin, Karlhede, Lindström, Roček によるhyperkähler商が知られている [5, §3.(D)]。Bielawski と Dancer は、四元数の空間のトーラスによる hyperkähler 商を考察し、それを Toric Hyperkähler 多様体と呼んだ [1]。K をトーラス T^N の部分トーラスとする。$\mathbf{H}^N$ には K が右から対角的に作用する。その作用に対する hyperkähler 運動量写像を $\mu_K : \mathbf{H}^N \to \mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ で表す。$\nu \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ を μ_K の正則値とし、K が $\mu_K{}^{-1}(\nu)$ 上に自由に作用しているとすると、Toric Hyperkähler 多様体 $X(\nu) = \mu_K{}^{-1}(\nu)/K$ が得られる。$4n$ 次元の多様体 $X(\nu)$ にはトーラス $T^n = T^N/K$ が自然に作用し、その作用は $X(\nu)$ 上の hyperkähler 構造を保つ。

ここでは、論文 [1] で得られた Toric Hyperkähler 多様体の複素構造に関わるいくつかの結果を紹介したい。証明の詳細は [1] に譲る。

まず第 2 節で Toric Hyperkähler 多様体の定義を復習する。$p = {}^t(p_1, p_2, p_3)$ を $\mathbf{R}^3$ の単位ベクトルとすると、$I_p := \sum_{i=1}^3 p_i I_i$ は $X(\nu)$ 上の複素構造を定義する。したがって、2 次元球面によってパラメトライズされた複素構造の族を得る。第 3 節では、これらの複素構造のうちでコンパクトな複素部分多様体が埋め込まれるようなものを完全に決定する (定理 3.3)。このような複素構造は以下のようにして見つけることができる。$\iota : \mathfrak{k} \to \mathbf{R}^N$ を包含写像とし、$\{e_1, \ldots, e_N\}$ を $\mathbf{R}^N$ の標準的な基底とする。$\{\iota^* e_j | \, j \in J\}$ が $\mathfrak{k}^*$ の基底をなしていると仮定する。ただし $J \subset \{1, \ldots, N\}$ である。$\nu = \sum_{j \in J} \iota^* e_j \otimes u_j$, $u_j \in \mathbf{R}^3$, と表すとき、各 $j \in J$ に対して $\mathbf{CP}^1$ が $(X(\nu), I_{u_j/\|u_j\|})$ に埋め込まれる (命題 3.4)。Bielawski と Dancer は [2] において、Toric Hyperkähler 多様体がアフィン多様体になるための十分条件を求めている [2, Theorem 5.1]。その結果を用いると、上で見つけた複素構造を除けば, Toric Hyperkähler 多様体はアフィン多様体になることがわかる。第 4 節では、Toric Hyperkähler 多様体の例を与え、第 3 節で得られた結果をそれらの

例に適用する。最後の第5節では複素構造の同値性を論じる。コンパクトな複素部分多様体を許容する複素構造がちょうど2つだけ存在するときは、それ例外の複素構造が互いに同値になることがわかる (定理 5.2 (1))。しかしながら一般の場合についてはわかっていない。

2 Toric Hyperkähler 多様体

はじめに Toric Hyperkähler 多様体の定義を復習する。$\{1, i, j, k\}$ を $\mathbf{H}$ の標準的な基底とする。i, j, k を左からかけることによって得られる $\mathbf{H}^N$ 上の複素構造を I, J, K によって表す。$\mathbf{H}^N$ は、最も基本的な Hyperkähler 多様体である。$\sqrt{-1} \in \mathbf{C}$ と $i \in \mathbf{H}$ を同一視し、$(z, w) \in \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ と $\xi \in \mathbf{H}$ を $\xi = z + wj$ によって同一視する。このとき複素構造 I, J, K は、

$$\begin{aligned} I(z,w) &= (\sqrt{-1}\,z, \sqrt{-1}\,w), \\ J(z,w) &= (-\bar{w}, \bar{z}), \\ K(z,w) &= (-\sqrt{-1}\,\bar{w}, \sqrt{-1}\,\bar{z}) \end{aligned}$$

と表される。ただし、$z = (z_1, \ldots, z_N), w = (w_1, \ldots, w_N) \in \mathbf{C}^N$ である。トーラス

$$T^N = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbf{C}^N \,|\, |\alpha_i| = 1 \text{ for each } 1 \le i \le N\}$$

