

有理写像の不定点におけるカ学系構造

京都大学総合人間学部 基礎科学科 研究員 篠原知子 (Tomoko Shinohara)

(Faculty of Integrated Human Studies, Kyoto University.)

§1. 序章.

カ学系とは、決定論的(初期状態から n 回以降の状態が一意に決まること)な法則に従って、時間と共に変化する状態を成すシステムのことです。数学的に(離散)カ学系とは、多様体 M 上の写像 $F: M \rightarrow M$ のことで、任意の点 $p \in M$ の軌道 $\{F^n(p)\}_{n \geq 0}$ を分類し特徴付けることが主な目的となります。特に、複素の枠組みで (M : 複素多様体, F : 正則もしくは有理写像) 議論を行うことで、関数論や代数幾何などの道具を用いることができ、新しいモデルを構成できたり、一般論を展開していくことができます。

一次元複素カ学系 ($M = \mathbb{C}$ もしくは \mathbb{P}^1 , F は多項式写像もしくは有理写像) の研究は 19 世紀の後半から、 $z \mapsto z^2 + c$ と呼ばれる代数的方程式の根がある写像のカ学系に由来する手法との関連性が明らかになりました。特に Montel の正規族の理論を元に、1910年代に Fatou や Julia に由来する結果が得られました。その後、1980年代には Sullivan に由来する擬等変写像論が研究に導入され、Fatou や Julia の時代より残っていた「非遊走領域は存在するか?」という問題が解決されるほどより精密な結果が得られました。その一方、コンピュータグラフィックスの発展と共に、フラクタルを産み出すシステムとしても複素カ学系は注目を集めています。(一変数複素カ学系の研究の歴史については 2003 年 3 月号の数学セミナーに詳しい解説が載っています。)

これらの理論の多次元への自然な拡張として 1990年代より、 $M = \mathbb{C}^n, \mathbb{P}^n$, F : 正則, 有理写像の場合は, Fornæss, Sibony, Ueda 等により、また $M = \mathbb{C}^2$, F : 多項式自己同型の場合は Buddeford, Smillie 等により研究されています。最近では、より一般的に M : compact Kähler surface, F : 双有理写像の場合や、 M : $K3$ 曲面, F : 自己同型写像の場合などについても研究が行われています。

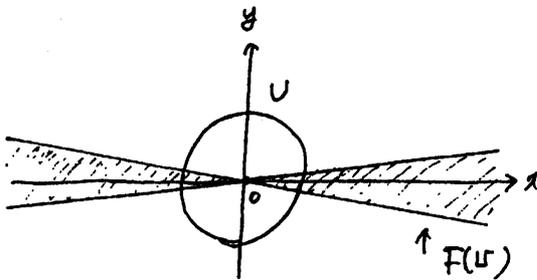
今回は $M = \mathbb{P}^2$ 複素二次元射影空間, F : 双有理写像の場合について、特に不定点, とおばれる不連続点におけるカ学系の局所構造について得た結果を報告します。

例えば, \mathbb{C}^2 上の有理写像 $F(x, y) = (\frac{x}{y}, y)$ は $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y=0\}$ より $(0, 0)$ を不連続点に持ちます。一般に不連続点におけるカス系構造を得ることは難しいのですが, 二の F のように

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) \ni (0, 0)$ となる場合 (二の様な不連続点は周期的不連続点と呼ばれます。)

F は $(0, 0)$ において図1のように回帰性を持っています。回帰性を持つ点集合の構造を調べることは, カス系において基本的な課題であり, 回帰性を持つ点の代表である, 不連続点におけるカス系構造の理論と同様のものが期待されます。

図1. (以降, 図は \mathbb{R}^2 平面での写りのものとする。), $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 < \varepsilon\}$



