数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 86-95

On tight Euclidean designs

坂内 悦子　九大・数理
Etsuko Bannai, Kyushu University
etsuko@math.kyushu-u.ac.jp

この講演の内容は坂内英一との共同研究により得られたものです．まず講演でのべたことの概要を書きます．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の単位球面 S^{n-1} 上にある有限個の点からなる集合 X について

"高々 t 次の任意の多項式に対してその球面 S^{n-1} 上での積分はその X 上での値の平均値に置き換えることができる"

時に集合 X は球面上の t-デザインと呼ばれる．

Neumaier と Seidel はこの概念を拡張してユークリッド空間上の t-デザインの定義を与えた（1988）．すなわち $X \subset \mathbf{R}^n$ に対して，高々 t-次の任意の多項式 $f(x)$ が

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\omega(X_i)}{|S_i|} \int_{S_i} f(x) d\sigma_i(x) = \sum_{x \in X} \omega(x) f(x)$$

を満たす時に X をユークリッド空間上の t-デザインであると定義する．ここで $\{S_i,\ 1 \leq i \leq p\}$ は集合 X と共有点を持つ原点を中心とする同心球面の集合，　$X_i = X \cap S_i$, そして $w : X \to \mathbf{R}_{>0}$ は X 上の重み関数とする．$X \subset S^{n-1}$ かつ重み関数が定数である場合は球面上の t-デザインに一致する．Neumaier と Seidel の論文（1988 ）および Delsarte と Seidel の論文（1989 ）によりもしユークリッド空間上の $2e$-デザイン X が少なくとも $[\frac{e}{2}]+1$ 個の同心球と共有点を持つならば X に含まれる点の個数は Fisher 型の下界を持つ，すなわち $|X| \geq \binom{n+e}{e}$ が成り立つことが示されている．

この講演ではユークリッド空間上の $2e$-デザイン X が少なくとも $[\frac{e}{2}]+1$ 個の同心球と共有点を持ちしかも $|X| = \binom{n+e}{e}$ を満たす時に tight であると定義し，加法公式を利用して tight なユークリッド空間上の $2e$-デザインの性質を調べ，さらに weight が定数である様な tight 4-デザインを分類したことを報告した．この分類は Box と Hunter により定義された rotatable design の言葉で言うと次数 2 の rotatable design でサイズが $\binom{n+2}{2}$ のものの分類に対応している（次数 2 の rotatable design のサイズは $\binom{n+2}{2}$ で下からおさえられることが知られている）．

Neumaier と Seidel はユークリッド空間の自明でない tight な $2e$-デザインは，weight が定数でない場合も含めて，$2e \geq 4$ であれば存在しないという予想をたてたが，その反例をこの報告の最後に書き添えておく．

ユークリッド空間のデザイン

ユークリッド空間の t-デザインの定義は Neumaier-Seidel [15] に与えられている．その後 Delsarte-Seidel [8] によりユークリッド空間の t-デザインが丁度 p 個の同心球面上に

ある場合についてその詳しい性質が調べられた．Neumaier-Seidel がユークリッド空間のデザインを定義した時にはデザインは原点 0 を含まないと仮定したが，ここではこの仮定を落とした形で定義を与える．

まず必要な記号等の定義を与える．有限部分集合 X を $\mathbf{R}^n$ の中に考える．この時
$\{r_1, r_2, \ldots, r_p\} = \{||x|| \mid x \in X\}$
と定義する．すなわち X は丁度 p 個の同心球面と共通点を持つ．もし $0 \in X$ であれば原点を半径 0 の球面とみなし同心球面として数える．$S_i = \{x \in \mathbf{R}^n \| \, ||x|| = r_i\}$，$X_i = X \cap S_i$ と定義する．各球面上 S_i に Haar 測度 $d\sigma_i(x)$ を球面の体積が $|S_i| = {r_i}^{n-1}|S^{n-1}|$ を満たすように定義しておく．ただし S^{n-1} は単位球面 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ を表す．集合 X には重み関数 $\omega : X \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ を定義しておき，$w(X_i) = \sum_{x \in X_i} w(x)$ とする．また S_i が原点のみからなる時は $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ の積分を $\frac{1}{|S_i|}\int_{S_i} f(x)d\sigma_i(x) = f(0)$ で定義しておく．以上の記号のもとに次の定義を与える．