は、$\mathbf{H}^N$ に右から対角的に作用する。この作用は $\mathbf{H}^N$ 上の Hyperkähler 構造を保つ。$\{e_1, \ldots, e_N\}$ を $\mathbf{R}^N$ の標準的な基底とすると、この作用に対する Hyperkähler 運動量写像

$$\mu_{T^N} = (\mu_{T^N,1},\ \mu_{T^N,2},\ \mu_{T^N,3}) : \mathbf{H}^N \to \mathbf{R}^N \otimes \mathbf{R}^3$$

は、

$$\mu_{T^N,1}(z,w) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(|z_i|^2 - |w_i|^2)e_i,$$

$$(\mu_{T^N,2} + \sqrt{-1}\,\mu_{T^N,3})(z,w) = -\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i w_i)e_i$$

と表すことができる。ただし、$\mu_{T^N,1}$, $\mu_{T^N,2}$, $\mu_{T^N,3}$ は、それぞれ I, J, K に対応する Kähler 運動量写像である。

K を T^N の部分トーラスとし、$\mathfrak{k} \subset \mathbf{R}^N$ をそのリー環とする。さらに $T^n = T^N/K$ とおく。このときリー環の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k} \stackrel{\iota}{\longrightarrow} \mathbf{R}^N \stackrel{\pi}{\longrightarrow} \mathbf{R}^n \longrightarrow 0$$

と、その dual

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^n \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{R}^N \xrightarrow{\iota^*} \mathfrak{k}^* \longrightarrow 0$$

を得る。ただし、ι は包含写像を、π は射影を表している。部分トーラス K の作用に対する Hyperkähler 運動量写像

$$\mu_K = (\mu_{K,1},\ \mu_{K,2},\ \mu_{K,3}) : \mathbf{H}^N \to \mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$$

は、

$$\mu_{K,i} = \iota^* \circ \mu_{T^N,i}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

となる。

Bielawski と Dancer は、[2, §3] において Toric Hyperkähler 多様体を以下のように定義した。

定義 2.1 (Toric Hyperkähler 多様体) $\nu \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ を Hyperkähler 運動量写像 μ_K の正則値とし、さらに K が ${\mu_K}^{-1}(\nu)$ に自由に作用しているとする。このとき Hyperkähler 商

$$X(\nu) = {\mu_K}^{-1}(\nu)/K$$

は $4n$ 次元の滑らかな Hyperkähler 多様体になり、これを Toric Hyperkähler 多様体と呼ぶ。その Hyperkähler 構造を $(g; I_1, I_2, I_3)$ で表す。

トーラス T^n が $X(\nu)$ に Hyperkähler 構造を保って自然に作用していることに注意する.

3 主結果

$X(\nu)$ を Toric Hyperkähler 多様体としよう。$p = {}^t(p_1, p_2, p_3)$ を $\mathbf{R}^3$ の単位ベクトルとすると、

$$\left(\sum_{i=1}^{3} p_i I_i\right)^2 = -1$$

が成り立つ。したがって、2 次元球面によってパラメトライズされた複素構造の族を得る。複素構造 $\sum_{i=1}^{3} p_i I_i$ を I_p で表す。この節では、これらの複素構造のうちでコンパクトな複素部分多様体が埋め込まれるようなものを完全に決定する。

m を非負整数とし、

$$\Lambda_m = \{J \subset \{1, \ldots, N\} \mid \#J = \dim \operatorname{span}\{\iota^* e_j \mid j \in J\} = m\}$$

とおく。各 $J \in \Lambda_{\dim K - 1}$ に対して、$\mathfrak{k}^*$ の中の超平面 $\mathcal{H}_J$ を $\mathcal{H}_J = \operatorname{span}\{\iota^* e_j \mid j \in J\}$ によって定義する。

Bielawski と Dancer は、[2, Theorem 5.1] において以下の命題を証明した。

命題 3.1 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ とおく。各 $J \in \Lambda_{\dim K-1}$ に対して、ν_2 と ν_3 が同時に $\mathcal{H}_J$ 上に存在することはないものとする。このとき、$(X(\nu), I_1)$ はアフィン多様体 $\mathrm{Spec}\, A[V]^{K^{\mathbf{C}}}$ に双正則である。ただし、$K^{\mathbf{C}}$ は K の複素化であり、V は方程式

$$-\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i w_i)\iota^* e_i = \nu_2 + \sqrt{-1}\,\nu_3$$