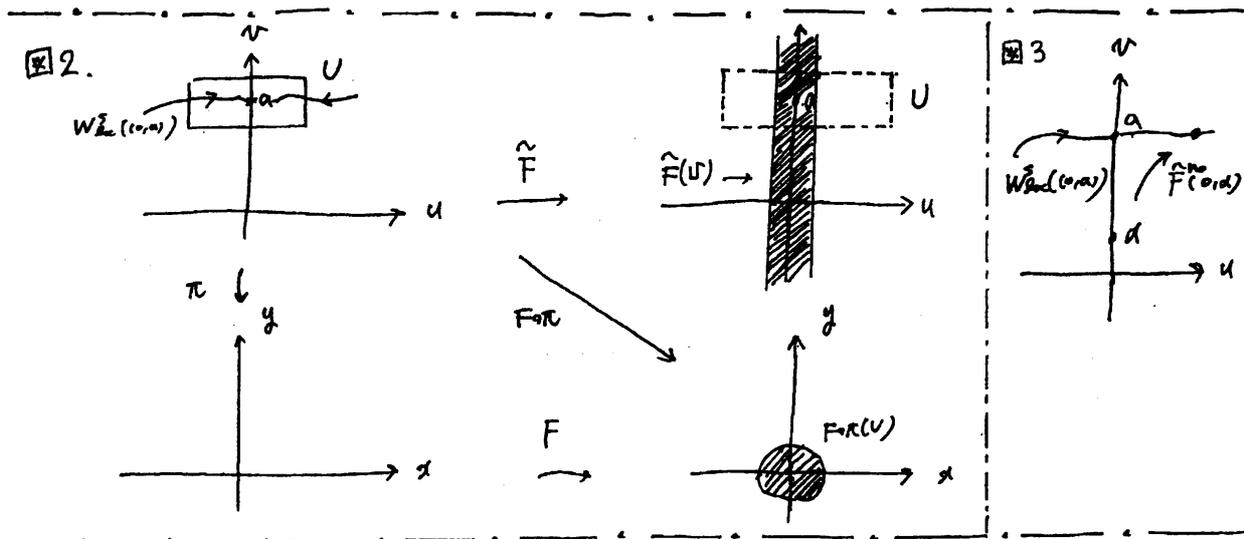
ここで不連続点は前述の二つとも関係があることを注意しておきます。

$R(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ を複素2変数の多項式 p, q からなる多項式写像とします。 R に対して, 新しく有理写像 $F(x, y) = (x, y) - JR(x, y)^{-1} \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix}$ を考えます。但し, $JR(x, y)^{-1}$ は R のヤコビ行列の逆行列とします。 $R(x, y) = (0, 0)$ の根 (x_0, y_0) を F の反復合成により計算して $\varepsilon < \delta$ 方法と二つとも呼ばれます。 $\det(JR(x_0, y_0)) \neq 0$ のとき (x_0, y_0) は $F(x, y)$ の吸引不動点であり, 吸引域から初期点, (x_1, y_1) を選べば, $F^n(x_1, y_1)$ を計算することで (x_0, y_0) を近似計算することが出来ます。一方 $\det(JR(x_0, y_0)) = 0$ のとき (x_0, y_0) は $F(x, y)$ の不連続点となり, 二つとも方法により, $R(x, y) = (0, 0)$ の根を近似して $\varepsilon < \delta$ は, F の不連続点 (x_0, y_0) の存在集合 $W^s(x_0, y_0, F)$ (正確は後程) の構造を研究する必要があると言えます。

今日は $F(x,y) = \left(\frac{x^2+ax-y}{bx}, x \right)$ ($a \neq 1, b \neq 0$ の形をした有理写像の力学系を考察します。 F は \mathbb{R}^2 上の双有理写像に拡張され、特にその逆写像 G は (x,y) 平面上で $G(x,y) = (y, y^3 - bxy + ay)$ と表されまふ。簡単な計算より $(0,0)$ は F の不動点であり $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y) = \{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y=0 \} \ni (0,0)$ より周期的不動点であることがわかります。