定義（ユークリッド空間の t-デザイン）
X を重み関数 ω をもった $\mathbf{R}^n$ の有限部分集合，t を自然数とする．X が次の条件を満たす時に X をユークリッド空間の t-デザインと呼ぶ：

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{w(X_i)}{|S_i|} \int_{x \in S_i} f(x) d\sigma_i(x) = \sum_{u \in X} w(u) f(u)$$

が高々 t 次の任意の n 変数多項式 $f(x)$ に対して成り立つ．

この定義と同値な条件は色々知られているが次の定理は Neumaier-Seidel[15] にある．

定理 NS（Neumaier-Seidel）　X を $\mathbf{R}^n$ の有限部分集合とする．この時次の条件 (1) と (2) は同値である：

(1) X はユークリッド空間の t-デザインである．

(2) $||x||^{2j}\mathrm{Harm}_l(\mathbf{R}^n)$,　$1 \le l \le t, 0 \le j \le [\frac{t-l}{2}]$, に含まれる全ての多項式 $f(x)$ に対して $\sum_{u \in X} w(u)f(u) = 0$ が成り立つ．

注意 もし $0 \notin X$ であれば上に定義したデザインは Neumaier-Seidel の定義したデザインに等しい．また $0 \in X$ であれば X がユークリッド空間の t-デザインであることと $X - \{0\}$ が ユークリッド空間の t-デザインであることは同値である．

以下においてとくに断らない限りユークリッド空間の t- デザインを単に t-デザインと呼ぶことにする．定理 NS の条件 (2) を使うと次の命題が得られる．

命題 1.　λ と μ を正の実数とする．次の条件は同値である．

(1) X は重み ω を持つ t-デザインである．

(2) $X' = \{\lambda x \mid x \in X\}$, $\omega'(\lambda x) = \mu\omega(x)$ とすると X' は ω' を重みとする t-デザインである．

次の定理は Delsarte-Seidel [8] により証明された．

定理 DS（Delsarte-Seidel） (1) X を重み関数 ω を持つ $2e$-デザインとする．もし $0 \notin X$ であれば

$$|X| \geq \sum_{i=0}^{2p-1} \binom{n+s-i-1}{s-i}$$

が成り立つ．
(2) X を重み関数 ω を持つ antipodal な $(2e-1)$-デザインとする．この時 $0 \notin X$, かつ $w(-x) = w(x)$ が成り立っているとすると

$$|X| \geq 2\sum_{i=0}^{p-1} \binom{n+s-2i-2}{s-2i-1}$$

が成り立つ．

上の定理 DS において $\sum_{i=0}^{s} \binom{n+s-i-1}{s-i} = \binom{n+s}{s}$ であることに注意すると次の定理が成り立つことが分かる．

定理 DNS（Neumaier-Seidel, Delsarte-Seidel） X を重み ω の $2e$-デザインとする．もし $p \geq [\frac{e}{2}] + 1$ であれば

$$|X| \geq \binom{n+s}{s}$$

が成り立つ（X は原点 0 を含んでいてもかまわない事に注意しておく）．

ユークリッド空間の tight デザイン

次にふた通りの tight 性を定義する．

定義 T（ユークリッド空間の tight $2e$-デザイン） X を重み ω の $2e$-デザインとする．さらに $p \geq [\frac{e}{2}] + 1$ かつ $|X| = \binom{n+e}{e}$ が成り立つ時 X をユークリッド空間の tight $2e$-デザインと定義する．(ここで X は原点を含んでいても良い事に注意しておく．)

定義 Tp（p 個の同心球の上の tight $2e$-デザイン） X を重み ω の $2e$-デザインとする．さらに $0 \notin X$ かつ $|X| = \sum_{i=0}^{2p-1} \binom{n+e-i-1}{e-i}$ が成り立つ時に X を p 個の同心球の上の tight $2e$-デザインと定義する．

注意 定義 Tp では $0 \notin X$ である．p 個の同心球の上の tight $2e$-デザイン（定義 Tp）においてもし $p < [\frac{e}{2}] + 1$ が成り立つならば $|X| < \binom{n+e}{e}$ となっている．特に $p = 1$ であれば X は球面上の tight な $2e$-デザインである．もし $p \geq [\frac{e}{2}] + 1$ が成り立つならば $|X| = \binom{n+e}{e}$ となり X はユークリッド空間の tight $2e$-デザイン（定義 T）である．

