数理解析研究所講究録 1314 巻 2003 年 80-89

構造関数と CR 同値問題

林本　厚志 (HAYASHIMOTO ATSUSHI)

長野工業高等専門学校 (Nagano National College of Technology)

§1 CR 同値問題の歴史

$(M,p),(N,q)$ を点 p,q の近傍で定義された $\mathbb{C}^n$ の CR 部分多様体の芽とする. これら 2 つが局所的に CR 同値であるとは, 点 p の近傍で定義された双正則写像 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ で $f(p)=q$ かつ $f|_M(M) \subset N$ を満たすものが存在するときにいう. 局所的 CR 同値問題とはこのような双正則写像が存在する為の必要十分条件を求める問題である.

CR 同値問題は E.Cartan に始まる. Cartan は 2 つの実 3 次元解析的超曲面が擬共形同値である為の条件を求めた. CR 同値問題の歴史は, この結果を拡張することを目指してきた. 方法は 2 つあり, 1 つは多様体の定義方程式の正規形 (normal form) を求めるもの, もう 1 つは, 多様体上に, ある主ファイバー束を作り, そこで定義された 1 形式で CR 不変なものを求める, というものである.

田中昇氏は, 一般の次元の超曲面に対して, その上のある主ファイバー束上に Cartan 接続と呼ばれる 1 形式を定義することで同値問題を解決したが, 発表が遅れて同じ手法で問題を解いた Chern–Moser の論文 [3] が先に発表された. その後田中氏 [9] はその結果を更に発展させて, 強正規 (strongly regular) CR 多様体は絶対平行性を持つ, という結果を 76 年に得た. その後 CR 同値問題は大きな発展はなかったが, 最近になって少し動きがあった.

余次元が高い場合には, Ezhov, Isaev, Schmalz[6] により, $\mathbb{C}^4$ 内の余次元 2 の楕円的 CR 多様体や双曲的 CR 多様体に対する同値問題が考えられた.

レビ形式が退化する場合には Ebenfelt の結果がある. Baouendi, Huang, Rothschild[2] によって CR 写像の滑らかさの問題に関連して導入された概念で, 有限的非退化 (finitely nondegenerate) という概念がある. これはレビ形式が退化するときに, その退化の度合いを自然数 l を使って表すもので, l が有限のときには l–非退化という. $l=1$ の時はレビ形式非退化の場合に相当し, l の値が大きくなるにつれてレビ形式の退化の度合いが激しくなる. Ebenfelt[4] は 2–非退化な実 5 次元実解析的超曲面に対して, レビ形式の固有値によって, 定義方程式の正規形を 8 通りに分類した. さらに最近 [5] により, 階数 1 のレビ一様 (Levi uniform of rank 1) で 2–非退化な実 5 次元実解析的超曲面上に, ある主束を定義し CR 不変な 1 形式で主束の絶対平行性を定義するものを構成した. 「階数 1 のレビ一様な点」というのは, レビ形式が退化し, その階数がその点の近傍で 1 であるような点のことである. CR 幾何学についての一般的な用語などは [1] に詳しい. 本文では $\sum_{j=1}^n a_j b^j$ を $a_j b^j$ と書くなど, 和の記号を省略する.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

§2 微分幾何学からの準備

先の節のように, 最近になってレビ形式が退化した場合や, 余次元が高い場合の同値問題が考えられてきているが, それらの場合の解決の一手法として, このノートでは, 微分幾何学的な視点から CR 同値問題を考えてみる. CR 同値問題は $G-$ 構造の同値問題の一例と考えることができるが, $G-$ 構造の同値問題に関しては微分幾何学では多くの結果がある. この方面は [7], [8] に詳しい. ここでは G–構造の構造関数を使って同値問題を考える. 基本になるのは次の定理である.

