

穴あき曲面群の  $SL(2, \mathbb{C})$  表現とトレース恒等式<sup>1</sup>

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 中西敏浩(Toshihiro Nakanishi)  
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

**0. 序.** このノートの目的は、穴あき曲面群の忠実な  $PSL(2, \mathbb{C})$  表現の空間にある座標系を導入し、それらがみたすべき恒等式 (トレース恒等式) と写像類群の作用の有理写像表現を与えることである。まずは一つの例で研究の動機を説明する。

穴あきトーラス群とは、2つの  $SL(2, \mathbb{C})$  の行列  $A, B$  で、交換子  $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$  が放物型かつ  $\text{tr}[A, B] = -2$  をみたすものによって生成される階数 2 の自由群であるとする。こうした穴あきトーラス群の標準生成系の順序対  $(A, B)$  全体を考え、同値関係

$$(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2) \Leftrightarrow \text{ある } C \in SL(2, \mathbb{C}) \text{ があって } A_2 = C^{-1}A_1C, B_2 = C^{-1}B_1C$$

による商空間を  $\mathcal{R}'_1$  で表わす。  $\{A, B\} \in \mathcal{R}'_1$  に対して  $x = \text{tr}A, y = \text{tr}B, z = \text{tr}AB$  とおくと、これらは、いわゆる Markov の方程式をみたす。

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = xyz.$$

逆に (1) をみたす  $x, y, z \in \mathbb{C}^\times$  が与えられると  $x = \text{tr}A, y = \text{tr}B, z = \text{tr}AB$  である  $\{A, B\} \in \mathcal{R}'_1$  が一意的に定まる。換言すると (1) をみたす  $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^\times)^3$  は  $\mathcal{R}'_1$  に座標系を定める。次に穴あきトーラス群の写像類群  $\mathcal{MC}'_1$  の  $(x, y, z)$  座標への作用を見る。 $\mathcal{MC}'_1$  は2元  $S : \{A, B\} \mapsto \{A, BA\}$  と  $T : \{A, B\} \mapsto \{ABA^{-1}, A^{-1}\}$  で生成される。 $S$  の作用により  $(\text{tr}A, \text{tr}B, \text{tr}AB)$  は  $(\text{tr}A, \text{tr}BA, \text{tr}ABA)$  に写されるから、 $S$  は写像  $S_*(x, y, z) = (x, z, xz - y)$  を定める。同様にして

$$(2) \quad S_*(x, y, z) = (x, z, xz - y), \quad T_*(x, y, z) = (y, x, xy - z).$$

$\sigma = TSTS^{-1}$  を考える。 $\sigma$  は双曲的であり<sup>2</sup>、 $\sigma_*$  は点  $\tau = \left(\frac{3 - \sqrt{-3}}{2}, \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}\right)$  およびその複素共役を固定する。今  $\tau$  に対応する  $\{A, B\}$  の代表系  $A, B$  を選ぶと、 $\sigma$  は  $\{A, B\}$  を固定するので、ある  $C \in SL(2, \mathbb{C})$  が存在して

$$(ABA^{-3}, A^2B^{-1}A^{-1}) = \sigma(A, B) = (C^{-1}AC, C^{-1}BC).$$

このとき  $A, B, C$  によって生成される群  $\Gamma$  は  $SL(2, \mathbb{C})$  の離散部分群(すなわちクライン群)であり、8の字結び目群と通約的(commensurable)である。 $\sigma$  を定める  $S$  の自己同相写像を  $h$  とする

<sup>1</sup>2003年度日本数学会年会における関数論分科会特別講演の抽象トラクトに手を加えて、境界付きの曲面の場合に拡充し、さらに放物的変換の章その他を増補した。

<sup>2</sup>Bers 流の分類[Ber]による。 $S \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の対応で  $\mathcal{MC}'_1$  から  $PSL(2, \mathbb{Z})$  への同型を得る。穴あきトーラス群という特殊な場合は  $\sigma_*$  が双曲的であることは、 $|\text{tr } \sigma| = 3$  からわかる。

と、 $M$  は穴あきトーラス  $S$  と区間  $I = [0, 1]$  との積  $S \times I$  の境界の点  $(x, 0) \in S \times \{0\}$  と点  $(h(x), 1) \in S \times \{1\}$  を同一視して得られ、円周  $S^1$  上のファイバー空間の構造をもつ。