主結果

次の補題および定理がこの講演で発表する主結果である．

補題 X が p 個の同心球面上の tight $2e$-デザインであれば次の (1), (2) および (3) が成

(1) $||x|| = ||y||$ であれば $w(x) = w(y)$ が成り立つ．すなわち w は各 X_i 上で定数値をとる．
(2) 各 i, $1 \le i \le p$, に対して X_i は高々 e-距離集合である．
(3) もし w が X 全体で定数値をとるならば $p \le e$ が成り立つ．

定理 X を重みが定数であるユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の tight 4-デザインとする．このとき X は原点を含み $X - \{0\}$ は 球面 S^{n-1} 上の tight 4-デザインである．

注意 もし球面 S^{n-1} 上に tight 4-デザインが存在するならば $n = 3$ または $n = (2m+1)^2-3$ かつ m は整数であることが知られている (cf. [1], [5])．また S^2 および $S^{(2m+1)^2-4}$, $m = 1, 2$ 上の tight 4-デザインが存在することも知られている．一般に $m \ge 3$ の場合に長いことその存在，非存在は知られていなかった．しかしながら最近になって坂内，宗政および Venkov が $m = 3, 4$ を含む多くの m に対して $S^{(2m+1)^2-4}$ 上の tight 4-デザインが存在しないことの証明に成功した（[5] ）.

注意 ユークリッド空間の tight 4-デザインの概念は Box と Hunter (1957) が定義した次数 2 の rotatable design の概念に同値である．従って私達の主結果により可能な最小（すなわち $\binom{n+2}{n}$ 個 ）の点を含む次数 2 の rotatable design の分類が与えられたことになる．

補題および主定理の証明の概略

初めにいくつか記号および定義を導入しておく．X を $\mathbf{R}^n$ の有限部分集合，ω を X 上の重み関数とする．また $0 \notin X$ かつ X は原点を中心とした丁度 p 個の同心球面 S_1, $S_1 \ldots$, S_p と共有点を持つと仮定する．また p 個の同心球面を $S = \cup_{i=1}^{p} S_i$ で表す．次に $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ を n 変数かつ実係数の多項式の作るベクトル空間，$\mathrm{Harm}(\mathbf{R}^n)$ を調和多項式全体の作る $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ の部分空間とする．各非負整数 l に対して $\mathrm{Hom}_l(\mathbf{R}^n)$ を l 次の斉次多項式全体の作る部分空間，$\mathcal{P}_e(\mathbf{R}^n) = \oplus_{l=0}^{e} \mathrm{Hom}_l(\mathbf{R}^n)$，$\mathrm{Harm}_l(\mathbf{R}^n) = \mathrm{Harm}(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{Hom}_l(\mathbf{R}^n)$ と定義する．さらに $\mathcal{P}(S)$, $\mathrm{Hom}_l(S)$, $\mathcal{P}_e(S)$, $\mathrm{Harm}(S)$, $\mathrm{Harm}_l(S)$ をそれぞれ対応する部分空間に含まれる多項式を同心球面 S 上に制限して得られるベクトル空間とする．例えば $\mathcal{P}(S) = \{f|_S \mid f \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)\}$ となる．$\mathrm{Harm}(\mathbf{R}^n)$ には内積 $< \varphi, \psi > = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\xi \in S^{n-1}} \varphi(\xi)\psi(\xi) d\xi$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Harm}(\mathbf{R}^n)$ （$d\xi$ は単位球面の Haar 測度 ） を入れておく．この内積に関する $\mathrm{Harm}_l(\mathbf{R}^n)$ の正規直交基底 $\varphi_{l,1}, \ldots, \varphi_{l,N_l}$ をそれぞれひと組定めておく（ $N_l = \dim(\mathrm{Harm}_l(\mathbf{R}^n))$ ）．次に $\{||x||^{2j} \mid j = 0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ は X 上の多項式として考えた時に一次独立であることに着目する．非負整数 l に対してベクトル空間 $\mathcal{P}(X) = \{f|_X \mid f \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)\}$ に内積を $< f, g >_l = \sum_{x \in X} w(x)||x||^{2l} f(x)g(x)$ で定義する．各 l について内積 $< \, , \, >_l$ に関して Gram-Schmidt の方法を用いて $\{||x||^{2j} \mid j = 0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ から正規直交系
$\{g_{l,1}(x), g_{l,2}(x), \ldots, g_{l,p-1}(x)\}$
を $\deg(g_{l,j}(x)) = 2j$ となるように構成する．