定理 1. B_G^1 と B_G^2 をそれぞれ M_1 と M_2 上の $G-$ 構造, c_1 と c_2 をそれぞれ B_G^1 と B_G^2 の構造関数とする. $\phi: M_1 \to M_2$ が同型ならば,

$$c_2 \circ \phi_* = c_1$$

が成り立つ.

構造関数とはスペンサー作用素を使って, 次のようにして定義されるものである. M を d 次元可微分多様体とし, $x \in M$ での接空間と d 次元ベクトル空間 V を同一視する. $\mathfrak{g}$ を G のリー代数とすると $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Hom}(V, V)$ である. M 上の枠束に定義された標準的 1 形式を B_G に制限した 1 形式 ω は, $p \in B_G$ での水平成分 H と V との間の同型を与えるが, その逆写像を $f_H: V \to H$ とする.

$$\partial: \mathfrak{g} \otimes V^* \ni S \to \partial S \in V \otimes (V^* \wedge V^*)$$

を $u \wedge v \in V \wedge V$ に対して $\partial S(u \wedge v) = (Su)v - (Sv)u$ により定義する. この作用素 ∂ をスペンサー作用素という. $u \wedge v \in V \wedge V$ に対して

$$c(p, H)(u \wedge v) = d\omega(f_H(u), f_H(v))$$

と定義すると, $p \in B_G$ での別の水平成分 H' に対して $c(p, H) - c(p, H') \in \partial(\mathfrak{g} \otimes V^*)$ であるから

$$c: B_G \to V \otimes (V^* \wedge V^*)/\partial(\mathfrak{g} \otimes V^*)$$

という関数が定義でき, これを B_G の構造関数という. また $V \otimes (V^* \wedge V^*)/\partial(\mathfrak{g} \otimes V^*)$ を $(0, 2)$ 型スペンサーコホモロジーという.

注意.

(1) $G = \{e\}$ で B_G がリー群なら構造関数は構造定数に一致する.
(2) 概複素構造に対しては, それが複素構造であることと $c \equiv 0$ であることは同値である.
(3) B_G が可積分なら $c \equiv 0$ である. よって一般には定理 1 の逆は成り立たない.
(4) CR 構造に対しては, 可積分性と $c \equiv 0$ は同値である.

$G-$ 構造の延長 (prolongation) を行うと, 次の定理が出る.

定理 2. k を十分大きい自然数, B_G^1 と B_G^2 をそれぞれ M_1 と M_2 上の $G-$ 構造とする. B_G^1, B_G^2 を k 回延長した $G-$ 構造の構造関数 $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}$ が定数になったとする. このとき B_G^1 と B_G^2 が同値である必要十分条件は $c_1^{(k)} = c_2^{(k)}$ である.

この定理について注意を与える. 先ず k の取り方について. リー群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ が包含的なら $k = 0$ とする. 包含的でないなら $\mathfrak{g}$ の延長を行う.

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \{T \in \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}) : u, v \in V \text{ に対して } (Tu)v = (Tv)u\}$$

とおき帰納的に

$$\mathfrak{g}^{(l)} = (\mathfrak{g}^{(l-1)})^{(1)}$$

と定義して $\mathfrak{g}^{(l)}$ を $\mathfrak{g}$ の l 回の延長という．十分大きい l に対して $\mathfrak{g}^{(l)}$ は包含的になることが知られているが, k をそうなる最小の l より大きい値にとる．

定理 2 について, B_G^1 と B_G^2 が同値であるというのは C^∞ 同型の意味で同値である．よって $c_1^{(k)} = c_2^{(k)}$ であっても, CR の意味で同値とは限らない．先の注意 (4) のように CR 構造に対しては, 可積分性と $c \equiv 0$ は同値であるから定理 2 では可積分 CR 構造を分類することはできない．よってこのノートでは定理 1 を中心に考える．

§3 構造関数の計算例

定理 1 について, 構造関数を求めるには非常に長い計算が必要になるが, その計算の仕方は一通りなのでやればできる．実際に Ebenfelt の論文 [5] で扱っている CR 多様体のモデルである

$$M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : (\mathrm{Re} z_1)^2 + (\mathrm{Re} z_2)^2 - (\mathrm{Re} z_3)^2 = 0\}$$

