数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 76-88

実 2 次体の円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大と最大不分岐 pro-2-拡大について

On the maximal unramified pro-2-extension over cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extensions of real quadratic fields

水澤 靖 (Yasushi Mizusawa)
早稲田大学大学院 理工学研究科 数理科学専攻
Department of Mathematical Sciences
School of Science and Engineering, Waseda University

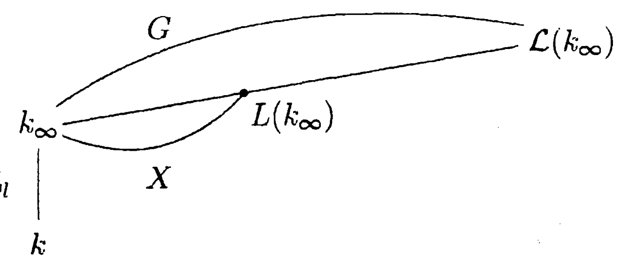
§1. Introduction

素数 l を一つ固定して考える. 与えられた有限次代数体 k に対して、1 の l 冪乗根を全て添加した体 $k(\mu_{l^\infty})$ には、k 上の Galois 群が l 進整数環 $\mathbb{Z}_l$ の加法群と同型であるような中間体 k_∞ が唯一つ存在する. この拡大 k_∞/k が k の円分 $\mathbb{Z}_l$-拡大である. これらの代数体 k_∞、k に対して、$\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty$、$\mathcal{L}(k)/k$ をそれぞれの最大不分岐 pro-l-拡大とする. 一方で、$L(k_\infty)/k_\infty$、$L(k)/k$ をそれぞれの最大不分岐アーベル pro-l-拡大とする. 類体論により拡大 $L(k)/k$ は常に有限次拡大であるが、拡大 $\mathcal{L}(k)/k$ は k の l-類体塔とみなすことができ、無限次拡大となり得ることが知られている. この有限次代数体の l-類体塔の Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k)$ は古くから数論的な興味の対象であるが、本報告では特に円分 $\mathbb{Z}_l$-拡大体上の l-類体塔 (最大不分岐 pro-l-拡大) の Galois 群

$$G = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty)$$

を考察する. この Galois 群 G の最大アーベル商群 $X = G^{ab} \simeq \mathrm{Gal}(L(k_\infty)/k_\infty)$ が岩澤加群であり、Galois 群 G は岩澤理論の研究対象としても興味深いものである.

Wingberg 氏 [12] は特に非正則素数 l と円の l 分体 $k = \mathbb{Q}(\zeta_l)$ において、Vandiver 予想の成立 (k の最大実部分体 $k^+ = \mathbb{Q}(\zeta_l + \zeta_l^{-1})$ の類数が l で割れない) と、Galois 群 G が free pro-l-群であることの同値性を示している. また最近では尾崎氏 [8][9] は Galois 群 G の降中心列から高次岩澤加群、高次岩澤不変量を定義して



Galois 群 G の構造を研究しており、特に $l=2$ の場合においては、Galois 群 G が free pro-2-群であるような虚２次体 k が全て決定されている．一方 $l=3$ の場合においても、Galois 群 G が非自明な free pro-3-群であるような虚２次体 k の実例が与えられている．

このように特殊な CM 体においては Galois 群 G として free pro-l-群が現れてくるが、やはりこれらの結果からも Galois 群 G の relation には総実な部分が大きく影響していると考えられる．では有限次代数体 k 自身が総実である場合には、Galois 群 G はどのような構造を持つのであろうか？ この場合は、岩澤加群 $X \simeq G^{ab}$ に関する次の予想と深く関わっている．

Greenberg 予想　全ての素数 l に対して、k が総実ならば $\#X < \infty$ であろう．

この予想の下では、総実な円分 $\mathbb{Z}_l$-拡大体上の l-類体塔の Galois 群 G は特殊な構造を持つと考えられる．本報告では、この総実な場合を考察して得られた次の結果について報告する．

主結果　$l=2$ の場合において、Galois 群 G が非可換有限群（二面体群、一般四元数群）であるような実２次体 k が（二面体群の場合は無数に）存在する．

この $l=2$ で k が実２次体の場合には既に尾崎氏 [7] が、Galois 群 G が無限群である一方で岩澤加群 $X \simeq G^{ab}$ は有限であるような実２次体 k の無限族を与えている．Galois 群 G が無限群である場合にその構造を決定することは難しいが、今回

の主結果では Galois 群 G は有限群であり、本報告ではその構造が具体的にわかる実例も与える.