周期的不動点に関しては、これまで [Yamagishi] にある研究が行われています。

$\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (u,v) \mapsto (u, uv)$ とします。 $F \circ \pi(0,a) = (0,0)$ であるので $(0,a)$ の近傍 U で $F \circ \pi(U) \ni (0,0)$ とするものが存在します。特に、この F は [Yamagishi] の条件を満たすことから $(0,a)$ に対して局所安定集合 $W_{loc}^s(0,a, \hat{F})$ (極は後程) が存在し $\hat{F}(U)$ と U が $(0,a)$ の近傍で図2のような状況であることがわかります。但し $\hat{F} = \pi^{-1} \circ F \circ \pi$ とします。



今回は (u,v) 平面上の点 $(0,a)$ で $\hat{F}^n(0,a) \in W_{loc}^s(0,a, \hat{F})$ とするものが存在することを示しました。(図3参照) さらにある条件を $\hat{F}^n(0,a)$ に与えるとき $(0,a)$ の近傍に馬蹄形写像が定義されると、結果として不動点 $(0,0)$ に F の周期点が集積することがわかりました。今日の報告では、まず第2章で主定理を述べ、第3章では一般の馬蹄形写像の定義を紹介し、第4章では我々の F に対してどのように馬蹄形写像が定義されるかを説明(可。証明については、[Shinohara] を参照して下さい。この報告では証明の核となる幾何構造について説明したいと思えます。

§2. 主定理.

この章では主定理を紹介 します。その前にいくつかの準備を行います。まず我々の F に対して $(0,0)$ は不動点ですが、 F の逆写像 G については、 $G(0,0)=(0,0)$ より不動点であることに注意しておきます。特に $JG(0,0)$ の固有値が $0, \alpha$ であることから、これは鞍型と呼ばれる不動点です。鞍型不動点に対しては $(0,0)$ のある近傍 U が存在し、次の2つの集合が存在することが知られています。([Morosawa] 参照).

$$W_{loc}^s((0,0), G) := \{ z \in U \mid G^n(z) \in U, \lim_{n \rightarrow \infty} G^n(z) = (0,0) \}, (0,0) \text{ の局所安定集合.}$$

$$W_{loc}^u((0,0), G) := \{ z \in U \mid F^n(z) \in U, \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = (0,0) \} \cup \{(0,0)\}, (0,0) \text{ の局所不安定集合.}$$

特に、この $W_{loc}^u((0,0), G)$ を \mathbb{R}^2 でプロットするとそれが前章で述べた [Yamagishi] により存在が保証される局所不安定集合 $W_{loc}^s((0,0), F)$ であることに注意しておきます。

更に 次の2つの集合を定義します。

$$W^s((0,0), G) := \bigcup_{n \geq 0} G^{-n}(W_{loc}^s((0,0), G)), (0,0) \text{ の安定集合.}$$

$$W^u((0,0), G) := \bigcup_{n \geq 0} G^n(W_{loc}^u((0,0), G)), (0,0) \text{ の不安定集合.}$$

また $W^s((0,0), G) \cap W^u((0,0), G) - \{(0,0)\} \ni z$ は $(0,0)$ のホモクリニック点とよびます。

特に z で $T_z \mathbb{C}^2 = T_z W^s((0,0), G) \oplus T_z W^u((0,0), G)$ が成立するとき横断的ホモクリニック点、と呼びます。このとき次の主定理を得ました。

主定理. (i) 任意のパラメータ $-|a| > 1, b \neq 0$ に対して $(0,0)$ のホモクリニック点 z が存在する。

特にあるパラメータのとき、 $z = (\frac{a}{b}, 0)$ である。

(2) $z = (\frac{a}{b}, 0)$ が $(0,0)$ の横断的ホモクリニック点であるとき、ある自然数 k , ある \mathbb{C}^2 の部分集合 X , ある同相写像 $\pi: X \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}} - E$ が存在し、次の成立する。