$S^1$  上のファイバー構造をもつ双曲多様体を見いだすこうした方法を一般の曲面に適用できるようにしたい<sup>3</sup>。そのためには、写像類群の作用が (2) のように具体的に表示できるような曲面群の座標系を  $PSL(2, \mathbb{C})$  表現空間に導入する必要がある。もしその座標空間のすべての点が  $PSL(2, \mathbb{C})$  表現空間の点を表わすとは限らないのならば、どこにそれが存在するかを示すもの、すなわち (1) に相当する式も必要になる。

## 1. トレース恒等式

### 1.1. 以下、行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を  $(a \ b|c \ d)$  で表わすこともある。 $SL(2, \mathbb{C})$  に属する行列  $(a \ b|c \ d)$  は Riemann 球面  $\hat{\mathbb{C}}$  に一次分数変換  $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$  として作用する。 $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$  は次のトレース恒等式をみたす:

$$(3) \quad \text{tr}A = \text{tr}A^{-1}$$

$$(4) \quad \text{tr}AB + \text{tr}AB^{-1} = \text{tr}A\text{tr}B.$$

さらに (3) (4) を用いて  $SL(2, \mathbb{C})$  の 3 つの行列に対して次が成り立つことを示すことができる。

$$(5) \quad \text{tr}ABC = \text{tr}A\text{tr}BC + \text{tr}B\text{tr}CA + \text{tr}C\text{tr}AB - \text{tr}A\text{tr}B\text{tr}C - \text{tr}BAC.$$

これらのトレース恒等式を用いて他のさまざまなトレース恒等式を導くことができる。このことに関する一般的な記述は [Bus, 2.6] を参照のこと。最も興味深いものの一つに次の “Ptolemy equation” がある。後に写像類群の有理写像表現に応用される:

**命題 1.**  $A, B, C, D \in SL(2, \mathbb{C})$  とし  $x = (\text{tr}A + \text{tr}BCD)$ ,  $y = (\text{tr}B + \text{tr}CDA)$ ,  $z = (\text{tr}C + \text{tr}DAB)$ ,  $w = (\text{tr}D + \text{tr}ABC)$ ,  $u = (\text{tr}AB + \text{tr}CD)$ ,  $v = (\text{tr}BC + \text{tr}AD)$  を定める。もし  $\text{tr}ABCD = -2$  ならば

$$(6) \quad xz + yw = uv.$$

証明は付録 A にある。

**1.2  $R'_{0,2}$  の場合.**  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とおく。表現空間  $R'_{0,2}$  は以下の条件をみたす  $SL(2, \mathbb{C})$  の行列の対の同値類の空間とみなすことができる:  $A$  と  $B$  は階数 2 の自由群を生成する。 $AB$  は放物型で  $\text{tr}AB = -2$ 。このとき次の補題から  $\{A, B\} \in R'_{0,2}$  に対して  $\text{tr}A + \text{tr}B \neq 0$  が示せる。

<sup>3</sup>例にあげたのは非常に特殊で、一般には (もちろん双曲型の写像類を選んだとして) 多くの不動点が存在し、その中の複素共役や外部自己同型を除いたたった一つが離散表現に対応する。ここで離散性の判定という厄介な問題につきあたることになる。また (2) は多項式写像であるが、これも穴あきトーラスの場合の特殊性である。

**補題 1.**  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$  に対して  $AB$  が放物的で  $\text{tr}AB = -2$  であるとき,  $p$  を  $AB$  の固定点とすると  $\text{tr}A + \text{tr}B = 0$  であるための必要十分条件は  $B(p) = p$ .

**証明.**  $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  と仮定してよい。もし  $\infty = B(\infty) = A^{-1}(\infty)$  ならば,  $A, B$  は次のように表示される:

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & \beta \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}.$$

仮定より  $ab = -1$ , したがって  $\text{tr}A + \text{tr}B = 0$ .

次に  $B(\infty) = A^{-1}(\infty) \neq \infty$  であるとする。必要ならば適当な共役に置き換えて  $B(\infty) = 0$  としてよい。このとき  $A$  と  $B$  は次の形をしている:

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} -a & 1/\lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda \\ -\lambda & -b \end{pmatrix},$$

ここで  $\lambda = -(\text{tr}A + \text{tr}B)$  かつ  $\lambda \neq 0$ .