という超曲面の $\mathrm{Re}z_1\mathrm{Re}z_2\mathrm{Re}z_3 \neq 0$ なる点の近傍の構造関数を計算する．

$z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$ と書く．先ず M の接空間の基底として

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{\partial}{\partial y_3}, \\
L_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2x_2}\left(-ix_1\frac{\partial}{\partial y_3} + \sqrt{x_1^2+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1} - i\sqrt{x_1^2+x_2^2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \\
L_2 &= \frac{x_1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial y_1}\right) + \frac{x_2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial y_2}\right) - i\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}\frac{\partial}{\partial y_3}, \\
\overline{L}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2x_2}\left(ix_1\frac{\partial}{\partial y_3} + \sqrt{x_1^2+x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + i\sqrt{x_1^2+x_2^2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \\
\overline{L}_2 &= \frac{x_1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial y_1}\right) + \frac{x_2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right) + i\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}\frac{\partial}{\partial y_3},
\end{aligned}$$

をとる．Ebenfelt の論文に従って構造群 G を

$$G = \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ \overline{v} & 0 & u \end{pmatrix}$$

と置く．$e_1, \ldots, e_5$ を $\mathbb{R}^5$ の標準的な基底とするとき

$$\begin{aligned}
< u^2L|\omega > &= e_1 \\
< vL + uL_1|\omega > &= e_2 \\
< \overline{v}L + u\overline{L}_1|\omega > &= e_3 \\
< L_2|\omega > &= e_4 \\
< \overline{L}_2|\omega > &= e_5
\end{aligned}$$

となる $\omega=(\omega^1,\ldots,\omega^5)$ を求めると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\omega^1 =& \frac{v+\overline{v}}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2u^3}}\{-x_2dx_1+x_1dx_2\}+\frac{i(v-\overline{v})}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2u^3}}\{-x_2dy_1+x_1dy_2\} \\
&+\frac{1}{u^2}\{-x_1dy_1-x_2dy_2\}+\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{u^2}dy_3, \\
\omega^2 =& \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2u}}\{x_2dx_1-x_1dx_2\}+\frac{i}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2u}}\{x_2dy_1-x_1dy_2\}, \\
\omega^3 =& \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2u}}\{x_2dx_1-x_1dx_2\}+\frac{i}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2u}}\{-x_2dy_1+x_1dy_2\}, \\
\omega^4 =& \frac{1}{x_2}dx_2+\frac{i}{x_2}dy_2, \\
\omega^5 =& \frac{1}{x_2}dx_2-\frac{i}{x_2}dy_2.
\end{aligned}
$$

モーレーカルタン形式と呼ばれる, $\mathfrak{g}$ に値を持つ左不変な微分形式が存在する. それは $a\in G$ に対して $a^{-1}da$ のように計算される. 実際

$$
a=\begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ \overline{v} & 0 & u \end{pmatrix}
$$

と置いて

$$
a^{-1}da=\begin{pmatrix} \frac{2}{u}du & 0 & 0 \\ -\frac{2v}{u^2}du+\frac{1}{u}dv & \frac{1}{u}du & 0 \\ -\frac{2\overline{v}}{u^2}du+\frac{1}{u}d\overline{v} & 0 & \frac{1}{u}du \end{pmatrix}
$$

と計算される. よってモーレーカルタン形式の基底として

$$
\Pi^1=\frac{1}{u}du \quad \Pi^2=-\frac{2v}{u^2}du+\frac{1}{u}dv, \quad \Pi^3=-\frac{2\overline{v}}{u^2}du+\frac{1}{u}d\overline{v}
$$

をとることが出来る. このとり方は $\omega^1,\ldots,\omega^5$ の線形和の分だけの自由度, つまり d_k^i を B_G 上の任意の関数として Π^i は $\Pi^i+d_k^i\omega^k$ のように置くことも出来る.