次節§2で主結果を具体的な定理として述べ、§3で証明の概略について述べる. 以降の節では固定された素数 l に対して上述の記号を用いるが、**特に断らない限り $l=2$ として考える**. 一般に、与えられた有限次代数体 K に対して $\mathrm{Cl}_l(K)$ は k のイデアル類群の l-Sylow 部分群、$E(K)$ は K の単数群を表す.

§2. Main results

最初に述べる結果は、Galois 群 G が二面体群となる実2次体 k の無限族に関する次の定理である.

定理1 p, q, r を次のような素数とする. ($\left(\frac{*}{*}\right)$ は平方剰余記号を表す.)

$$p \equiv 3 \pmod 4), \; q \equiv r \equiv 5 \pmod 8), \; \left(\frac{qr}{p}\right) = -1.$$

このとき実2次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{pqr})$ の円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大体 k_∞ の最大不分岐 pro-2-拡大 $\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty$ の Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty)$ は位数有限であり、位数 $2^m \geq 8$ の二面体群 D_{2^m} または位数 $2^m \geq 16$ の一般四元数群 Q_{2^m} と同型である. さらに $\left(\frac{r}{q}\right) = 1$ かつ実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{qr})$ の基本単数の絶対ノルムが $+1$ ならば、$G \simeq \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k) \simeq D_{2^m}$ ($m \geq 3$) であり、その位数 2^m について $2^{m-2} = \#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr}))$ が成り立つ.

この定理の後半においては、実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{qr})$ の類数を計算することにより、Galois 群 G の位数も決定できる. 幾つか計算した例を挙げておこう.

p	q	r	$\left(\frac{r}{q}\right)$	$N\varepsilon_{qr}$	G
3	5	61	1	$+1$	D_8
3	5	181	1	$+1$	D_{16}
3	29	181	1	$+1$	D_{32}
7	3821	1061	1	$+1$	D_{512}

注意！ 実は現在のところ、定理 1 の（前半の）仮定を充たす実 2 次体 k で、Galois 群 G が実際に一般四元数群 Q_{2^m} $(m \geq 4)$ となる具体例は見つかっていない．しかしながら定理 1 とは異なる状況において、次の結果を得ることができた．

定理 2 実 2 次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5 \cdot 113})$ の円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大体 k_∞ の最大不分岐 pro-2-拡大 $\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty$ の Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty)$ は位数 16 の一般四元数群 Q_{16} と同型である．

定理 2 は計算機を用いて得られた結果である．次節で、これらの定理の証明の概略を述べる．

§ 3. Sketch of the proof

まず我々の主結果は、よく知られた次の群論的な結果に大きく依存している．

命題 P を位数 2^m の有限群とする．この時 $P^{ab} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ならば、P は次の有限 2-群のいずれかと同型である．

$$\begin{aligned}
D_{2^m} &= \langle\, x,\ y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1} \,\rangle && : \text{二面体群} \\
Q_{2^m} &= \langle\, x,\ y \mid x^{2^{m-2}} = y^2,\ y^4 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1} \,\rangle && : \text{一般四元数群} \\
SD_{2^m} &= \langle\, x,\ y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{2^{m-2}-1} \,\rangle && : \text{準二面体群} \\
(2,2) &= \langle\, x,\ y \mid x^2 = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x \,\rangle && \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

四元数群 Q_8 と Klein 四元群 $(2,2)$ の極大部分群はすべて巡回群であるが、それ以外の上記の群については、極大部分群で巡回群であるものが唯一つ存在することに注意しておく．これらの群構造を持つ 2-類体塔は、主に 2 次体の場合において Kisilevsky [4], Benjamin-Snyder [1] らによって研究されている．今回の主結果の証明においても、2-類体塔の Galois 群にこの命題を適用する．

また証明では種の理論が全体的に用いられ、特にイデアル類群の 2-階数等を調べるために次の公式を有効に用いる.