によって定義されている。

$P = (p_{ij}) \in SO(3)$ とする。P の第 i 行、$1 \le i \le 3$、を p_i によって表す。さらに、各 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ に対して、

$$P\lambda = (\sum_{j=1}^{3} p_{1j}\lambda_j, \sum_{j=1}^{3} p_{2j}\lambda_j, \sum_{j=1}^{3} p_{3j}\lambda_j)$$

とおく。$\nu \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ が μ_K の正則値ならば、$P\nu$ も μ_K の正則値になることに注意する。$\mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ の元と複素構造との関係は、以下のように記述される。

定理 3.2 次の条件を満たす写像 $\Psi : X(\nu) \to X(P\nu)$ が存在する。

(1). Ψ は $X(\nu)$ から $X(P\nu)$ への isometry である。

(2). 各 $1 \le i \le 3$ に対して、Ψ は $(X(\nu), I_{p_i})$ から $(X(P\nu), I_i)$ への双正則写像である。

$J \in \Lambda_{\dim K}$ とする。ν を

$$\nu = \sum_{j \in J} \iota^* e_j \otimes u_j, \qquad u_j \in \mathbf{R}^3$$

と表すとき、

$$U_J = \{\pm u_j / \|u_j\| \,|\, j \in J\}$$

とおく。[7, Proposition 2.1] により $u_j \neq 0$、$j \in J$、であることに注意する。さらに、

$$\mathcal{C}_\nu = \{p \in S^2 |\, (X(\nu), I_p) \text{ にはコンパクトな複素部分多様体が埋め込まれる.}\}$$

とおく。ただし、ここでは S^2 を $\mathbf{R}^3$ 内の半径 1 の球と考えている。
主定理は以下である。

定理 3.3 $X(\nu)$ を $\dim_{\mathbf{R}} X(\nu) > 0$ の toric hyperkähler 多様体とする。このとき、

$$\mathcal{C}_\nu = \bigcup_{J \in \Lambda_{\dim K}} U_J$$

が成り立つ。

証明　証明の方針を述べる。

$u_j/\|u_j\| \in U_J$ とする。定理3.2により、$P \in SO(3)$ が存在して $(X(\nu), I_{u_j/\|u_j\|})$ は $(X(P\nu), I_1)$ に双正則になる。したがって、$(X(P\nu), I_1)$ にコンパクトな複素部分多様体が埋め込まれることを示せばよい。

$X(P\nu)$ 上の T^n 作用に対する Hyperkähler 運動量写像を $\mu_{T^n} : X(P\nu) \to \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^3$ で表す。このとき、$\mathbf{R}^n$ 内の線分 Δ が存在して、${\mu_{T^n}}^{-1}(\Delta, 0, 0)$ が $(X(P\nu), I_1)$ のコンパクトな複素部分多様体になることが示される。

逆の包含関係は命題3.1からわかる。 □

さらに、

命題 3.4 部分多様体 ${\mu_{T^n}}^{-1}(\Delta, 0, 0)$ は $\mathbf{CP}^1$ に双正則である。

証明　証明の方針を述べる。

${\mu_{T^n}}^{-1}(\Delta, 0, 0)$ が $\mathbf{CP}^1$ に同相であることを示せばよい。T^n の1次元部分トーラス S^1 を適当に定めると、${\mu_{T^n}}^{-1}(\Delta, 0, 0)$ 上の S^1 作用が自然に定義され、その作用に対する運動量写像が臨界点をちょうど2つ持つモース関数であることが示される。 □

定理3.3から3つの系が得られる。

系 3.5 $X(\nu)$ を $\dim_{\mathbf{R}} X(\nu) > 0$ の toric hyperkähler 多様体とする。$p \in S^2 \setminus \mathcal{C}_\nu$ ならば、$(X(\nu), I_p)$ はアフィン多様体である。

次の命題は命題3.1の逆である。これは、Konno[8,Corollary 6.12] によっても証明されている。

系 3.6 $X(\nu)$ を $\dim_{\mathbf{R}} X(\nu) > 0$ の toric hyperkähler 多様体とする。もし $(X(\nu), I_1)$ がアフィン多様体ならば、各 $J \in \Lambda_{\dim K-1}$ に対して、ν_2 と ν_3 が同時に $\mathcal{H}_J$ 上に存在することはない。

系 3.7 $X(\nu)$ を $4N > \dim_{\mathbf{R}} X(\nu) > 0$ の toric hyperkähler 多様体とする。このとき $\mathcal{C}_\nu$ の元の個数は偶数であり、不等式

$$1 \leq \frac{\#\mathcal{C}_\nu}{2} \leq \#\{\mathcal{H}_J \mid J \in \Lambda_{\dim K-1}\}$$

が成り立つ。

4 例

この節では、Toric Hyperkähler 多様体の例を与える。

例 4.1 最初の例は $N = n+1$ の場合である。次の条件を満たす線型写像を $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ とする。

(i). $\{\pi(e_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の基底をなす.