(i) $\bar{X} \ni (0,0)$ (ii) $G^k(X) = X$ (iii) $F^k(X) = X$ (iv)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{G^k} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \text{ は可換である.} \\ \{0,1\}^{\mathbb{Z}} - E & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{Z}} - E \end{array}$$

但し、 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}} = \{s = (\dots s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \mid s_i = 0, 1\}$ は記号 $0, 1$ からなる両側無限列全体の空間。

$$E := \{ s \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \mid \text{ある番号 } m \text{ が存在し, } (\dots s_m, 0, 0, \dots) \},$$

$$\sigma: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, (\dots s_{-1}, \check{s}_0, s_1, \dots) \mapsto (\dots s_{-1}, s_0, s_1, \dots), \text{ 左ずらし写像}$$

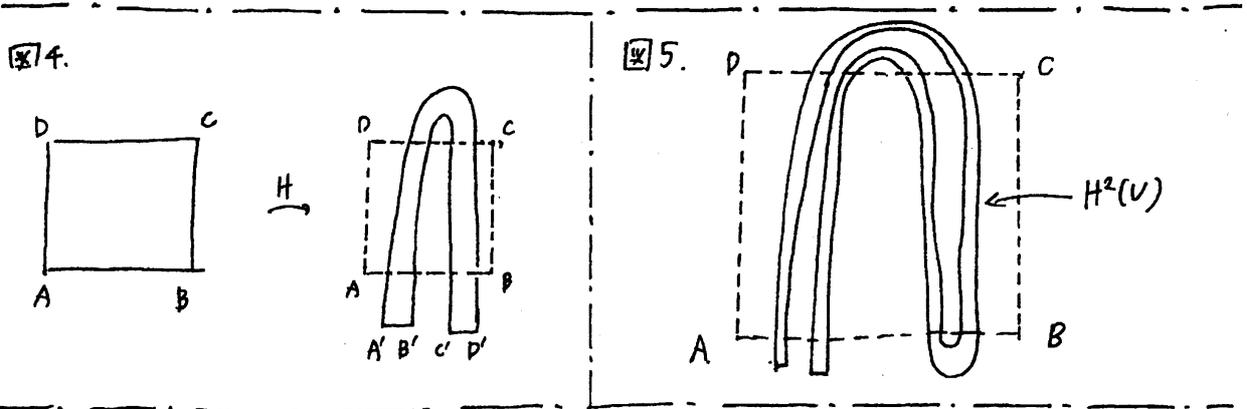
ある自然数 n に対し $F^n(CP^1) = P$ とする点 $\in F$ の周期点とよばれる。定理の系として次の主張を得る。

系. F の周期点 z が $(0,0)$ に累積する。

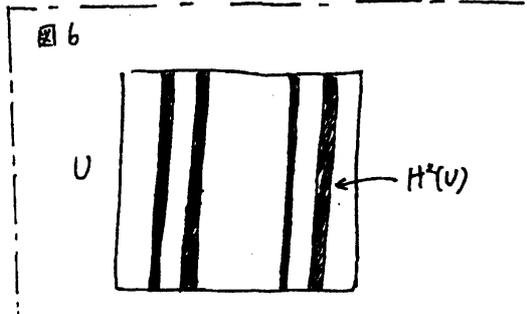
5.3. 馬蹄形写像.

この章では興味深い力学系を実現する 2次元写像の例として 1960年代に Smale (=S) 考えられた馬蹄形写像について説明する。(きちんとした定式化は [Aoki] などを見参照して下さい。こゝでの記述は [Kokubu] の 4.4 章を要約したものであり。) 次の章でみるように我々の F を $(0,0)$ の近傍で本質的にこの馬蹄形写像と同様の構造を採っていることがわかります。

平面上の同相写像 $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が図4のように正方形 $ABCD$ を馬蹄形 $A'B'C'D'$ に写すときは、この H は正方形 $ABCD$ を横に縮め、縦に伸ばした後、折り曲げて馬蹄形 $A'B'C'D'$ に写す。