**系 1.** もし  $a, b \in \mathbb{C}$  が  $\lambda = a + b \neq 0$  をみたせば,  $\text{tr}A = -a$ ,  $\text{tr}B = -b$  かつ  $\text{tr}AB = -2$  であるような類  $\{A, B\}$  が一意的存在する。

数式 (7) における行列に対して  $A(\infty) - B(\infty) = a/\lambda - 0$ . この値は  $A, B$  を  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  と可換な  $SL(2, \mathbb{C})$  で共役で置き換えても不変だから

**系 2.**  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  とする。もし  $\{A, B\} \in R'_{0,2}$  が  $\text{tr}AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  および  $\lambda = -(\text{tr}A + \text{tr}B) \neq 0$  をみたせば

$$(8) \quad A(\infty) - B(\infty) = -\text{tr}A/\lambda.$$

**1.3.**  $A, B$  は補題 1 の条件をみたすとし, 一般性を失うことなく  $D = AB$ ,  $D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  であるとする。もし  $B(\infty) = A^{-1}(\infty) = \infty$ , ならば  $A$  の  $(2,1)$  成分は 0. このとき交換子  $ADA^{-1}D^{-1}$  は  $D$  と可換。よって、もし  $A$  と  $B$  が階数 2 の自由群を生成するならば  $\text{tr}A + \text{tr}B \neq 0$ .

$R'_{0,3}$  の場合 次の命題は [Luo, NäNa2] において見いだせる。

**命題 2.**  $A, B, C \in SL(2, \mathbb{C})$  は  $D = (ABC)^{-1}$  をみたすとする。このとき  $x = -\text{tr}BC$ ,  $y = -\text{tr}CA$ ,  $z = -\text{tr}AB$ ,  $a = -\text{tr}A$ ,  $b = -\text{tr}B$ ,  $c = -\text{tr}C$ ,  $d = -\text{tr}D$  は

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz + (ad + bc)x + (bd + ca)y + (cd + ab)z + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abcd - 4 = 0.$$

をみたす。とくに  $-d = \text{tr}D = -2$  ならば  $\lambda_1 = x + a$ ,  $\lambda_2 = y + b$ ,  $\lambda_3 = z + c$  は次式を満足する。

$$(9) \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + a\lambda_2\lambda_3 + b\lambda_3\lambda_1 + c\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

命題 3.  $a, b, c \in \mathbb{C}$  とする。もし  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^\times$  が (9) をみたせば  $\text{tr}ABC = -2$ ,  $a = -\text{tr}A$ ,  $b = -\text{tr}B$ ,  $c = -\text{tr}C$ ,  $\lambda_1 = a - \text{tr}BC$ ,  $\lambda_2 = b - \text{tr}CA$ ,  $\lambda_3 = c - \text{tr}AB$  であるような  $SL(2, \mathbb{C})$  の行列の3つ組の同値類  $\{A, B, C\}$  が一意的に存在する。

$\{A, B, C\}$  の代表を付録 B で与えている。

系. 命題 3 の条件の下で、 $ABC = D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ならば次が成り立つ。

$$(10) \quad BC(\infty) - C(\infty) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3}.$$

## 2. 穴あき曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間.

2.1.  $F = F_{g,m}$  を種数  $g \geq 1$  のコンパクト向き付け可能閉曲面とし、 $C_1, \dots, C_m$  をその境界成分とする。 $p$  を  $F$  の点とし、 $F' = F - \{p\}$  とおく。このとき基本群  $\pi_1(F')$  は次の群表示をもつ:

$$\pi_1(F') = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_m, d : [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] c_1 \cdots c_m d = 1 \rangle.$$

ここで  $c_k$  は  $C_k$  にホモトピックな単純閉曲線の、 $d$  は  $p$  の回りを一周する単純閉曲線のホモトピー類である。表現空間

$$\mathcal{R}'_{g,m} = \{ \rho : \pi_1(F') \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) : \rho \text{ は忠実な表現で、} \rho(d) \text{ は放物型かつ } \text{tr} \rho(d) = -2 \} / SL(2, \mathbb{C})$$