(ii). $\pi(e_{n+1}) = -\pi(e_1) - \cdots - \pi(e_n)$.

リー環 $\mathfrak{k}$ は $e_1 + \cdots + e_{n+1}$ によって生成され、$\iota^* e_1 = \cdots = \iota^* e_{n+1}$ が成り立つ。さらに運動量写像は、

$$\mu_{K,1}(z,w) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(|z_i|^2 - |w_i|^2)\iota^* e_1,$$

$$(\mu_{K,2} + \sqrt{-1}\,\mu_{K,3})(z,w) = -\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n+1}(z_i w_i)\iota^* e_1$$

となる。ν を $\mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ の 0 でない元とする。[7, Proposition 2.1] により ν は μ_K の正則値になる。さらに [7, Proposition 2.4] から、${\mu_K}^{-1}(\nu)$ 上に K は自由に作用していることがわかる。$\nu = \iota^* e_1 \otimes u$、$u \neq 0 \in \mathbf{R}^3$、と表すと定理 3.3 から

$$\mathcal{C}_\nu = \{\pm u/\|u\|\}$$

となる。$(X(\nu), I_{\pm u/\|u\|})$ は $T^*\mathbf{CP}^n$ に双正則である。

例 4.2 次に $n = 1$ の場合を考える。次の条件を満たす線型写像を $\pi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ とする。

(i). $\pi(e_N) \neq 0$.

(ii). $\pi(e_1) = \cdots = \pi(e_{N-1}) = -\pi(e_N)$.

リー環 $\mathfrak{k}$ は $e_1 + e_N, \dots, e_{N-1} + e_N$ によって生成され、$\iota^* e_N = \sum_{i=1}^{N-1} \iota^* e_i$ が成り立つ。さらに運動量写像は、

$$\mu_{K,1}(z,w) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(|z_i|^2 - |w_i|^2 + |z_N|^2 - |w_N|^2)\iota^* e_i,$$

$$(\mu_{K,2} + \sqrt{-1}\,\mu_{K,3})(z,w) = -\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{N-1}(z_i w_i + z_N w_N)\iota^* e_i$$

となる。$\nu \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathbf{R}^3$ を

$$\nu = \sum_{i=1}^{N-1} \iota^* e_i \otimes u_i, \quad u_i \in \mathbf{R}^3$$

と表し、各 $1 \leq i \leq N-1$ に対して $u_i \neq 0$、さらに各 $1 \leq i \neq j \leq N-1$ に対して $u_i \neq u_j$ を仮定する。このとき、[7, Proposition 2.1] から ν は μ_K の正則値になり、また [7, Proposition 2.4] から、$\mu_K{}^{-1}(\nu)$ 上に K が自由に作用していることがわかる。定理 3.3 から、

$$\mathcal{C}_\nu \ = \ \{\pm u_i / \parallel u_i \parallel | 1 \leq i \leq N-1\} \cup \{(u_i - u_j)/ \parallel u_i - u_j \parallel | 1 \leq i \neq j \leq N-1\}$$

となる。

ここで、各 $1 \leq i \leq N-1$ に対して写像 $\tau_i : S^2 \to \widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を次のように定義する。各 $p \in S^2 \setminus \{\pm u_{N-1} / \parallel u_{N-1} \parallel\}$ に対して、$P \in SO(3)$ を、その第 1 行が ${}^t p$ に等しくなるようにとる。P の第 2 行、第 3 行をそれぞれ p_2, p_3 によって表し、

$$\tau_i(p) = \frac{\langle {}^t p_2, u_i \rangle + \sqrt{-1} \langle {}^t p_3, u_i \rangle}{\langle {}^t p_2, u_{N-1} \rangle + \sqrt{-1} \langle {}^t p_3, u_{N-1} \rangle}$$