次に $d\omega^1,\ldots,d\omega^5$ を $\omega^1,\ldots,\omega^5,\Pi^1,\ldots,\Pi^3$ で表すことを考える. 一般に

$$
d\omega^i=c_{j,k}^i\omega^j\wedge\omega^k+a_{l,m}^i\omega^l\wedge\Pi^m
$$

と書いたとき, Π^m が $\Pi^m+d_k^m\omega^k$ に変わると $c_{j,k}^i$ は $c_{j,k}^i+a_{j,l}^id_k^l$ に変わる. この性質を使い $c_{j,k}^i$ を M 上の関数に直すことが出来る. この M 上の関数の族が構造関数

$$d\omega^1 = \frac{x_1 u}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}x_2}\omega^2\wedge\omega^1 + \frac{x_1 u}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}x_2}\omega^3\wedge\omega^1 + \frac{1}{2}\omega^4\wedge\omega^1$$
$$+\frac{1}{2}\omega^5\wedge\omega^1 + \left(\frac{v}{2u^2}-\frac{\overline{v}}{2u^2}\right)\omega^2\wedge\omega^5$$
$$+\left(\frac{2x_1 v}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}x_2 u}-\frac{2x_1\overline{v}}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}x_2 u}-i\right)\omega^2\wedge\omega^3$$
$$+\left(-\frac{v}{2u^2}+\frac{\overline{v}}{2u^2}\right)\omega^3\wedge\omega^4 + 2\omega^1\wedge\Pi^1 - \frac{v}{u^2}\omega^2\wedge\Pi^1$$
$$+\frac{1}{u}\Pi^2\wedge\omega^2 + \frac{1}{u}\Pi^3\wedge\omega^3 - \frac{\overline{v}}{u^2}\omega^3\wedge\Pi^1,$$

$$\begin{aligned}
d\omega^2 &= -\frac{1}{u}du\wedge\wedge\omega^2 - \frac{1}{2}\left(\omega^2\wedge\omega^4+\omega^3\wedge\omega^4\right) + \frac{x_1 u}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}x_2}\omega^2\wedge\omega^3,\\
d\omega^3 &= -\frac{1}{u}du\wedge\omega^3 - \frac{1}{2}\left(\omega^2\wedge\omega^5+\omega^3\wedge\omega^5\right) - \frac{x_1 u}{\sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}x_2}\omega^2\wedge\omega^3,\\
d\omega^4 &= \frac{1}{2}\omega^4\wedge\omega^5,\\
d\omega^5 &= -\frac{1}{2}\omega^4\wedge\omega^5.
\end{aligned}$$

よって $\omega^j\omega^k$ の係数の自由度を考えて $c^i_{j,k}$ を M 上の関数にすると

$$c^1_{1,4}=\frac{1}{2},\quad c^1_{1,5}=-\frac{1}{2},\quad c^1_{2,3}=-i,\quad c^2_{2,4}=c^2_{3,4}=-\frac{1}{2},\quad c^3_{2,4}=c^3_{3,4}=-\frac{1}{2},$$
$$c^4_{4,5}=\frac{1}{2},\quad c^5_{4,5}=-\frac{1}{2}$$

を得る. これが B_G の構造関数である.

§4 構造関数を使った同値問題の解決の一例

この節では, 定理 1 を使って次の簡単な性質を導く.

性質. $M_n=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2:\mathrm{Im}w-|z|^{2n}=0\}$ と置く. M_n と M_m が CR 同値なら $n=m$ である.