Genus formula 有限次代数体の 2 次拡大 K/k において、$\mathrm{Cl}_2(K)^G$ を $\mathrm{Cl}_2(K)$ の元で $\mathrm{Gal}(K/k)$-不変な類で生成される部分群とし、$\mathrm{Cl}_2(K)^*$ を $\mathrm{Cl}_2(K)^G$ の元で $\mathrm{Gal}(K/k)$-不変なイデアルを含む類で生成される部分群とする. この時、位数に関して次の等式が成り立つ. ここに t は K/k で分岐する k の素点の個数である.

$$
\begin{aligned}
\#\mathrm{Cl}_2(K)^G &= \#\mathrm{Cl}_2(k) \times \frac{2^{t-1}}{[E(k) : E(k) \cap N_{K/k}K^\times]} \\
\#\mathrm{Cl}_2(K)^* &= \#\mathrm{Cl}_2(k) \times \frac{2^{t-1}}{[E(k) : N_{K/k}E(K)]}
\end{aligned}
$$

一般に $\mathbb{Z}_l$-拡大 K_∞/K の K 上 l^n 次の中間体（各自然数 n に対して一意的、n-th layer と呼ぶ.）を、K_n とおく. まず定理 1 からその証明の概略を述べる.

$\boxed{\text{定理 1}}$ まず $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$、$\left(\frac{r}{p}\right) = 1$ と仮定してよい. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{pqr})$ の円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大の 1-st layer は $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pqr})$ であり、k 以外に $k^* = \mathbb{Q}(\sqrt{2pqr})$、$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を部分体に持つ. Rédei-Reichardt の定理 [10] から $\mathrm{Cl}_2(k) \simeq \mathrm{Cl}_2(k^*) \simeq (2,2)$ であることがわかる. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は類数 1 で、その基本単数は $1+\sqrt{2}$ であり、k、k^* の基本単数をそれぞれ ε、ε^* とする. ここで k_1 に次の定理を適用し、$\mathrm{Cl}_2(k_1)$ を調べたい.

Kuroda's class number formula (cf. [6], Kubota [5]) $\mathbb{Q}$ 上実 (2, 2)-拡大体 K の実 2 次体である 3 つの中間体を F_i ($i = 1, 2, 3$) とし、それらの基本単数をそれぞれ ε_i とする. また群指数 $Q(K) = [E(K) : \langle -1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle]$ を定める. この時、

$$\#\mathrm{Cl}_2(K) = \frac{1}{4} \cdot Q(K) \cdot \#\mathrm{Cl}_2(F_1) \cdot \#\mathrm{Cl}_2(F_2) \cdot \#\mathrm{Cl}_2(F_3)$$

が成立し、さらに $Q(K) = 1, 2$ または 4 であり、K の基本単数系は次のいずれか

である.

$$
\begin{array}{rll}
\text{i)} & \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 & \\
\text{ii)} & \sqrt{\varepsilon_1}, \varepsilon_2, \varepsilon_3 & (N\varepsilon_1 = +1) \\
\text{iii)} & \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}, \varepsilon_3 & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}(N\varepsilon_1 = N\varepsilon_2 = +1)$} \\
\text{iv)} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \varepsilon_2, \varepsilon_3 & \\
\text{v)} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3}, \varepsilon_2 & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}(N\varepsilon_1 = N\varepsilon_2 = N\varepsilon_3 = +1)$} \\
\text{vi)} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_1} & \\
\text{vii)} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3 & (N\varepsilon_1 = N\varepsilon_2 = N\varepsilon_3 = \pm 1)
\end{array}
$$

ここに $N\varepsilon_i$ は絶対ノルム $N_{F_i/\mathbb{Q}}\varepsilon_i$ の略である.

この公式を適用するためには k_1 の基本単数系を調べなければならないが、実際に $E(k_1) = \langle -1, 1+\sqrt{2}, \varepsilon, \varepsilon^* \rangle$ であることが次のようにしてわかる. $N\varepsilon = N\varepsilon^* = +1$、$N(1+\sqrt{2}) = -1$ に注意する.