次に高々 p 個の同心球面 S 上の高々 e 次の多項式の作る部分空間 $\mathcal{P}_e(S)$ の基底を構成する．まず，各 l, $0 \le l \le e$, に対して

$$\mathcal{H}_l = \{g_{l,j}\varphi_{l,i} \mid 0 \le j \le \min\{p-1, [\frac{e-l}{2}]\}, \ 1 \le i \le N_l\}$$

と定義し，$\mathcal{H} = \cup_{l=0}^{e}\mathcal{H}_l$ とおく．この時 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{P}_e(S)$ の基底となっている．従って

$$\dim(\mathcal{P}_e(S)) = |\mathcal{H}| = \sum_{i=0}^{2p-1} \binom{n+s-i-1}{s-i}$$

が成り立つ．詳しい説明は文献表の [1], [8] を参照して下さい．

次にこの基底を用いて $X \times \mathcal{H}$ で添字付けられた行列 M を次のように定義する．すなわち $(u, g_{l,j}\varphi_{l,i}) \in X \times \mathcal{H}$ に対して M の $(u, g_{l,j}\varphi_{l,i})$ 成分を

$$M(u,\ g_{l,j}\varphi_{l,i}) = \sqrt{w(u)}g_{l,j}(u)\varphi_{l,i}(u)$$

で定義する．

この時次の命題が成立する．

命題 2. $0 \notin X$ かつ X は丁度 p 個の同心球面上にあるとする．この時 X が $2e$-デザインであると上に定義した行列 M に対して

$${}^tM\ M = I$$

が成り立つ．

注意 この命題 2 は実質的には Neumaier-Seidel [15] で与えられている．この命題から定理 DS（Delsarte- Seidel）の (1) の不等式が得られる．

次の補題は前述 3 頁にある補題である．

補題 上にのべた命題 2 と同じ条件のもとに X が p 個の同心球面上の tight $2e$-デザインであれば次の (1), (2) および (3) が成り立つ．
(1) $||x|| = ||y||$ であれば $w(x) = w(y)$ が成り立つ．すなわち w は各 X_i 上で定数値をとる．．
(2) 各 i, $1 \le\ i \le p$, に対して X_i は高々 e-距離集合である．
(3) もし w が X 全体で定数値をとるならば $p \le e$ が成り立つ．

注意 p 個の同心球面上の s-距離集合については [4] を参照にして下さい．

補題の証明の概略

X が p 個の同心球面上の tight $2e$-デザインであれば M は正方行列になる．従って命題より M は正則行列である．従って $M^t = M^{-1}$ であり $M^tM = I$ を得る．この時，Gegenbauer 多項式 Q_l を使った球面上の調和多項式の加法公式を用いて M^tM の成分を計算すると次の等式を得る：

$$(1)\quad (M^tM)(u,u) = w(u) \sum_{0\le l\le e,\ 0\le j\le \min\{p-1,[\frac{e-l}{2}]\}} ||u||^{2l} g_{l,j}(u)^2 Q_l(1) = 1,$$

$$(2)\quad (M^tM)(u,v) = \sqrt{w(u)w(v)} \times$$
$$\sum_{0\le l\le e,\ 0\le j\le \min\{p-1,[\frac{e-l}{2}]\}} ||u||^l ||v||^l g_{l,j}(u) g_{l,j}(v) Q_l(\frac{(u,v)}{||u||\ ||v||}) = 0,$$

ここで (u,v) は $\mathbf{R}^n$ のベクトルの標準内積を意味する.

$g_{l,j}(u)$ は u の定義から $g_{l,j}(u)$ は u の長さのみに依存することがわかる. 従って $w(u)$ も u の長さのみに依存する. また $u,\ v \in X_i$ であれば

$$\sum_{0\le l\le e,\ 0\le j\le \min\{p-1,[\frac{e-l}{2}]\}} ||u||^l||v||^l g_{l,j}(u)g_{l,j}(v)Q_l(\frac{(u,v)}{||u||\ ||v||})$$

は $\mathbf{R}^n$ のベクトルの標準内積 (u,v) に関する高々 e 次の多項式であるので X_i は半径 r_i の球面上の高々e-距離集合である. さらに ω が X 上で定数であれば上の (1) 式より

$$\sum_{0\le l\le e,\ 0\le j\le \min\{p-1,[\frac{e-l}{2}]\}} ||u||^{2l} g_{l,j}(u)^2 Q_l(1)$$

は X 上で定数値をとる. すなわち半径の値の可能性は高々e 個しかないことになり補題が正しいことがわかるのである. Gegenbauer 多項式および加法公式については [1] を参照して下さい.

