数理解析研究所講究録 1318 巻 2003 年 15-20

整合的ドメインの極限要素集合の次元について
Dimensions of limit-sets of coherent domains

立木秀樹
Hideki Tsuiki
京都大学総合人間学部
Department of Integrated Human Studies, Kyoto University

1 序

著者は，位相空間の代数的ドメインによる表現を考える中で，整合的 (coherent) ω-代数的ドメインの極限 (non-finite) 要素のなす集合 L(D) の次元が，その順序集合としての高さと一致することを示した [Tsu03]。そして，この結果を可算基を持たない一般の整合的代数的ドメインに拡張することは難しそうだと数研の会議の席で述べた。この結果のための主要な命題は，次のものだった。

命題 1 D が整合的 ω-代数的ドメインであり，$x, y \in D$ の時，
1) $x \uparrow y$ であることと，$e \uparrow f$ が 全ての $e \in K(x)$，$f \in K(y)$ で成立することは同値。
2) $d \in K(D)$ とすると，$\uparrow d$ の閉包は $\downarrow\uparrow d$ である。

記号については後述する。これが，可算基の存在を仮定しなくても成り立つかどうかが問題であった。しかし，この結果がより一般に，整合的連続ドメインについて成り立つことを，Birmingham 大学の Martín Escardó 氏に教えて頂いた。それにより，上記の [Tsu03] の結果の整合的代数的ドメインへの拡張も可能となる。

連続ドメインに拡張するというのは，私はあまり考えていなかった。それは，代数的でない連続ドメイン D では明らかに $L(D)$ は無限次元となって，私の目的には，代数的ドメインまでしか拡張が意味をなさないためである。整合性は，連続ドメインにおいて，位相的に定義される性質であるが，代数的ドメインでは，それが，順序的構造の性質として，簡単に定式化される。それで，もし証明できるのなら，代数的ドメインの順序的構造だけを見ながらでも証明できると考えていた。というか，私が整合性にたどり着いたのは，代数的ドメインの次元的な性質を証明するために必要な順序構造の性質としてであり，それがたまたま，Plotkin による 2/3-SFP 定理によって，整合性とし

て知られた位相的な特徴づけと一致していたということで，私の中では，順序構造の性質がまず第一であった。

Escardó 氏に教えて頂いた上記の命題の連続ドメインに対する証明は，Lawson Topology における簡単な位相的考察からでてくる。この位相的な証明を順序集合の具体的な言葉に翻訳できるかは，まだ考えていない。しかし，順序集合的な具体的手続きからの構成が簡単ではない事柄が位相空間論的に簡単に導かれるのは，驚きであった。このことから，ドメイン理論において，位相は，“順序を位相空間としても解釈できる”といった付随的なものではなく，より中心的な考察対象だということが分かる。

本論では，連続ドメイン上の Compactly Saturated Set や Lawson 位相などの概念の紹介も兼ねて，M. Escardó 氏に教えて頂いた上記の結果について紹介し，さらに，それが，整合的連続ドメインの極限要素のなす集合の次元について導く結果について述べる。ドメインの位相的な性質については，[AJ94] などを参照されたい。

2 代数的ドメイン

部分順序集合 $(D \leq)$ であり，最小元 $\perp$ が存在し，全ての有向集合が上限を持つものを，dcpo (directed complete partial order) という。有向集合 A の上限を $\sqcup A$ と書く。dcpo D の中で，$y \leq \sqcup A$ ならば，$x \leq a$ がある $a \in A$ に対してなりたつ時，$x \ll y$ と書いて，x は y を近似するという。x が x を近似するとき，x は有限という。$\downarrow x = \{y \in D \mid y < x\}$ とする。$\Downarrow x = \{y \in D \mid y \ll x\}$ とする。同様に，$\uparrow x$ と $\Uparrow x$ を定義する。$\{x,y\}$ が上界を持つとき，$x \uparrow y$ と書くことにする。

D の有限な要素のなす集合を $K(D)$, D の極限要素 (すなわち，有限でない要素) のなす集合を $L(D)$ と書くことにする。$\downarrow x \cap K(D)$ のことを，$K(x)$ と書き，x の近似のなす集合と呼ぶことにする。D の部分集合 B が，D の任意の元 x に対し，$B \cap \Downarrow x$ が有向集合となり $x = \sqcup(B \cap \Downarrow x)$ を成り立たせるとき，B のことを基底と呼ぶ。$K(D)$ が D の基底になるとき，すなわち，D の全ての元 x に対し，$K(x)$ が有向集合となり，$\sqcup K(x) = x$ が成り立つ時，D を代数的ドメインとよぶ。

それに対し，$K(D)$ は基底にはならないかもしれないが，より大きな集合をとれば基底となるとき，D のことを連続ドメインという。B が基底なら，B より大きな集合は基底となるので，これは，D 全体が基底となることと同値である。それは，言い換えると，D の全ての元 x に対し，$\Downarrow x$ が有向集合となり，$\sqcup \Downarrow x = x$ と同値である。