$\left(\dfrac{r}{q}\right) = -1$ の時、r と 2 の上の k の素イデアルは、その分解状況から $\mathrm{Cl}_2(k)$ で非自明な同じ類を生成する. よって $2 = \varepsilon\alpha^2 r$ $(\exists\, \alpha \in k^\times)$ で、$k_1(\sqrt{r}) = k_1(\sqrt{\varepsilon})$ であり、特に $\sqrt{\varepsilon} \notin k_1$. 同様に $k_1(\sqrt{q}) = k_1(\sqrt{\varepsilon^*})$、$\sqrt{\varepsilon^*} \notin k_1$ であり、$k_1(\sqrt{\varepsilon}) \neq k_1(\sqrt{\varepsilon^*})$ から $\sqrt{\varepsilon\varepsilon^*} \notin k_1$ である. $\left(\dfrac{r}{q}\right) = 1$ の時もそれぞれ r、q の上の k、k^* の素イデアルが単項となるので、同様の議論で $\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon^*}, \sqrt{\varepsilon\varepsilon^*} \notin k_1$ がわかる. こうして上記の基本単数系の分類から、$E(k_1)$ が決定される.

Kuroda's class number formula より $\#\mathrm{Cl}_2(k_1) = 4$、特に $\mathrm{Cl}_2(k_1) \simeq \mathrm{Cl}_2(k) \simeq (2,2)$ となる. ここで次の定理が k_∞/k に適用できる.

Fukuda's theorem (cf. [2]) 分岐素点が全て完全分岐する $\mathbb{Z}_l$ 拡大 K_∞/K において、$\mathrm{Cl}_l(K_1) \simeq \mathrm{Cl}_l(K)$ ならば全ての K_n に対して $\mathrm{Cl}_l(K_n) \simeq \mathrm{Cl}_l(K)$ となる.

これにより、全ての n に対して $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n)^{ab} \simeq \mathrm{Cl}_2(k_n) \simeq (2,2)$ であることがわかり、特に岩澤加群 $X = G^{ab} \simeq \varprojlim \mathrm{Cl}_2(k_n) \simeq (2,2)$ である. すると $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n)$ の構造は命題に現れるものに限られるが、低次の layer からより詳しく調べてい

きたい．そのために命題と合わせて、単項化の状況と2-類体塔の構造を関連付ける次の定理を用いる．まず、その下の補題を証明する．

Kisilevsky's theorem (cf. [4]) K を $\mathrm{Cl}_2(K)\simeq(2,2)$ なる有限次代数体とする．この時 $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(K)/K)\not\simeq Q_8,(2,2)$ ならば、$A(F)\simeq\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(K)/F)$ なる不分岐2次拡大 F/K が唯一つ存在し、$j:\mathrm{Cl}_2(K)\to\mathrm{Cl}_2(F)$ をイデアル類の持ち上げ写像とすると次が成り立つ．

$$\#(\mathrm{ker}j\cap N_{F/K}\mathrm{Cl}_2(F))>1,\ \#\mathrm{ker}j=4\ \Rightarrow\ \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(K)/K)\simeq D_{2^m}\quad(m\geq 3)$$
$$\#(\mathrm{ker}j\cap N_{F/K}\mathrm{Cl}_2(F))>1,\ \#\mathrm{ker}j=2\ \Rightarrow\ \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(K)/K)\simeq Q_{2^m}\quad(m\geq 4)$$
$$\#(\mathrm{ker}j\cap N_{F/K}\mathrm{Cl}_2(F))=1,\ \#\mathrm{ker}j=2\ \Rightarrow\ \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(K)/K)\simeq SD_{2^m}\ (m\geq 4)$$

補題

$$\left(\frac{r}{q}\right)=-1\text{ の時}\quad\begin{cases}\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k)\simeq(2.2)\\ \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k_1)\simeq D_8\\ \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k_1(\sqrt{p}))\simeq\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p}))\simeq\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\left(\frac{r}{q}\right)=1\text{ の時}\quad\begin{cases}\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k)\simeq D_{2^m}\ (m\geq 3)\\ \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k(\sqrt{p}))\simeq\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p})):\text{巡回群}\end{cases}$$