を考える。 $SL(2, \mathbb{C})$  において共役な表現は同じものと見なしている<sup>4</sup>。付加条件  $\text{tr} \rho(d) = -2$  は離散表現については成立している。

$\mathcal{R}'_{g,m}$  において共役な表現は同一視されているので、いくつかの  $\pi_1(F')$  の元  $x_1, \dots, x_n, \dots$  を選んで、それらの定めるトレース関数  $\rho \mapsto \text{tr} \rho(x_n)$  の族を  $\mathcal{R}'_g$  の座標として採用するのは自然な考えである(たとえば [Luo] 参照)。ここでは写像類群の作用の具体的表示を得るために、トレース関数の一つの variation である  $\lambda$  座標というものを導入する。

2.2.  $\lambda$  length.  $S^1 = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$  を単位円周とする。単純閉曲線

$$\bar{c} : (S^1, S^1 - \{1\}, 1) \rightarrow (F, F', p)$$

の  $S^1 - \{1\}$  への制限  $c = \bar{c}|_{S^1 - \{p\}}$  あるいは、その像を ideal arc と呼ぶ。 $\bar{c}$  の正則近傍の境界は2つの単純閉曲線  $c', c'' \subset F'$  からなる。 $\rho \in \mathcal{R}'_g$  とし、その代表元も  $\rho$  で表わすことにしておく。トレース関数は、自由ホモトピー類(曲線の向きも気にしない)の集合を定義域にしているので

$$\lambda(c, \rho) = -(\text{tr} \rho(c') + \text{tr} \rho(c''))$$

<sup>4</sup>ここでは  $SL(2, \mathbb{C})$  表現を考えている。 $P : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$  を射影とする。 $\nu_k$  を2以上の整数とし、 $c_k^{\nu_k} = 1$  を群表示に付け加えた場合、 $\rho \in \mathcal{R}'_{g,m}$  が忠実であるという条件を  $P \circ \rho$  が忠実であるという条件に置き換えて後の議論を同様に行なうことができる。

が定まる。これを ideal arc  $c$  の  $\rho$  に関する  $\lambda$  length という。

(1)  $\lambda$  length の名前は、 $\rho$  が Fuchs 群表現であるとき、 $\lambda(c, \rho)$  が Penner [Pe1] が導入した(特別な場合における)  $\lambda$  length と符号を無視すれば一致することに由来する。後の写像類群の有理写像表現も Penner のアイデアに依っている。

(2)  $\lambda$  length の定義でトレースのマイナスを考えているのは、Fuchs 群表現に制限すればすべての  $\lambda$  length が正となるように行列を選ぶことができるからである。([Zie] も参照)。

**2.3. ideal triangulation.** ideal arc の組  $\Delta = (c_1, c_2, \dots, c_d)$  は、 $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_d$  の補空間の連結成分が三角形あるいは  $F$  の境界を含む円環領域(annulus)になっているとき  $F'$  の ideal triangulation を定めるという。あるいは  $\Delta$  そのものを  $F'$  の ideal triangulation と呼ぶ。このとき Euler 標数の計算により  $\Delta$  の ideal arc の個数は  $d = 6g + 2m - 3$ , また三角形の数は  $n = 4g + m - 2$  である。この章の目標である ideal triangulation 上の  $\lambda$  length たちが  $\mathcal{R}'_g$  上の大域座標系を与えることを述べる。

以下、 $\Delta = (c_1, c_2, \dots, c_d)$  において  $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m$  はそれぞれ  $F$  の境界成分  $C_1, \dots, C_m$  に ( $F$  において)ホモトピックであるとしておく。 $\mathcal{R}'_{g,m}$  が与えられたとき、 $\rho(c_k)$  は  $\rho(C_k)$  を意味するものとする。

**定理 1.**  $\Delta = (c_1, c_2, \dots, c_d)$  を  $F'$  の ideal triangulation とする。このとき  $\text{tr}\rho(c_1), \dots, \text{tr}\rho(c_m)$  の値を固定したとき、写像

$$\iota_\Delta : \mathcal{R}'_{g,m} \longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^d \quad \rho \mapsto (\lambda(c_1, \rho), \dots, \lambda(c_d, \rho))$$