これは自明なことであるが実際に構造関数を使って解けることを示す. M_n について計算する.

$$L_1=\frac{\partial}{\partial x_3},\quad L_2=\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+nz^{n-1}\overline{z}^n\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$L_3=-\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+nz^n\overline{z}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

と置くと, L_2 と L_3 とが M_n の CR ベクトル場になる. 前節と同じく, $T_x(M_n)$ と V とを同一視する. 先ず

$$G = \begin{pmatrix} u_1^1 & 0 & 0 \\ u_2^1 & u_2^2 & 0 \\ u_3^1 & 0 & u_3^3 \end{pmatrix}$$

に対して $B_G(M_n)$ の構造関数を計算する.

$$< u_1^1 L_1 | \omega >= e_1$$
$$< u_2^1 L_1 + u_2^2 L_2 | \omega >= e_2$$
$$< u_3^1 L_1 + u_3^3 L_3 | \omega >= e_3$$

となる 1 型式の組 $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, $\quad \omega^j = a_1^j dx_1 + a_2^j dx_2 + a_3^j dx_3$ を求めると,

$$\omega^1 = \frac{\left(u_3^1 + nz^n \overline{z}^{n-1} u_3^3\right) i}{u_1^1 u_3^3} dx_1 + \frac{u_3^1 + nz^n \overline{z}^{n-1} u_3^3}{u_1^1 u_3^3} dx_2 + \frac{1}{u_1^1} dx_3$$
$$\omega^2 = \frac{i}{u_2^2} dx_1 - \frac{1}{u_2^2} dx_2$$
$$\omega^3 = -\frac{i}{u_3^3} dx_1 - \frac{1}{u_3^3} dx_2$$

となる. $d\omega^1$ の $\omega^j \wedge \omega^k$ の係数を計算することにより $c_{j,k}^1$ が求まる. 実際に計算するとすべての構造関数が零になることが分かる. そこで $B_G(M_n)$ や G を延長して $B_{G^{(1)}}(B_G(M_n))$ の同値問題を考える. $G^{(1)}$ は G の 1 回の延長を表す. 次の定理を使う.

定理. *2* つの G–構造 B_G^1, B_G^2 が局所的に同値である必要十分条件は B_G^1 と B_G^2 上の $G^{(1)}$–構造が局所的に同値になることである.

よって 2 つの多様体 M と N が同値であることは, $B_G(M), B_G(N)$ 上の $G^{(1)}$–構造 $B_{G^{(1)}}(B_G(M))$ と $B_{G^{(1)}}(B_G(N))$ が同値であるための必要十分条件になる.

先ず $B_G(M)$ の接ベクトル場の基底を求めるために G のモーレーカルタン形式を計算する. 前節の式から

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_4}{x_4} & 0 & 0 \\ -\dfrac{x_5 dx_4}{x_4 x_7} + \dfrac{dx_5}{x_7} & \dfrac{dx_7}{x_7} & 0 \\ -\dfrac{x_6 dx_4}{x_4 x_8} + \dfrac{dx_6}{x_8} & 0 & \dfrac{dx_8}{x_8} \end{pmatrix}$$

と計算されるので, モーレーカルタン形式の基底としてこの行列の 5 つの成分をとることができ, それの双対なベクトル場を求めて

$$\Pi_1 = x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_5 \frac{\partial}{\partial x_5} + x_6 \frac{\partial}{\partial x_6}, \quad \Pi_2 = x_7 \frac{\partial}{\partial x_5}, \quad \Pi_3 = x_8 \frac{\partial}{\partial x_6},$$
$$\Pi_4 = x_7 \frac{\partial}{\partial x_7}, \quad \Pi_5 = x_8 \frac{\partial}{\partial x_8}$$

と置くと, $T_{(x,p)}B_G(M)$ の基底は $L_1, L_2, L_3, \Pi_1, \ldots, \Pi_5$ である.
G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の 1 回の延長 $\mathfrak{g}^{(1)}$ を定義に従って求めると

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} t^1_{11} & 0 & 0 \\ t^1_{21} & t^2_{21} & 0 \\ t^1_{31} & 0 & t^3_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t^2_{22} & t^2_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t^1_{33} & 0 & t^3_{33} \end{pmatrix} \right) \right\}$$