証明： k_n の Hilbert 2-類体は $L(k_n)=\mathbb{Q}_n(\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{r})$ であることに注意する．

$\left(\frac{r}{q}\right)=-1$ の時 ： Rédei-Reichardt の定理 [10] から $\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr}))=2$ で、$\mathbb{Q}(\sqrt{qr})$ の基本単数の絶対ノルムは -1 となる．先と同様の議論から Kuroda's class number formula により、$\#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))=2$. よって命題から $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k)\simeq(2,2)$ となる．すると $L(k)$ の類数は奇数であるが、$L(k_1)$ の類数も奇数であるとすると Fukuda's theorem から $L(k)$ の円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大 $L(k_\infty)/L(k)$ の岩澤不変量は全て0となり、山本氏の結果（円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大の岩澤不変量が全て0となる実アーベル2-拡大体の決定、[14] 参照）に矛盾する．よってまず $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k_1)\not\simeq(2,2)$ である．

さて、$\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p}))$ が巡回群でないと仮定すると、命題によりこれは $(2,2)$ と同型となる．するとノルムによる全射 $\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p}))\to\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr}))$ と Genus formula

から $\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. またこの状況で 2 の上の素イデアルを調べると、持ち上げ写像 $\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr})) \to \mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p}))$ は零写像であり、$\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{p})) = 1$ に注意して、$\mathrm{Gal}(k_1(\sqrt{p})/\mathbb{Q}_1(\sqrt{p}))$ と $\mathrm{Gal}(k_1(\sqrt{p})/\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr}))$ が $\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p}))$ に自明に作用することがわかる. すると $\mathrm{Gal}(k_1(\sqrt{p})/k_1)$ も自明に作用し、$L(k_1(\sqrt{p}))/k_1$ が 8 次不分岐アーベル拡大となって矛盾. よって、$\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p}))$ は巡回群である.

ここで 2 の上の素イデアルを調べると、$\#\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p})) = 4$ で $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k_1) \simeq D_8$ または Q_8、さらに $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k(\sqrt{r})) \simeq D_8$ がわかる. この D_8-拡大の中間体 $F = k(\sqrt{2p}, \sqrt{r})$ を調べる. $\mathbb{Q}(\sqrt{2pr})$ に Rédei-Reichardt の定理 [10] を適用すると $\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2p}, \sqrt{r})) = 1$ がわかり、それと p の上の素イデアルの分解状況等から、持ち上げ写像 $\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{r})) \to \mathrm{Cl}_2(F)$ は零写像となる. そこで $F/k(\sqrt{r})$ に Genus formula を適用すると $\mathrm{Cl}_2(F)$ が巡回群となり、よって $\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{r})) \simeq (2, 2)$ で、命題により $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k_1) \simeq D_8$ となる.

$\left(\dfrac{r}{q}\right) = 1$ の時 : 拡大 $k(\sqrt{r})/\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ に Genus formula を適用して $\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{r})) \simeq (2, 2)$、また上の場合と同様に $\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))$ が巡回群であることがわかる. p と 2 の分解状況から $j : \mathrm{Cl}_2(k) \to \mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))$ は零写像となり、Kisilevsky's theorem から $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k) \simeq D_{2^m}$ ($m \geq 3$) を得る. □

この補題から、全ての n で $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n) \not\simeq (2, 2), Q_8$ であり、$\mathrm{Cl}_2(k_n(\sqrt{p})) \simeq \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n(\sqrt{p}))$ が巡回群である. ここで $j : \mathrm{Cl}_2(k_n) \to \mathrm{Cl}_2(k_n(\sqrt{p}))$ を定め、2 の上の素イデアルを調べると、$\ker j \cap N_{k_n(\sqrt{p})/k_n}\mathrm{Cl}_2(k_n(\sqrt{p}))$ に非自明な元が存在することがわかり、よって Kisilevsky's theorem から $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n) \simeq D_{2^m}$ または $Q_{2^{m+1}}$ ($m \geq 3$) となる. また $\mathrm{Cl}_2(k_n(\sqrt{p}))$ は円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大 $k_\infty(\sqrt{p})/k(\sqrt{p})$ の Galois 群の作用で不変であることもわかり、$k(\sqrt{p})$ は $\mathbb{Q}$ 上アーベル拡大ゆえ Leopoldt 予想は成立しているので、次の定理が適用できる.