は単射である。

さらに  $\iota_\Delta$  の像がどこにあるかを知ること、すなわち (1) に相当する  $\lambda(c_1, \rho), \dots, \lambda(c_d, \rho)$  がみたすべき式を書き下すことができる。

**定義.**  $T$  を ideal triangulation  $\Delta$  の三角形(すなわち  $F' - \bigcup_{k=1}^d C_k$  の連結成分で三角形であるもの)とする。もし  $T \cup \{p\}$  の正則近傍  $N$  が 2 次元球面から互いに交わらない 3 円板を取り除いたものと同相であれば、 $T$  は untwisted であるという。そうでないとき、 $N$  はトーラスから 1 つの円板を取り除いたものと同相であり、 $T$  は twisted であるという[Mos].

**2.4.**  $\Delta$  の三角形を  $T_1, \dots, T_n$  とする。さらに各  $T_k$  の辺を  $c_{k1}, c_{k2}, c_{k3} \in \Delta$  とする。 $\rho \in \mathcal{R}'_g$  に対して

$$s(T_k, \rho) = \epsilon(T_k) \left( \frac{\lambda(c_{k1}, \rho)}{\lambda(c_{k2}, \rho)\lambda(c_{k3}, \rho)} + \frac{\lambda(c_{k2}, \rho)}{\lambda(c_{k3}, \rho)\lambda(c_{k1}, \rho)} + \frac{\lambda(c_{k3}, \rho)}{\lambda(c_{k1}, \rho)\lambda(c_{k2}, \rho)} \right)$$

とおく<sup>5</sup>。ここで  $T$  が untwisted ならば  $\epsilon(T) = +1$ , twisted ならば  $\epsilon(T) = -1$  である。

**定理 2.** (トレース恒等式) 任意の  $\rho \in \mathcal{R}'_{g,m}$  に対して

$$\sum_{k=1}^n s(T_k, \rho) - \sum_{k=1}^m \frac{\text{tr}\rho(c_k)}{\lambda(\rho, c_k)} = 1.$$

<sup>5</sup> $\rho$  が忠実な表現なので  $\lambda(c, \rho)$  は決して 0 にならないことを注意しておく。

これで最初の例で述べた  $S^1$  上のファイバー構造をもつ 3 次元双曲多様体(ただしファイバーは穴あき曲面)を見つけるためのレシビの前半部分、すなわちトレース恒等式 (1) の一般化が完成した。穴あきトーラスの場合は、任意の 2 つの ideal triangulation が写像類群の作用で同値であるから一種類のトレース恒等式 (1) だけで済むけれども、 $g \geq 2$  のときは ideal triangulation の曲面上のグラフとしての同型類の数だけトレース恒等式が存在する。それだけ扱いは厄介になる(1 点穴あき種数  $g$  の面  $F'_g$  の場合、その同型類は  $(g-1) \times (g-1)!/2$  個以上ある [Pe2])。

### 3. 写像類群.

**3.1. 写像類群  $\mathcal{MC}'_g$**  とは、向きを保つ同相写像  $h: (F, p) \rightarrow (F, p)$  のアイソトピー類のなす群である。今  $\Delta = (c_1, c_2, \dots, c_d)$  を  $F'$  の ideal triangulation とする。 $[h] \in \mathcal{MC}'_g$  に対し、 $h\Delta = (h(c_1), h(c_2), \dots, h(c_d))$  も  $F'$  の ideal triangulation である。写像類  $[h]$  が引き起こす座標変換

$$\varphi_{h\Delta, \Delta} = \iota_{h\Delta} \circ \iota_{\Delta}^{-1} : \iota_{\Delta}(\mathcal{R}'_{g,m}) \rightarrow \iota_{h\Delta}(\mathcal{R}'_{g,m})$$