この補題により初めてユークリッド空間の *tight* な 2e-デザインの構造が計算可能になったのである. 次に, 特に重み関数が定数であるユークリッド空間の *tight* な 4-デザイン X について考える (定義 T).

定理の証明

定義より $|X| = \binom{n+2}{2}$ かつ $p \ge 2$ が成り立つ. この時もし $0 \in X$ と仮定すると $X-\{0\}$ は $p-1$ 個の同心球面上の 4-デザインとなる. この時 $p \ge 3$ であれば定理 DS (Delsarte-Seidel) により $|X-\{0\}| \ge \binom{n+2}{2}$ となるので矛盾する. したがって $p=2$ でなければならない. この時 $|X-\{0\}| = \binom{n+2}{2} - 1$ となり $X-\{0\}$ は球面上の tight 4-デザインとなる ([1] を参照して下さい).

次に, もし $0 \notin X$ であれば X は p 個の同心球面上の tight 4-デザイン (定義 Tp) であるから補題の結果を使うと $p=2$ でなければならないことがわかる.

定理を証明するためには 2 つの同心球面上の tight 4-デザインが存在しないことを示せば良い. このことを示すには複雑な計算が必要である. 以下にその概略を述べる.

補題より $X = X_1 \cup X_2$ の 各 X_i は高々 2-距離集合であることが分かっている. いま $|X_1| \ge |X_2|$ と仮定しておく. 前述 2 頁にある命題 1 および補題により $w(u) \equiv 1, u \in X$, $r_1 = 1$ と仮定して良い. $R = {r_2}^2$ と定義しておく. この時 $\mathcal{H}_0 = \{g_{0,0},\ g_{0,1}\}$, $\mathcal{H}_1 = \{g_{1,0}\varphi_{1,i}\ |1 \le i \le N_1\}$ および $\mathcal{H}_2 = \{g_{2,0}\varphi_{2,i}\ |1 \le i \le N_2\}$ となる. また Gram-Schmidt の正規直交化により

$$g_{0,0}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{a_0}},\quad g_{0,1}(x) = \sqrt{\frac{a_0}{a_0a_2 - {a_1}^2}}(||x||^2 - \frac{a_1}{a_0}),\quad g_{1,0}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{a_1}},\quad g_{2,0}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{a_2}},$$

となる. ここで $a_i = \sum_{x\in X} w(x)||x||^{2i}$ 従って

$$a_0 = |X_1| + |X_2| = \binom{n+2}{2},\quad a_1 = |X_1| + (\binom{n+2}{2} - |X_1|)R,$$

$$a_2 = |X_1| + (\binom{n+2}{2} - |X_1|)R^2$$

となっている．これらを用いて前述 5 頁の式 (1) を計算すると

$$\begin{aligned}
&R^3(|X_1|-1)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)^2\\
&+2R^2|X_1|\Big(|X_1|-n-1\Big)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)\\
&+R|X_1|\Big(2|X_1|-n(n+1)\Big)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)\\
&+2|X_1|^2\Big(2|X_1|-n(n+3)\Big)=0.
\end{aligned}$$

が得られる．左辺の多項式を $F(n,|X_1|,R)$ と置く．また $u,\ v \in X_1$ に対して $A = ||u-v||^2$, $u,\ v \in X_2$ に対して $B = ||u-v||^2$ と置いて式 (2) をそれぞれ書き換えると X_1 上の 2 点間の距離 A は

$$\begin{aligned}
&(n+2)n|X_1|\Big\{2|X_1|+R\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)\Big\}A^2\\
&-4\Big\{\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)R^2+(n+2)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)R\\
&+2|X_1|(n+3)\Big\}|X_1|nA\\
&+4\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)^2R^3+8|X_1|(n+1)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)R^2\\
&+4|X_1|n(n+1)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)R\\
&+8n|X_1|^2(n+3)=0.
\end{aligned}$$