である.
次に G の 1 回の延長 $G^{(1)}$ を求める. $T \in \mathfrak{g}^{(1)}$ に対して $G^{(1)}$ は $V + \mathfrak{g}$ 上の線形写像 a_T で

$$\begin{aligned} a_T(A) &= A, \quad A \in \mathfrak{g}, \\ a_T(v) &= v + Tv, \quad v \in V \end{aligned}$$

となるものの集合である.

$$\begin{aligned} < a_T(L_1)|\omega^1 > &= e_1, \\ < a_T(L_2)|\omega^2 > &= e_2, \\ < a_T(L_3)|\omega^3 > &= e_3, \\ < a_T(\Pi_1)|\omega^4 > &= e_4, \\ &\vdots \\ < a_T(\Pi_5)|\omega^8 > &= e_8 \end{aligned}$$

となる $\omega^j = a^j_1 dx_1 + \cdots + a^j_8 dx_8$, $j = 1, \ldots, 8$ を求めたい. 定義により

$$TL_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t^3_{31} & 0 & t^3_{33} \end{pmatrix},$$

$$TL_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}t^1_{11} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2i}t^1_{21} - \frac{1}{2}t^2_{21} & \frac{1}{2i}t^2_{21} - \frac{1}{2}t^2_{22} & 0 \\ \frac{1}{2i}t^1_{31} + nz^{n-1}\bar{z}^n t^3_{31} & 0 & \frac{1}{2i}t^3_{31} + nz^{n-1}\bar{z}^n t^3_{33} \end{pmatrix}$$

$$TL_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2i}t^1_{11} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2i}t^1_{21} - \frac{1}{2}t^2_{21} & -\frac{1}{2i}t^2_{21} - \frac{1}{2}t^2_{22} & 0 \\ -\frac{1}{2i}t^1_{31} + n\bar{z}^{n-1}z^n t^3_{31} & 0 & -\frac{1}{2i}t^3_{31} + n\bar{z}^{n-1}z^n t^3_{33} \end{pmatrix}$$

であるから, 上の a_T に関する式を具体的に書き下すと,

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_8 \\ \vdots & & \vdots \\ a^8_1 & \ldots & a^8_8 \end{pmatrix} \Omega = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

と行列表示される.

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
1 & nz^{n-1}\overline{z}^{n} & nz^{n}\overline{z}^{n-1} & 0 \\
0 & -\frac{i}{2}t^1_{11}x_4 & \frac{i}{2}t^1_{11}x_4 & x_4
\end{pmatrix}
$$

$$
B = \begin{pmatrix}
0 & -\frac{it^1_{11}}{2}x_5 + (-\frac{it^1_{21}}{2} - \frac{t^2_{21}}{2})x_7 & \frac{it^1_{11}}{2}x_5 + (\frac{it^1_{21}}{2} - \frac{t^2_{21}}{2})x_7 & x_5 \\
t^3_{31}x_8 & -\frac{it^1_{11}}{2}x_6 - (\frac{it^1_{31}}{2} - nz^{n-1}\overline{z}^{n}t^3_{31})x_8 & \frac{it^1_{11}}{2}x_6 + (\frac{it^1_{31}}{2} + n\overline{z}^{n-1}z^{n}t^3_{31})x_8 & x_6 \\
0 & (-\frac{it^1_{21}}{2} - \frac{t^2_{22}}{2})x_7 & (\frac{it^2_{21}}{2} - \frac{t^2_{22}}{2})x_7 & 0 \\
t^3_{33}x_8 & (-\frac{it^1_{31}}{2} + nz^{n-1}\overline{z}^{n}t^3_{33})x_8 & (\frac{it^1_{31}}{2} + n\overline{z}^{n-1}z^{n}t^3_{33})x_8 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
C = \begin{pmatrix}
x_7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_8
\end{pmatrix}
$$