連続ドメイン D において，任意の $K(D)$ の有限部分集合 A に対し，A の上界のなす集合 $up(A)$ が有限個の極小元をもち（その集合を S とする）任意の $x \in up(A)$ に対し，ある $y \in S$ で $y \leq x$ であるものが存在するとき，

D は性質 M を持つという。これは，SFP (あるいは bifinite) domain の条件の中の最初の 2 つと一致している。後で述べるように，2/3-SFP 定理により，代数的ドメインでは，性質 M と整合性が同値であるため，[Tsu03] では，代数的ドメインでこの性質を持つものを整合的と呼んでいた。

3 上記命題の順序的証明

まず，[Tsu03] において行われた，命題 1 の順序的な証明を考える。

1) x, y をそれぞれ上限とする $K(D)$ の元の上昇鎖 $d_0 = \perp < d_1 < \ldots$, $e_0 = \perp < e_1 < \ldots$ をとる。仮定より，d_i と e_i は上界をもつ。それを，f_i とする。f_i が $f_0 < f_1 < \ldots$ を満たせば，その極限は，x と y の上界となり，目的が達せられるが，一般にそれは成り立たない。そこで，新たに $f_i \leq g_i, e_i \leq g_i$ を満たす上昇鎖 $g_0 < g_1 < \ldots$ であって，g_i より大きな f_j $(j > i)$ の集合 S_i が無限集合となる様なものを帰納的に構成する。$g_0 = \perp$ とする。g_i まで構成されたとする。S_i の元はすべて，$\{g_i, e_{i+1}, f_{i+1}\}$ の上界である。よって，性質 M により，$\{g_i, e_{i+1}, f_{i+1}\}$ の極小上界の集合は有限集合であり，S_i のそれぞれの要素は，この中のどれかの要素よりも大きい。S_i は無限集合より，その有限集合のある要素で，それより大きな S_i の要素が無限個存在するものがある。それを，g_{i+1} とおく。すると，g_{i+1} は条件を満たす。

2) x が $\uparrow d$ の閉包に入っているとはすなわち，x を含む全ての開集合が $\uparrow d$ と交わるということである。それはまた，$K(x)$ の全ての元 e に対して，$\uparrow e$ と $\uparrow d$ が交わること，すなわち，$e \uparrow d$ となることを意味する。よって，(1) より，$e \uparrow x$ と同値であり，これは，言い方を変えれば，$x \in \downarrow \uparrow d$ ということである。

この命題の 2 番を用いて，次の定理が証明される。詳細は [Tsu03] を見られたい。

定理 2 D が整合的 ω-代数的ドメインの時，$L(D)$ の *Scott* 位相による位相空間の次元は，$L(D)$ の順序集合としての高さと等しい。

ここで，位相空間の次元は，small inductive dimension のことである。

系 3 可算な文字集合 Σ に対し，$\perp$ の出現を n 個まで許す無限文字列全体の集合 $\Sigma^{\omega}_{\perp,n}$ の次元は n である。

これから，位相空間の $\Sigma^{\omega}_{\perp,n}$ の中での表現を考えたときに，n より次元の大きな空間は $\Sigma^{\omega}_{\perp,n}$ での表現ができないことがわかる。

4 Compact saturated set と Lawson 位相

この章では，[AJ94] に従い，整合的ドメインについて解説する。証明などは [AJ94, Smy92] などを参照されたい。

連続ドメイン D には，Scott 位相 (σ_D) という位相が入ることはよく知られている。$\Uparrow x$ $(x \in D)$ は開集合であり，これらがこの位相のベースとなっている。この位相を補う概念として，compact saturated set がある。compact saturated set は，Scott 位相によって，コンパクトであり，saturated（近傍の積集合となる）な集合である。連続ドメインにおいて， saturated な集合は上に閉じている $(\uparrow S = S)$ というのと同値であるので，これは，上に閉じたコンパクト集合ということである。compact saturated set に対して，その開近傍全体は， lattice σ_D 上の Scott 開フィルターとなる。さらに，逆もいえる。

定理 4 (Hofmann-Mislove Theorem) D が連続ドメインの時，*compact saturated set* の集合と，*lattice* σ_D 上の *Scott* 開フィルターの集合と一対一の対応がある。

連続ドメイン D で 2 つの compact saturated set の積集合がコンパクトになる（よって，再び compact saturated set となる）時，D を整合的ドメインとよぶ。

命題 5 連続ドメイン D が整合的であることと，全ての *Scott* 開集合 O, U_1, U_2 で $O \ll U_1, O \ll U_2$ なものに対し，$O \ll U_1 \cap U_2$ となることは同値である。