を満たさなければならず，X_2 上の 2 点間の距離 B は

$$\begin{aligned}
&n(n+2)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)\Big(2|X_1|+R((n+2)(n+1)-2|X_1|)\Big)B^2\\
&-4n\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)\times\\
&\Big\{(n+3)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)R^2+(2n|X_1|+4|X_1|)R+2|X_1|\Big\}B\\
&+4n(n+3)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)^2R^3\\
&+8|X_1|n(n+1)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)R^2\\
&+16|X_1|(n+1)\Big((n+2)(n+1)-2|X_1|\Big)R+32|X_1|^2=0
\end{aligned}$$

を満たさなければならないことが計算できる．もし $|X_2| < n+1$ とすると上記の B に関する 2 次方程式は実根を持たないことが示せる．従って $|X_2| \geq n+1$ の場合を考えれば良いことがわかる．

この時 $\frac{1}{2}\binom{n+2}{2} - (n+1) \geq |X_1| \geq \frac{1}{2}\binom{n+2}{2} > n+1$ である．1-距離集合の点の個数は $n+1$ で上からおさえられることが知られているので X_1 は丁度 2-距離集合となっていな

ければならない．この時次の Larman, Rogers　および Seidel により証明された 2-距離集合に関する定理が重要な役割を演じる（[14]）．

定理 LRS（ Larman-Rogers-Seidel ）　Y を $\mathbf{R}^n$ の 2-距離集合とする．$|Y| > 2n+3$ と仮定すると $k \le \sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}$ を満たす自然数が存在して Y の二つの距離 $\alpha > \beta$ の比 $\alpha : \beta$ は $\sqrt{k} : \sqrt{k-1}$ に等しい．

そこで X_1 の二つの距離 $\alpha > \beta$ とする．上に述べた様に R は R に関する 3 次の多項式 $F(n, |X_1|, R)$ の零点でなければならない．また定理 LRS により $(\frac{\beta}{\alpha})^2 = \frac{k-1}{k}$ となる自然数がなければならない．$(\frac{\beta}{\alpha})^2$ を考える代わりに $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ $(= (2k-1)^2)$ を考える．そうすると α, β は前述の A に関する 2 次式の根となっているので $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ を $n, |X_1|, R$ の有理関数として表すことができる．この有理関数を $G(n, |X_1|, R)$ とすると．

$$G(n, |X_1|, R) = \frac{G_1(n, |X_1|, R)^2}{G_2(n, |X_1|, R)}$$

と表されることが計算できる．ここで $G_1(n, |X_1|, R)$, $G_2(n, |X_1|, R)$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned}
&G_1(n, |X_1|, R) = n|X_1|\Big((2+n)(n+1) - 2|X_1|\Big)R^2 \\
&+n|X_1|(2+n)((2+n)(n+1) - 2|X_1|)R + 2n|X_1|^2(n+3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&G_2(n, |X_1|, R) \\
&= -n|X_1|\Big(-4|X_1| - 3n|X_1| + 4 + 8n + 5n^2 + n^3\Big)\Big(3n + n^2 + 2 - 2|X_1|\Big)^2 R^4 \\
&-4n|X_1|^2(2+n)\Big(3n + n^2 + 2 - 2|X_1|\Big)^2 R^3 \\
&+n|X_1|^2\Big(-8|X_1| - 2n^2|X_1| - 4n|X_1| + 5n^3 + 4n + n^4 + 8n^2\Big) \\
&\times\Big(3n + n^2 + 2 - 2|X_1|\Big)R^2 \\
&+4n^2|X_1|^3(2+n)\Big(3n + n^2 + 2 - 2|X_1|\Big)R \\
&+4n^2|X_1|^4(n+3).
\end{aligned}$$

また，各 $n, |X_1| \ge \frac{1}{2}\binom{n+2}{2}$ に対して $F(n, |X_1|, R) = 0$ となる R は開区間 $(0,1)$ の中に一意的に存在することが示せる．その根を $R(n, |X_1|)$ とする．この時 $G(n, |X_1|, R(n, |X_1|))$ は各 n について $|X_1|$ の関数として単調減少関数であることが陰関数の微分を行うことにより示すことが出来る．このことを利用して $G(n, |X_1|, R(n, |X_1|))$ が奇数の 2 乗（ $(2k-1)^2$ ）となり得ないことを示す．この計算は初等的なものであるが非常に長いものになるのでここでは触れない．また $n \le 6$ の場合は個別の計算が必要になるが二つの距離の比が具体的に計算できるのでそのような距離の比を持つ 2-距離集合が存在しないことは Einhorn-Schoeneberg（[9]）の結果を用いて示すことができる．