とおく。$\tau_i(p)$ が P の選び方によらないことに注意する。$p = \pm u_{N-1}/\|u_{N-1}\|$ のときは $\tau_i(p) = \infty$ とする。南極を中心とする立体射影によって $\widehat{\mathbf{C}}$ と S^2 を同一視すれば、τ を $\widehat{\mathbf{C}}$ から $\widehat{\mathbf{C}}$ への写像と考えることができる。

命題 3.1 から以下の命題を得る。

命題 4.3 $p \in S^2 \setminus \mathcal{C}_\nu$ とする。このとき $(X(\nu), I_p)$ は、

$$xy = z \prod_{i=1}^{N-1} (\tau_i(p) - z)$$

に双正則である。

写像 τ は、具体的な計算から次のように表される。

命題 4.4 $\{u_i, u_{N-1}\}$ が線型独立となるような u_i に対して、一次分数変換 S_i, T_i が存在して

$$S_i \circ \tau_i \circ T_i(z) = z + \frac{1}{z} \quad \text{for each } z \in \widehat{\mathbf{C}}$$

が成り立つ。

5 複素構造の同値性

この節では、複素構造 $I_p,\ p \in S^2$, の同値性を議論する。

$X(\nu)$ を Toric Hyperkähler 多様体とし、ν が $(\nu_1, 0, 0)$ という形をしているものとする。このとき $\mathcal{C}_\nu = \{{}^t(\pm 1, 0, 0)\}$ である。$X(\nu)$ 上の 2 通りの S^1 作用を

$$[z, w] \cdot e^{\sqrt{-1}\theta} = [ze^{\sqrt{-1}\theta}, w], \tag{5.1}$$

$$[z, w] * e^{\sqrt{-1}\theta} = [z, we^{\sqrt{-1}\theta}] \tag{5.2}$$

によって定義する。ただし、$\theta \in \mathbf{R}$ であり、$[z, w]$ は、$(z, w) \in \mu_K{}^{-1}(\nu)$ の $X(\nu)$ における同値類を表している。$\nu = (\nu_1, 0, 0)$ なので、この作用は well-defind である。これらの作用は計量およびケーラー形式 ω_1 を保つ。作用 (5.1)、(5.2) に対する運動量写像は、それぞれ

$$f_1([z, w]) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} |z|^2,$$

$$f_2([z, w]) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} |w|^2$$

となる。ただし、これらの運動量写像は ω_1 に関するものである。

作用 (5.1)、(5.2) に対して、$1 \in \mathbf{R}$ に対応する基本ベクトル場を $X_1^{\#},\ X_2^{\#}$ によって表すことにする。このとき以下の命題が成り立つ。

命題 5.1 各 $i = 1,\ 2$ に対して

$$L_{X_i^{\#}}\omega_1 = 0,\ L_{X_i^{\#}}\omega_2 = -\omega_3,\ L_{X_i^{\#}}\omega_3 = -\omega_2$$

が成り立つ。

この節の主定理は以下である。

定理 5.2 $X(\nu)$ を $\#\mathcal{C}_\nu = 2$ の toric hyperkähler 多様体とする。

(1). 各 $p, q \in S^2 \setminus \mathcal{C}_\nu$ に対して、$(X(\nu), I_p)$ は $(X(\nu), I_q)$ に双正則である。

(2). 各 $p \in S^2 \setminus \mathcal{C}_\nu$ に対して、$(X(\nu), I_p)$ は Stein 多様体である。

注意 5.3 系3.5により定理5.2(2)は明らかである。この節では strictly plurisubharmonic exhaustion function を具体的に構成することによって証明する。

証明　証明の方針のみを述べる。

(1). ν が $(\nu_1, 0, 0)$ という形をしているとする。一般の場合は、$\#\mathcal{C}_\nu = 2$ なので定理 3.2、定理 3.3 により $\nu = (\nu_1, 0, 0)$ の場合に帰着される。

$(\pm 1, 0, 0)$ が固定されるような標準的な回転によって、S^2 上の S^1 作用を定義する。この作用と $X(\nu)$ 上の作用 (5.1) によって、$X(\nu)\times S^2$ 上の対角作用が定義される。$X(\nu)\times S^2$ 上のこの対角作用に対して、$1 \in \mathbf{R}$ に対応する基本ベクトル場を $\tilde{X}$ によって表すことにする。