Greenberg's theorem (cf. [3]) K_∞/K を総実代数体の円分 $\mathbb{Z}_l$ 拡大とし、その Galois 群を $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ とする. $\mathrm{Cl}_l(K_n)^\Gamma$ を $\mathrm{Cl}_l(K_n)$ の Γ-不変な類で生成される部分群とする. この時、K と素数 l に対して Leopoldt 予想が成立しているならば、その位数 $\#\mathrm{Cl}_l(K_n)^\Gamma$ は $n \to \infty$ に関して有界である.

すると $\mathrm{Cl}_2(k_n(\sqrt{p}))$ の位数は有界、特に $G = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty) \simeq \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n)$ は位数有限で、D_{2^m} または $Q_{2^{m+1}}$ ($m \geq 3$) と同型となる．以上で定理1の前半が示された．次に後半の主張を示そう．

一般に実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数を ε_d で表す．**ここで** $N\varepsilon_{qr} = +1$、$\left(\frac{r}{q}\right) = 1$ **と仮定する**．$\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr}))$ は巡回群、$N\varepsilon_q = N\varepsilon_r = -1$ であることに注意して Kuroda's class number formula を $\mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{r})$ に適用すると、$E(\mathbb{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{r})) = \langle -1, \varepsilon_q, \varepsilon_r, \sqrt{\varepsilon_{qr}} \rangle$ がわかる．また補題から $\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr}))$ も巡回群で、2の上の素イデアルと生成元を調べることにより、$2\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr})) \geq \#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr})) \geq \#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr}))$ がわかる．Rédei-Reichardt の定理 [10] から $\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2qr})) \simeq (2,2)$、$N\varepsilon_{2qr} = -1$ で、$\sqrt{\varepsilon_{qr}} \notin \mathbb{Q}_1(\sqrt{qr})$ であるので、$\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr})$ に対する Kuroda's class number formula から $Q(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr})) = 1$、即ち $\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr})) = \#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr}))$ がわかる．

次に $k(\sqrt{p})/\mathbb{Q}(\sqrt{qr})$ においても2の上の素イデアルと類群の生成元を調べると、$2\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr})) \geq \#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p})) \geq \#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr}))$ であり、$k(\sqrt{p})$ に対する Kuroda's class number formula から $Q(k(\sqrt{p})) = 1$ または2である．$N\varepsilon_p = N\varepsilon_{qr} = +1$ ゆえ $Q(k(\sqrt{p})) = 1$ と仮定すると $N_{k(\sqrt{p})/k}E(k(\sqrt{p})) = E(k)^2$ となり、Genus formula を不分岐2次拡大 $k(\sqrt{p})/k$ に適用すると、

$$1 \leq \#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))^* = \#\mathrm{Cl}_2(k) \times \frac{2^{-1}}{[E(k) : E(k)^2]} = 4 \cdot \frac{2^{-1}}{4} < 1$$

となって矛盾である．よって $Q(k(\sqrt{p})) = 2$、即ち $2\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr})) = \#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))$ である．

さて、ここでまた $(2,2)$-拡大 $k_1(\sqrt{p})/\mathbb{Q}(\sqrt{qr})$ において2の上の素イデアルと類群の生成元を調べると、$\#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p})) = 2\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{qr})) = 2\#\mathrm{Cl}_2(\mathbb{Q}_1(\sqrt{qr})) \geq \#\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p})) \geq \#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))$ となって $\#\mathrm{Cl}_2(k_1(\sqrt{p})) = \#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))$ がわかる．すると Fukuda's theorem から全ての $n \geq 0$ で $\#\mathrm{Cl}_2(k_n(\sqrt{p})) = \#\mathrm{Cl}_2(k(\sqrt{p}))$、即ち $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n) \simeq \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k)$ となり、補題と以上の等式を合わせて主張を得る．これで定理1の証明が完了する．■