正方形 $ABCD \in U$ とおきます。 $H^2(U)$ は図5のようになります。これを繰り返して $H^n(U) \cap U$ を考えると図6のように縦に細長い帯が 2^n 個並んだ状態になります。この帯領域の横幅は H に沿った方向の縮小率がほぼ一定の $\lambda < 1$ であれば、ほぼ λ^n であり、0 に収束します。よって $\bigcap_{n \geq 0} H^n(U)$ は (Cantor集合) \times (線分) と同相になります。



一方 H の逆写像 H^{-1} において正方形 $ABCD$ は横向き馬蹄形 $A^*B^*C^*D^*$ に写される。

(図7参照). 同様の考察で $H^{-n}(U) \cap U$ は 2^n 個の横に細長い帯が並んだものになります。

この領域の縦幅は H による縦方向の伸縮率がほぼ一定の $\mu > 1$ であれば, $\frac{1}{\mu^n}$ となり

0 に収束します。さて $\bigcap_{n=0}^{\infty} H^n(U)$ は (線分) \times (Cantor集合) と同相になります。 $X = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H^n(U)$

とおくと, X の点 p はその軌道 $\{H^n(p)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が常に X に留まります。特に

$X = \bigcap_{n=0}^{\infty} H^n(U) \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} H^{-n}(U)$ より X は (Cantor集合) \times (Cantor集合) と同相になります。

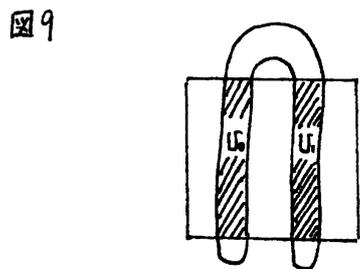
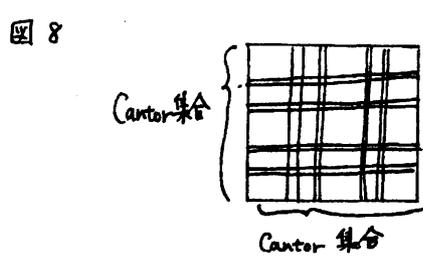
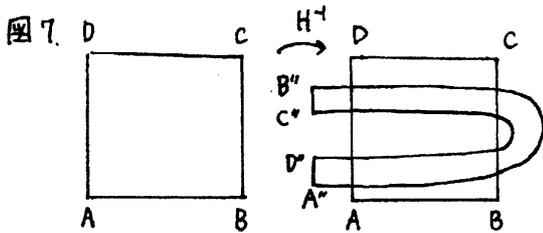
(図8参照). $H(U) \cap U$ は図9のまうに2つの連結成分 U_0, U_1 からなります。

$$X \text{ の点 } p \text{ に対し } s_n(p) = \begin{cases} 0 & \dots H^n(p) \in U_0 \text{ のとき} \\ 1 & \dots H^n(p) \in U_1 \text{ のとき} \end{cases} \quad \text{と対応付けると}$$

同相写像 $\pi: X \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $p \mapsto (\dots, s_{-1}(p), s_0(p), s_1(p), \dots)$ が定まり, 定義より

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{0,1\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \end{array} \quad \text{は可換となります。}$$

$\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の σ によるカオス系を考察すると X に H の周期点, が稠密に存在すると, H が初期値に関する敏感な依存性を持つと, 位相的エントロピーが正になると算がわかり $H: X \rightarrow X$ がカオス的な性質を持つカオス系であることがわかります。