D 上に入る Scott 位相より強い位相として，Lawson 位相がある。それは，Scott 開集合に加えて $D \setminus \uparrow x$ という形の集合も開集合として定義される位相である。Scott open が positive な情報を意味しているとすると，$D \setminus \uparrow x$ は，negative な情報も意味していることになる。特に，Lawson 位相は Hausdorff である。

命題 6 連続ドメイン D が整合的であることと，D 上の *Lawson* 位相がコンパクトであることは同値である。

次章で次の命題を用いる。

命題 7 連続ドメインでは，*Lawson* コンパクトな集合に対し，その *lower set* は *Scott*-閉集合である *([AJ94]* の *Lemma 6.2.20)*。

さらに，次のことがいえる。

定理 8 (Plotkin の 2/3-SFP 定理) 代数的ドメインにおいては，性質 M をもつことと整合的であることは同値である。

5 対応する命題の位相的証明

最初の命題に対応する，連続ドメインに関する命題は以下の様になる。

命題 9 D が整合的連続ドメインの時，
1) $x, y \in D$ に対し，$x \uparrow y$ であることと，$e \uparrow f$ が 全ての $e \ll x$，$f \ll y$ で成立することは同値。
2) $d \in K(D)$ に対し，$\uparrow d$ の閉包は $\downarrow\uparrow d$ である。

(1) の証明 ([Esc98])。compact saturated set $\uparrow x$, $\uparrow y$ を考える。$e \ll x$ に対し，$\Uparrow e$ 全体がベースとして構成するフィルターを F_x とする。$\cap F_x = \uparrow x$ となる。同様にフィルター F_y を定義する。

$$H = \{U \cap V \mid U \in F_x, V \in F_y\}.$$

とおく。H は，filter となる。さらに，$U_1 \ll U_2 \in F_x$, $V_1 \ll V_2 \in F_y$ に対し，$U_1 \cap V_1 \ll U_2$, $U_1 \cap V_1 \ll V_2$ であることから，D が整合的であることより，$U_1 \cap V_1 \ll U_2 \cap V_2 \in F_y$ が成り立つ。これはすなわち，このフィルターが Scott 開フィルターであることを意味している。よって，Hofmann-Mislove Theorem より，$\cap H$ は compact saturated set となる。このフィルタは開集合全体のなすフィルターではないので，$\cap H$ は空集合ではない。そして，その要素はどれも x および y よりも大きい。

(2) (1) を用いずに，直接示す。$\uparrow d$ は, D の retract であり，コンパクトの連続像より Lawson コンパクトである。そして，命題7 により，その lower set は Scott-閉集合である。

6 次元の結果の拡張

さて，定理 2 について考える。命題 9 (2) の性質を満たす代数的ドメインのことを，ここでは，up-down-閉包なドメインと呼ぶことにする。up-down-閉包なドメインが全て定理 2 の結果を満たす訳ではない。次元は，それぞれの開基の要素の境界の次元が n-1 ということで帰納的に示されるので，境界がまた up-down-閉包なドメインとなる必要があるのだが，D が up-down-閉包なドメインであっても，それぞれの $\uparrow d, d \in K(D)$ の境界が up-down-閉包なドメインとなる保証はない（反例もつくれる)。しかし，整合的ドメインにおいて $\uparrow d$ の境界をとっても整合的ドメインとなるので，整合的ドメインにおいては，それぞれの $\uparrow d$ の境界をとっても up-down-閉包なドメインとなることが言える。よって，定理 2 が整合的代数的ドメイン一般でいえる。

定理 10 D が整合的代数的ドメインの時，$L(D)$ の *Scott* 位相による位相空間の次元は，$L(D)$ の順序集合としての高さと等しい。

代数的ドメインでない連続ドメインにおいては，$L(D)$ の順序集合としての高さは明らかに無限になり，その場合，$L(D)$ の次元も無限となるので，この結果は，D が代数的ドメインの時にも成り立つ。

系 11 任意濃度の文字集合 Σ に対しても，$\perp$の出現を n 個まで許す無限文字列全体の集合 $\Sigma^{\omega}_{\perp,n}$ の次元は n である。

謝辞 Alex Shimpson 氏，および，Martín Escardó 氏に，有益な議論ができたこと，様々なことを教えて頂いたことを感謝します。

References

[AJ94] Samson Abramsky and Achim Jung. Domain theory. In S. Abramsky, D. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science Volume 3*, pages 1–168. Oxford University Press, 1994.

[Esc98] Martin H. Escardó. Properly injective spaces and function spaces. *Topology and Its Applications*, 89(1–2):75–120, 1998.

[Smy92] M. B. Smyth. Topology. In S. Abramsky, D. M. Gabbay, and T.S.E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science, volume 1*, pages 641–761. Clarendon Press, Oxford, 1992.

[Tsu03] Hideki Tsuiki. Compact metric spaces as minimal-limit sets in domains of bottomed sequences. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2003. to appear.