次に、定理2の主張が導かれた過程について述べる．類群、イデアル等は計算用ソフトウェア KASH 2.2 および PARI/GP を用いて計算した．

定理2　$k=\mathbb{Q}(\sqrt{5\cdot 113})$ の円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大の 1-st layer $k_1=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5\cdot 113})$ の部分体 $k^*=\mathbb{Q}(\sqrt{2\cdot 5\cdot 113})$ を考える．k_1/k^* は不分岐拡大で、$\mathcal{L}(k_1)=\mathcal{L}(k^*)$ である．$\mathrm{Cl}_2(k^*)\simeq(2,2)$ であり、その元は2, 5, 113 の上の素イデアルの類と自明な類の4つである．特に $L(k^*)=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{113})$．また計算により $\mathrm{Cl}_2(k_1)\simeq(2,2)$、$\mathrm{Cl}_2(k^*(\sqrt{5}))\simeq\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ がわかり、特に命題から $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k^*)/k^*)\simeq D_{32}$, Q_{32} または SD_{32} となる．

持ち上げ写像 $j:\mathrm{Cl}_2(k^*)\to\mathrm{Cl}_2(k^*(\sqrt{5}))$ を定める．素イデアルの分解状況から、k^* の5の上の素イデアルの類は $\ker j\cap N_{k^*(\sqrt{5})/k^*}\mathrm{Cl}_2(k^*(\sqrt{5}))$ に含まれることがわかる．一方 k^* の2（および113）の上の素イデアルは、$k^*(\sqrt{5})/k^*$ において惰性するが、計算により $k^*(\sqrt{5})$ で単項化“しない”ことがわかった．よって $\#(\ker j\cap N_{k^*(\sqrt{5})/k^*}\mathrm{Cl}_2(k^*(\sqrt{5})))>1$ かつ $\#\ker j=2$ ゆえ、Kisilevsky's theorem により $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k^*)/k^*)\simeq Q_{32}$．すると $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k_1)$ は、この Q_{32} の巡回群でない極大部分群であるゆえ Q_{16} と同型である．

また $\mathrm{Cl}_2(k_2)\simeq(2,2)$ であることも計算でき、よって円分 $\mathbb{Z}_2$-拡大 k_∞/k_1 に対して Fukuda's theorem を用いると、全ての $n\geq 1$ で $\mathrm{Cl}_2(k_n)\simeq(2,2)$．すると $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n)$ から $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_1)/k_1)\simeq Q_{16}$ への全射が存在し、$\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n)$ は剰余群に Q_{16} が現れるものでなくてはならないが、命題に現れる群でそのようなものは Q_{16} 自身以外にない．よって $G=\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty)\simeq\varprojlim\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_n)/k_n)\simeq Q_{16}$ となる．■

§4. One problem

以上で主結果とその証明を述べたが、最後に、ある問題を挙げて本報告をまとめることにする．

前節の証明からもわかるように、主結果は前述の群論的な命題に大きく依存し、

そこに現れる特殊な有限2-群を2-類体塔のGalois群として扱ってきた．$m \geq 3$として、これらの群をD_{2^m}; Q_8; $Q_{2^{m+1}}$; $SD_{2^{m+1}}$; $(2,2)$の５つの型に分類した時、これらのどの型も実２次体kの2-類体塔のGalois群$\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k)$として現れることが知られている．([1] 参照)

一般に全ての総実代数体に対してGreenberg予想を仮定すると、kが総実である時$G = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty)$の交換子群列の各商は有限群となる．これは有限次代数体のl-類体塔のGalois群$\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k)/k)$と類似する性質であり、よってそこに現れる群構造は、Galois群Gとしても現れるのではないかと考えられる．そこで特に、次の問題を考える．

問題　$l = 2$でkが実２次体の場合に、D_{2^m}, Q_8; $Q_{2^{m+1}}$, $SD_{2^{m+1}}$; $(2,2)$の５つのどの型も、Galois群$G = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty)$の構造として現れるか？