である. よって ω^j の係数を求めるには, Ω の逆行列を計算すればよいが, それは A, B, C を使って

$$
\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1}BC^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}
$$

と書ける. 本来ならこの逆行列を求めなければいけないが, 今の場合にはその成分の一部分を求めればよい. それは次の理由による. 構造関数を求めるには ω^j に $B_G(M_n)$ 上のベクトル場のリーブラケットを作用させる必要がある. 実際そのリーブラケットを計算すると,

$$
[L_2, L_3] = -2in^2|z|^{2(n-1)}\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad [\Pi_1, \Pi_2] = [\Pi_2, \Pi_4] = -x_7\frac{\partial}{\partial x_5}
$$
$$
[\Pi_1, \Pi_3] = [\Pi_3, \Pi_5] = -x_8\frac{\partial}{\partial x_6}, \quad \text{その他は } 0
$$

であるから ω^j の dx_3, dx_5, dx_6 の係数が分かればよい. それは Ω の第 3, 5, 6 列に対応し, よってそれらのみ計算すれば十分である. 第 3, 5, 6 列はそれぞれ

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{x_7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{x_8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

である．但し $\alpha_1,\dots,\alpha_5$ は t^i_{jk} の多項式で，t^i_{jk} に関して定数項は存在しない．よって

$$d\omega^1 = dx_3 + \dots,\quad d\omega^5 = \alpha_1 dx_3 + \frac{1}{x_7}dx_5 + \dots,$$
$$d\omega^6 = \alpha_2 dx_3 + \frac{1}{x_8}dx_6 + \dots,\quad d\omega^7 = \alpha_3 dx_3 + \dots,\quad d\omega^8 = \alpha_4 dx_3 + \dots$$

であるから，前節の構造関数の自由度を考慮に入れて $B_G(M_n)$ 上の関数とみなすと，構造関数は

$$c^1_{23} = 2in^2|z|^{2(n-1)},\quad c^5_{45} = c^5_{57} = c^6_{46} = c^6_{68} = 1,\quad \text{その他は}\ 0$$

となる．

M_n と M_m が実解析的 CR 同値なら C^∞ 同値写像 $f : B_G(M_n) \to B_G(M_m)$ がある．f の成分のうち写像 $M_n \to M_m$ の部分を f_1 と表す．すると定理 1 から M_n 上

$$2in^2|z|^{2(n-1)} = 2im^2|f_1|^{2(m-1)}$$

が成り立つ．$n < m$ と仮定する．ここで f_1 が CR 写像であることから，これの両辺に n 回 L_2 を作用させると $0 = m^2\overline{f_1}^{m-1}L_2^n f_1^{m-1}$，つまり $L_2^n f_1^{m-1} = 0$ を得る．f_1 を展開したときに，x_1, x_2, x_3 の次数の内，最小のものを l とすると f_1^{m-1} 内のそれは $l(m-1)$ である．$L_2^n f_1^{m-1} = 0$ から $n > l(m-1)$ が分かる．よって $l(m-1) < n < m$，つまり $m \le \dfrac{l}{l-1}(< 1)$ となり矛盾．よって $n \ge m$ である．今考えた写像の逆写像に対して同様の事を行うことにより $m \ge n$ を得る．よって，あわせて $n = m$ となる．これは元々は CR 同値であるための必要条件でしかないが， 十分条件にもなっている．

§5 今後しなければいけないこと

(1) 定理 1 について，CR 同値か否かを判定するには少なくとも $c_2 \circ \phi_* = c_1$ となる写像 ϕ_* を見つけなければいけない．しかしそのような写像が存在するかどうかを調べるのは一般に非常に難しい．簡単な場合はそれらが定数のときのみである．それは定理 2 の内容に移っていくのであるが，それゆえ，定理 2 の CR 版があると便利である．CR 構造の場合に $c_1^{(k)} = c_2^{(k)}$ の条件に何を付け加えたら 2 つの CR 構造が同値になるかを調べた．