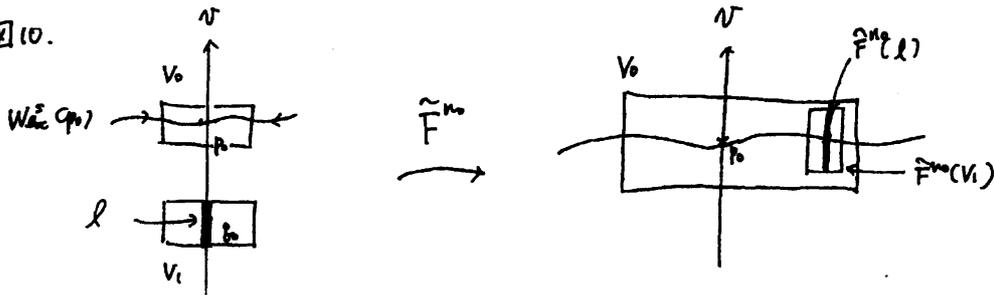
§4. 主定理の証明の予行.

序章において述べたように 我々の F は [Yamagishi] の条件を満たしており (u, v) 平面上の点 $p_0 := (0, \alpha)$ の局所安定集合 $W_{loc}^s(p_0, \hat{F})$ が存在するとはわかった. 更に [Shinohara] の §3 より.

(u, v) 平面上の点 $z_0 := (0, \alpha)$ で $\hat{F}^{m_0}(z_0) \in W_{loc}^c(p_0, \hat{F})$ とするものが存在するとはわかった.

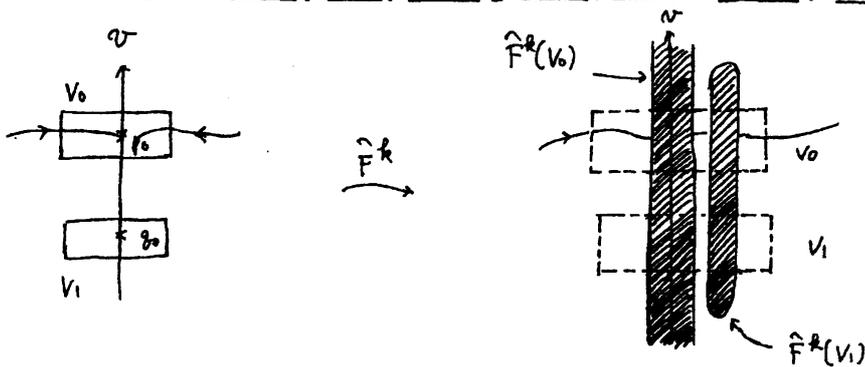
図10の如くに p_0, z_0 の近傍 V_0, V_1 をとりまわす.

図10.