重み関数が定数でない tight 4-デザインの例

前述の補題は重み関数 ω が定数でない場合にも適用出来る. ω が定数でない場合には tight 4-デザインであっても今のところ p は 2 個以上であることしか分からないが $\mathbf{R}^2$ の中には次の例の様に正三角形を 2 つ組み合わせることによって tight 4-デザインを構成することが出来る.

$\mathbf{R}^2$ の中の 6 点集合 X を次の様に定義する：

$$X = \{\left(1,0\right), \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{r}{2},\frac{r\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{r}{2},\frac{r\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{r}{2},-\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)\},$$

ここで r は $r \neq 1$ を満たす任意の正の実数として良い. $X_1 = \{(1,0), (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})\}$ は半径 1 の円周上に頂点を持つ正三角形 $X_2 = \{(\frac{r}{2},\frac{r\sqrt{3}}{2}), (\frac{r}{2},-\frac{r\sqrt{3}}{2})\}$ は半径 r の円周上に頂点を持つ正三角形となっている. 重み ω を

$$w(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in X_1 \\ \frac{1}{r^3} & \text{for } x \in X_2. \end{cases}$$

で定義すると X は 4-デザインになる. $r = 1$ の場合にも X は 4-デザインになるが X の 6 個の点は単位円周上に乗ってしまう. Neumaier と Seidel ([15]), Delsarte と Seidel ([8]) は自明で無いユークリッド空間の tight 4-デザインは重みが定数でない場合も含めて存在しないことを予想したが (Conjecture 3.4, [15]) 上記の例はその予想の反例となっている.

References

[1] 坂内英一・坂内悦子, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガー・東京 1999.

[2] E. Bannai and R. M. Damerell, *Tight spherical designs I*, J. Math. Soc. Japan 31 (1979) 199-207.

[3] E. Bannai and R. M. Damerell, *Tight spherical designs II*, J. London Math. Soc. 21 (1980) 13-30.

[4] E. Bannai, K. Kawasaki, Y. Nitamizu, and T. Sato, *An upper bound for the cardinality of an s-distance set in Euclidean space*, to appear in Combinatorica.

[5] E. Bannai, A. Munemasa and B. Venkov, *The nonexistance of certain tight spherical designs*, preprint.

[6] G. E. P. Box and J. S. Hunter, *Multi-fuctor experimental designs for exploring response surfaces*, Ann. Math. Statist. 28, (1957)195–241

[7] P. Delsarte, J.-M. Goethals and J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geom. Dedicata 6 (1977) 363-388.

[8] P. Delsarte and J. J. Seidel, *Fisher tipe inequalities for Euclidean t-designs*, Lin. Algebra and its Appl. 114-115 (1989) 213-230.

[9] S. J. Einhorn and I. J. Schoeneberg, *On Euclidean sets having only two distances between points I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. 28 (1966) 479–488.

[10] S. J. Einhorn and I. J. Schoeneberg, *On Euclidean sets having only two distances between points II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. 28 (1966) 489–504.

[11] A. Erdélyi et al. *Higher transcendental Functions, Vol II, (Bateman Manuscript Project)*, MacGraw-Hill (1953).

[12] S. Karlin and W. J. Studden, *Tchebycheff Systems with Application in Analysis and Statistics*, Interscience, 1966.

[13] J. Kiefer, *Optimum designs V, with applications to systematic and rotatable designs*, Proc. 4th Berkeley Sympos. 1, (1960) 381–405.

[14] D. G. Larman, C. A. Rogers and J. J. Seidel, *On two-distance sets in Euclidean space*, Bull London Math. Soc.) (1977) 261-267.

[15] A. Neumaier and J. J. Seidel, *Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 91=Indag. Math. 50 (1988) 321-334.

[16] A. Neumaier and J. J. Seidel, *Measures of strength* 2e *and optimal designs of degree* e, Sankya 54 (1991) 299-309.