数理解析研究所講究録 1319 巻 2003 年 198-201

Mordell-Tornheim型の多重ゼータ関数について

名古屋大学・多元数理　松本 耕二

Kohji Matsumoto, Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

表題にいう Mordell-Tornheim型多重ゼータ関数とは，多重級数

$$\zeta_{MT,r}(s_1,\cdots,s_r;s_{r+1})=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{-s_{r+1}} \qquad (1)$$

で定義される，複素多変数関数のことである。この級数(1)の $r=2$ の場合が L. Tornheim (1950) が扱ったものであり，また L. J. Mordell (1958) も関連する研究を行なっているので上記の名で呼んだのである。また，類似した多重級数

$$\zeta_{AV,r}(s_1,\cdots,s_r;s_{r+1})=\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty}m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{-s_{r+1}} \qquad (2)$$

を，$r=2$ で $s_{r+1}=1$ の場合を調べた T. M. Apostol - T. H. Vu (1984) にちなみ，Apostol-Vu型多重ゼータ関数と呼ぶことにする。これらは $\mathrm{Re}\, s_j$ $(1\le j\le r+1)$ が十分大きければ絶対収束するが，講演で述べたのは (1), (2) が共に $\mathbb{C}^{r+1}$ 全体に有理型に解析接続できる，という結果であった。方法は Mellin-Barnes の積分公

式によるものである。筆者は先に，Euler-Zagier型多重級数

$$\zeta_{EZ,r}(s_1,\cdots,s_r)=\sum\cdots\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty} m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r} \tag{3}$$

の$\mathbb{C}^r$への解析接続をMellin-Barnesの式を用いて示したが，同様の方法が(1), (2)に対しても適用可能というわけである。

歴史：まず$\zeta_{MT,1}$は$\zeta_{EZ,2}$に他ならず，その解析接続は昔から知られていた。$\zeta_{EZ,2}$のMellin-Barnes積分による接続は桂田(1997, 98)の論文にある。次に$\zeta_{MT,2}$の接続は，1999年，秋山および江上によって（それぞれ異なる方法で）示された。筆者は彼らの成功を知った後，Mellin-Barnes積分の方法でも$\zeta_{MT,2}$，および$\zeta_{AV,2}$の接続が示せることに気づき，その証明をIllinois大学でのMillennial Conference on Number Theoryの報告集("Number Theory for the Millennium", A K Peters, 2002）に書いた。

上述した，一般のrに対する(1), (2)の接続の証明は，この報告集に書いた証明の一般化であるが，(1)の場合と(2)の場合とで細部は相当異なる。詳細は筆者のプレプリント"On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions"に譲る。

今日では，少くとも$\zeta_{EZ,r}$についてはその解析接続の方法は何通りも知られており，そのうちの多くが$\zeta_{MT,r}$や$\zeta_{AV,r}$にも適用可能であろう。それらの中でMellin-Barnesによる方法のひとつの特色は，帰納的構造が浮かび上がることである。

実際 $\zeta_{MT,r}$ は，Mellin-Barnes 公式を用いれば，$\zeta_{MT,r-1}$ を含む複素積分で表示できる。一方 $\zeta_{AV,r}$ は，$\zeta_{AV,r-1}$ とは直接には結びつかない。こちらに関しては補助的に

$$\varphi_{j,r}(s_1,\cdots,s_j;s_{j+1},\cdots,s_r;s_{r+1})=\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty}\cdots\sum m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+\cdots+m_j)^{-s_{r+1}} \tag{4}$$

を導入する（$1\le j\le r$）。すると Mellin-Barnes 公式により，$\varphi_{j,r}$ は $\varphi_{j-1,r}$ を含む複素積分で書ける。$\varphi_{r,r}=\zeta_{AV,r}$ であるから，j に関する帰納的連鎖

$$\zeta_{AV,r}=\varphi_{r,r}\longrightarrow\varphi_{r-1,r}\longrightarrow\varphi_{r-2,r}\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow\varphi_{2,r}\longrightarrow\varphi_{1,r}$$

が成立する。ところが $\varphi_{1,r}$ は $\zeta_{EZ,r}$ に他ならない。こうして $\zeta_{AV,r}$ と $\zeta_{EZ,r}$ が結びつく。更に $\zeta_{EZ,r}$ は $\zeta_{EZ,r-1}$ を含む複素積分で書けるので，今度は r に関する連鎖

$$\zeta_{EZ,r}\longrightarrow\zeta_{EZ,r-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\zeta_{EZ,2}\longrightarrow\zeta_{EZ,1}=\zeta$$

が成り立ち，最終的に Riemann ゼータ関数 $\zeta=\zeta_{EZ,1}$ に到達する。解析接続の証明は積分路の移動による。そして上記の連鎖に基づく帰納法によって証明が進行するのである。この Mellin-Barnes 積分による帰納的構造によって，これらの多重ゼータ関数はひとつの大きな家族になっていると考えることもできる。

この家族にはもっと一般の多重級数で定義される多変数ゼータ関数も属している。非負の実数を成分とする (n,r) 行

列 $A_{nr}=(a_{ij})_{1\le i\le n,\,1\le j\le r}$ を考え，どの行にもどの列にも零でない成分が少くともひとつは存在するとする。この時，n 変数の多重ゼータ関数

$$\zeta_r(s_1,\ldots,s_n;A_{nr})=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=1}^{\infty}(a_{11}m_1+\cdots+a_{1r}m_r)^{-s_1}\times\cdots\times(a_{n1}m_1+\cdots+a_{nr}m_r)^{-s_n} \tag{5}$$

を考えると，やはり Mellin-Barnes 積分を用いる手法によって，$\zeta_r(s_1,\ldots,s_n;A_{nr})$ の $\mathbb{C}^n$ 全体への有理型解析接続を証明することができる。もちろん (5) は (1), (2), (3), (4) をすべて特殊な場合として含む。但し (5) の接続の一般的な証明は，(1), (2) 等の個別の証明に比べると，積分路の変形の方法はかなり異なる。

更に種々の係数をつけた一般化も可能である。$\zeta_{EZ,r}$ を Dirichlet 指標でひねったものは秋山－石川 (2002) が扱っている。$\zeta_{MT,r}$ と $\zeta_{AV,r}$ に対して同様に Dirichlet 指標を付けたものは呉茂香が考え，その解析接続を示している。保型形式の Fourier 係数などを含む一般的な係数を付けたものも，$\zeta_{EZ,r}$ の場合には筆者と谷川によって考察されており (J. Théorie des Nombres de Bordeaux, to appear)，同様の一般化を $\zeta_{MT,r}$ や $\zeta_{AV,r}$ に対して，更には (5) の形の多重級数に対して考えることも可能であろう。

(2003年1月5日)