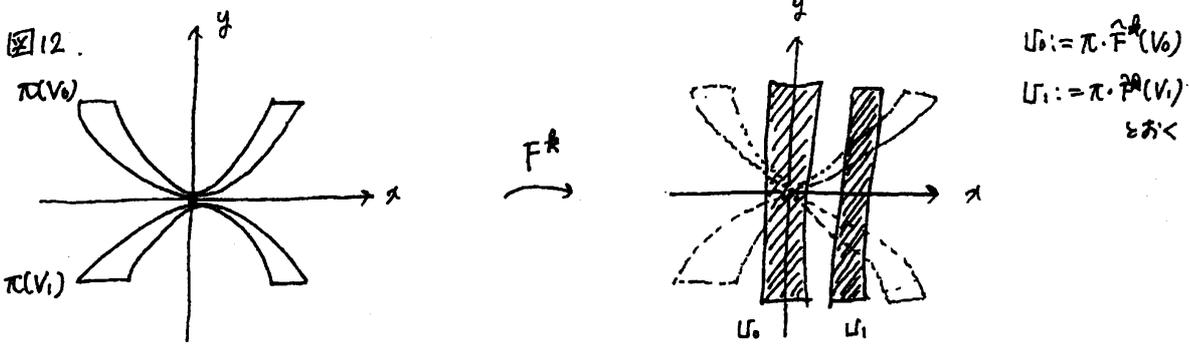


そこで $l := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u=0\} \cap V_1$ に対して $\hat{F}^{m_0}(l)$ と $W_{loc}^s(p_0, \hat{F})$ が $\hat{F}^{m_0}(z_0)$ で横断的に交わっていると仮定します. つまり $T_{\hat{F}^{m_0}(z_0)} \mathbb{R}^2 = T_{\hat{F}^{m_0}(z_0)} \hat{F}^{m_0}(l) \oplus T_{\hat{F}^{m_0}(z_0)} W_{loc}^s(p_0, \hat{F})$ が成り立つとします. 二点 λ -lemma ([Kokubu] 定理 4.5.1 を参照) より, 十分な回数, \hat{F} の反復合成を行えば 図11の如くなるとはわかってきます.

図11.



$\pi(u, v) = (u, uv)$ (つまり) uv をプロダクトすると図12のようになります。



これを逆写像 G^k の対応で見ると図13のようになります。

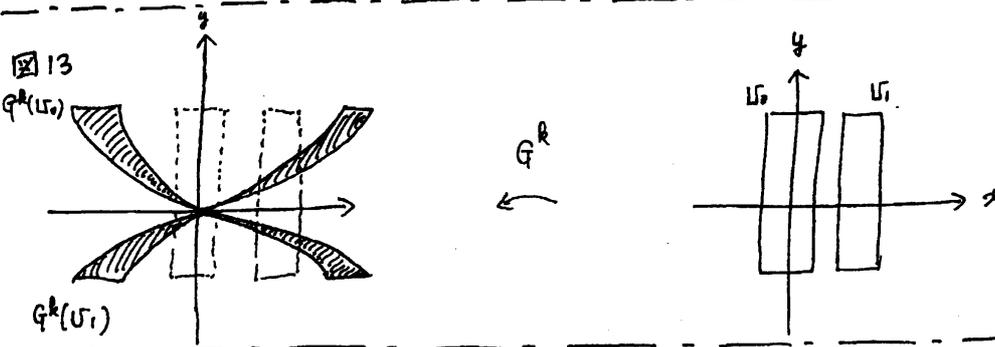
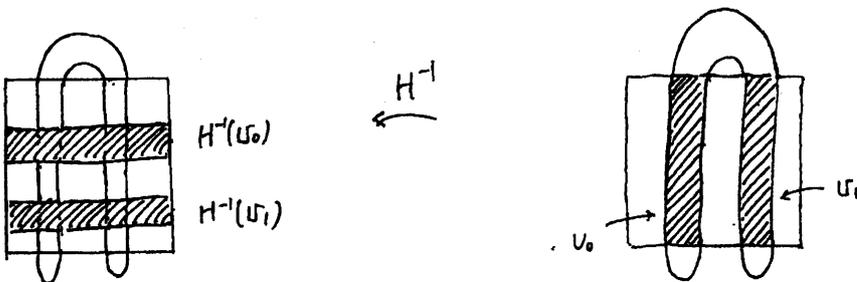


図14と比較すれば G^k は通常の馬蹄形写像を y 軸方向に伸ばしたものに似ていることがわかります。



通常の馬蹄形写依の不変集合より退化する部分集合(不変点, $(0,0)$ とその逆依.)
を除くことで主定理の主張が得られよう。

参考文献

- [Aoki] 青木統夫, 「力学系・カオス」, 共立出版株式会社, 1996.
- [Kokubu] 國府寛司, 「力学系の基礎」, 朝倉書店, 2000.
- [Morosawa] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, (1999)
- [Shinohara] T. Shinohara, Local structure of Fatou mapping at an indeterminate point with homoclinic points, 数理解析研究所講究録 1269 (2002), 48-62.
- [Yamagishi] Y. Yamagishi, Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point, *Non linearity*, 14 (2001), 113-120.
- [Ushiki] 宇敷重広, 谷口和彦, 須川敏幸, 諸澤俊介, 実倉光広, 「複素力学の世界」
数学セブ十一 2003年3月号, 日本評論社.