I_{S^2} を S^2 上の標準的な複素構造とする。また、$X(\nu) \times S^2$ 上の自然な複素構造を $\tilde{I}$ で表す [5, §3.(F)]。$X(\nu) \times S^2$ 上の S^1 作用は複素構造 $\tilde{I}$ を保つので、第 1 成分が 0 であるような各 $p,\ q \in S^2$ に対して、$(X(\nu), I_p)$ は $(X(\nu), I_q)$ に双正則である。したがってベクトル場 $\tilde{I}\tilde{X}$ が完備であることを示せばよい。その証明方法は [5. Proposition 9.1 (i)] と同様である。

(2). ν が $(\nu_1, 0, 0)$ という形をしていると仮定してよい。(1) により複素構造 I_2 についてのみ考えればよい。[5. Proposition 9.1 (ii)] と同様の議論によって、$f_1 + f_2$ が I_2 に関する strictly plurisubharmonic exhaustion function となっていることがわかる。 □

例 5.4 例 4.1 の Toric Hyperkähler 多様体を考える。$\#\mathcal{C}_\nu = 2$ なので、各 $p, q \in S^2 \setminus \{\pm u/\parallel u \parallel\}$ に対して、$(X(\nu), I_p)$ は $(X(\nu), I_q)$ に双正則である。

問題 5.5 $\#\mathcal{C}_\nu > 2$ の場合はまだ未解決である。とくに例 4.2 の Toric Hyperkähler 多様体を考える。この場合、$S^2 \setminus \mathcal{C}_\nu$ によってパラメトライズされたアフィン多様体の族を得る。これらのアフィン多様体が互いに双正則であるかどうかはまだ知られていない。

最後に、$\#\mathcal{C}_\nu > 2$ の Toric Hyperkähler 多様体で、定理 5.2(1) が成り立つような例を与える。

例 5.6 $X(\nu^{(1)}), \ldots, X(\nu^{(m)})$ を例 4.1 の Toric Hyperkähler 多様体とする。簡単のため $\dim_{\mathbf{R}} X(\nu^{(1)}) = \cdots = \dim_{\mathbf{R}} X(\nu^{(m)})$ と仮定する。各 $1 \leq i \leq m$ に対して

$$\nu^{(i)} = \iota^* e_1 \otimes u^{(i)}, \quad u^{(i)} \neq 0 \in \mathbf{R}^3$$

と表す。また、各 $1 \leq i \neq j \leq m$ に対して $\{u_i, u_j\}$ が線型独立であると仮定する。$\nu = (\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(m)})$ とおくと、定理 3.3 により $\mathbf{H}^{mN}$ の $K \times \cdots \times K$ (m times) による Hyperkähler 商 $X(\nu)$ に対して

$$\mathcal{C}_\nu = \{\pm u^{(i)}/\|u^{(i)}\| | 1 \leq i \leq m\}.$$

が成り立つ。仮定により $\mathcal{C}_\nu$ は $2m$ に等しい。各 $p, q \in S^2 \setminus \mathcal{C}_{\nu^{(i)}}$ に対して、$(X(\nu^{(i)}), I_p)$ と $(X(\nu^{(i)}), I_q)$, $1 \leq i \leq m$, は双正則である。したがって各 $p, q \in S^2 \setminus \mathcal{C}_\nu$ に対して、$(X(\nu), I_p)$ は $(X(\nu), I_q)$ に双正則である。

参考文献

[1] Y. Aoto: *Complex structures of toric hyperKähler manifolds.*(Preprint)

[2] R. Bielawski and A. Dancer: *The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds,* Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 727–760.

[3] V. Guillemin: Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^N-spaces, Birkhäuser, Boston, 1994.

[4] T. Hausel and B. Sturmfels: *Toric hyperkähler varieties.* (Preprint)

[5] N. J. Hitchin: *The self-duality equations on a Riemann surface,* Proc. London. Math. Soc. (3) **55** (1987), 59–126.

[6] N. J.Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček: *Hyperkäler metrics and supersymmetry,* Comm. Math. Phys. **108** (1987), 535–589.

[7] H. Konno: *Cohomology rings of toric hyperKähler manifolds,* Internat. J. Math. **11** (2000), no. 8, 1001–1026.

[8] H. Konno: *Variation of toric hyperKähler manifolds.* (Preprint)

[9] K. Lamotke: Regular Solids and Isolated Singularities, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.