(2) 定理 2 について，例えば Ebenfelt の例の変形として

$$M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : (\mathrm{Re}z_1)^{2n} + (\mathrm{Re}z_2)^{2n} - (\mathrm{Re}z_3)^2 = 0\}$$

という超曲面を $\mathrm{Re}x_1\mathrm{Re}x_2\mathrm{Re}x_3 \neq 0$ なる点の近傍で考える．

これは最早「階数 1 のレビ一様」ではない．構造群 G を

$$G = \begin{pmatrix} u^1_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u^1_2 & u^2_2 & 0 & u^4_2 & 0 \\ u^1_3 & 0 & u^3_3 & 0 & u^5_3 \\ u^1_4 & u^2_4 & 0 & u^4_4 & 0 \\ u^1_5 & 0 & u^3_5 & 0 & u^5_5 \end{pmatrix}$$

として, この G–構造の構造関数を計算する. 計算はここでは省略するが非常に長い計算のあと, 構造関数はすべて 0 になることが分かる. このときには G を延長して $G^{(1)}$ を作り, B_G を底空間に持つ $G^{(1)}$–構造 $B_{G^{(1)}}(B_G)$ の同値問題を考えることになる. しかしこれも長い計算によって $G^{(1)}$ を実際に求めると, それは 23 次元, B_G が 18 次元であるから, 都合 41 次元になる. これの構造関数を計算することは不可能ではないが, 実際には無理がある. §4 のように実際には計算が省略できるところもあるが, 多様体の次元が高くなると省略できたとしても膨大な計算が出てくる. よって定理 2 をそのまま具体例に当てはめることは, ほとんど不可能である. 群 $G^{(1)}$ の部分群 H が標準的にとれて $B_{G^{(1)}}(B_G)$ の同値問題が $B_H(B_G)$ の同値問題に帰着できるような H は存在するだろうか.

(3) 実超曲面に対する CR 構造は

$$G = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

により与えられる. ここで $B \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n), v \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{R}_{>0}$ である. この場合には G–構造と微分系が一対一に対応するので G–構造の同値は微分系を定義する微分形式の正規形を求めることと同じである. これはパフ問題の解答として Darboux の定理がある. しかしそれは C^∞ 同型の下での正規形である. よって, もし CR 同型の下で微分形式を分類することができれば超曲面の場合の CR 同値問題が解ける. これの先には余次元が高い場合が待っているが, C^∞ 同型の下では, パフの定理がある.

(4) §2 の注意でも書いたように定理 1 の $c_2 \circ \phi_* = c_1$ という条件は G–構造が同値である為の必要条件にしかすぎない. どういう条件を付け加えたら必要十分条件になるかを知りたい. §4 のような場合には自動的に必要十分条件になっている.

References

1. M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, and L. P. Rothchild, *Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings*, Princeton Univ. Press, 1999.
2. M. S. Baouendi, X. Huang, and L. .P Rothchild, *Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces*, Invent. Math. **125** (1996), 13–36.
3. S. S. Chern and J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.
4. P. Ebenfelt, *Normal forms and biholomorphic equivalence of real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$, Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 311–366.
5. P. Ebenfelt, *Uniformly Levi degenerate CR manifold: the 5–dimensional case*, Duke Math. **110** (2001), 37–80.
6. V. V. Ezhov, A. V. Isaev and G. Schmalz, *Invariants of elliptic and hyperbolic CR–structures of codimension 2*, Internat. J. Math. **10** (1999), 1–52.
7. A. Hujimoto, 幾何学総合報告 *1 G* 構造の理論, 幾何学総合研究班, 1966.
8. S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Chelsea, New York, 1983.
9. N. Tanaka, *On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections*, J. Math. Soc. Japan **2** (1976), 131–190.

〒 381-8550　長野市大字徳間 716

E-mail address: atsushi@ge.nagano-nct.ac.jp