この問題に対して今回の主結果は、D_{2^m}-型については無限族として、$Q_{2^{m+1}}$-型についてはQ_{16}の場合で肯定的な解答を与えている．一方、次の定理３から、$(2,2)$-型についても無限族として肯定的な解答が与えられる．これは山本氏の岩澤不変量に関する結果（[14] 参照）の系である．

定理３ (cf. Yamamoto [14])　p, q, rを次のような素数とする．

$$p \equiv 7,\ q \equiv r \equiv 3 \pmod 8), \quad \left(\frac{qr}{p}\right) = -1.$$

このとき実２次体$k = \mathbb{Q}(\sqrt{pqr})$の円分$\mathbb{Z}_2$-拡大体$k_\infty$の最大不分岐pro-2-拡大のGalois群は$G = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}(k_\infty)/k_\infty) \simeq X \simeq (2,2)$である．

こうして上記の問題で残る場合はQ_8-型, $SD_{2^{m+1}}$-型の２つであるが、今のところそのような実２次体kは見つかっていない．さらに$Q_{2^{m+1}}$-型の場合も含めて、無限族として与えられるかどうかも同時に考えられる問題である．また今回の主結果を導く際に、実２次体kの円分$\mathbb{Z}_2$-拡大で、完全分岐し、かつ$X \simeq \mathrm{Cl}_2(k) \simeq (2,2)$となっているものは、定理１と定理３で扱われた場合に限られることもわかった．

よって新たな例や無限族を得るためには、定理2で行ったように 2-nd layer 以上の類群を調べる必要がある.

一般に $\mathcal{L}(k)/k$ が有限次拡大であることと、k の有限次拡大体で類数が l と素であるものが存在することは同値である ([11] 参照). 今回の主結果は Galois 群 G が有限となる場合を扱ったが、同様に G が有限であることと、k の有限次拡大体でその円分 $\mathbb{Z}_l$-拡大の岩澤不変量が全て 0 であるものが存在することは同値であり、そのような代数体がどれだけ存在するかも関連して考えるべき問題である. (円分 $\mathbb{Z}_l$-拡大の岩澤不変量が全て 0 となる実アーベル l-拡大体は、山本氏 [13][14] によって決定されている.)

References

1. E. Benjamin and C. Snyder, *Real quadratic number fields with 2-class group of type* (2, 2), Math. Scand. **76** (1995), 161-178.
2. T. Fukuda, *Remarks on $\mathbb{Z}_p$-extensions of number fields*, Proc. Japan Acad. Ser. A **70** (1994), 264-266.
3. R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976), 263-284.
4. H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to 4 mod 8 and Hilbert's theorem* 94, J. Number Theory **8** (1976), 271-279.
5. T. Kubota, *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 65-85.
6. S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Körper*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sec. I vol.4 **5** (1943), 383-406.
7. M. Ozaki, *Iwasawa invariants of p-extensions of totally real number fields*, preprint.
8. M. Ozaki, *Non-Abelian Iwasawa theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Young Philosophers in Number Theory (Kyoto, 2001) Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku **1256** (2002), 25-37.

9. M. Ozaki, *Non-Abelian Iwasawa theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, preprint.

10. L. Rédei and H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine. Angew. Math. **170** (1933), 69-74.

11. P. Roquette, *On class field towers*, In : J.-W.-S. Cassels and A. Fröhlich, *Algebraic number theory*, London-New York 1967.

12. K. Wingberg, *On the maximal unramified p-extension of an algebraic number field*, J. Reine. Angew. Math. **440** (1993), 129-156.

13. G. Yamamoto, *On the vanishing of Iwasawa invariants of absolutely abelian p-extensions*, Acta. Arith. **94** (2000), no.4, 365-371.

14. G. Yamamoto, *On the Iwasawa invariants of real abelian p-extension fields*, thesis (2000), Waseda University.

水沢 靖 (Yasushi Mizusawa)

早稲田大学大学院 理工学研究科 数理科学専攻

〒169-8555 東京都新宿区大久保３－４－１

e-mail : `mizusawa@akane.waseda.jp`