が有理写像であることを見るのがこの章の目的である。

**3.2. elementary moves**  $F'$  の ideal triangulation  $\Delta$  の辺  $e \in \Delta$  を一つ選ぶ。 $e$  に隣接する三角形  $S_1, S_2$  が存在する場合は、 $a, b, e$  を  $S_1$  の辺、 $c, d, e$  を  $S_2$  の辺とし、四辺形  $Q = S_1 \cup e \cup S_2$  において  $a$  と  $c$  が互いの対辺であるとする。 $e$  を  $Q$  のもう一つの対角線  $f$  に置き換えることによって新しい ideal triangulation  $\Delta' = (\Delta - \{e\}) \cup \{f\}$  が得られる。 $\Delta$  の辺  $a \in \Delta$  が  $F$  の境界曲線にホモトピックな場合、 $a$  を図 (2) のような ideal arc  $d$  に置き換えることによって新しい ideal triangulation  $\Delta' = (\Delta - \{a\}) \cup \{d\}$  が得られる。こうした ideal triangulation の改変操作を elementary move という。

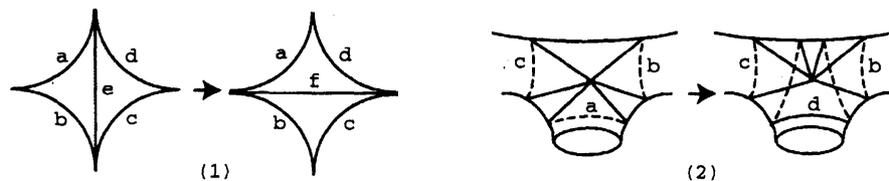


Figure 1. Elementary move

上の図 (1) は  $e$  とそれに隣接する三角形を普遍被覆面に持ち上げたものと見てください。

$\rho \in \mathcal{R}'_{g,m}$  とし  $\lambda_a = \lambda(a, \rho)$ ,  $\lambda_b = \lambda(b, \rho)$ ,  $\lambda_c = \lambda(c, \rho)$ ,  $\lambda_d = \lambda(d, \rho)$ ,  $\lambda_e = \lambda(e, \rho)$ ,  $\lambda_f = \lambda(f, \rho)$  とおく。図 (1) の elementary move では、 $\lambda_f$  は残りの  $\lambda$  lengths をもちいて次のように表わされる。

$$(11) \quad \lambda_f = \frac{\epsilon_1 \lambda_a \lambda_c + \epsilon_2 \lambda_b \lambda_d}{\lambda_e}.$$

ただし  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ) は以下のように定める。 $T_1$  を  $a, d, f$  を辺にもつ  $\Delta'$  の三角形、 $T_2$  を  $b, c, f$  を辺にもつ  $\Delta'$  の三角形とする。もし  $S_1$  と  $S_2$  が同じ parity もつ(すなわち、どちらも twisted である、あるいはどちらも untwisted である)ときは  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1, 1)$  である。それ以外の場合  $S_1$  と  $T_1$  が同じ parity をもつときは  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1, 1)$ , 異なる parity をもつときは  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1, -1)$  である。数式 (11) は Ptolemy equation の応用である。図 (2) の elementary moves では、 $\lambda_d$  は残りの  $\lambda$  lengths をもちいて次のように表わされる。

$$(12) \quad \lambda_d = -c\lambda_b - b\lambda_c + \lambda_b\lambda_c - \lambda_a.$$

これは (9) の応用である。(11) により

$$\varphi_{\Delta', \Delta} = \iota_{\Delta'} \circ \iota_{\Delta}^{-1} : (\cdots, \lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_e, \cdots) \mapsto (\cdots, \lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_f, \cdots)$$

は有理写像であることがわかる。図(2) の elementary move の場合も同様である。

**補題.** [Pe1, Hat] 任意の 2 つの ideal triangulations  $\Delta, \Delta'$  に対して elementary move の有限列  $\Delta = \Delta_0 \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \Delta_p = \Delta'$  が存在する。

$\Delta$  を一つ固定する。 $[h] \in \mathcal{MC}'_g$  に対し、上の補題をもちいて elementary move 列  $\Delta = \Delta_0 \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \Delta_p = h\Delta$  を見つけると

$$h_* = \varphi_{h\Delta, \Delta} = \varphi_{\Delta_p, \Delta_{p-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{\Delta_1, \Delta_0}$$

は有理写像の合成としてやはり有理写像である。まとめると

**定理 3.** 写像類群  $\mathcal{MC}'_{g,m}$  は  $(\mathbb{C}^\times)^{6g+2m-3}$  に有理写像として作用する。

こうしてレシピの後半部分も完成した。実際に応用してみよう。実は種数が 2 のときでさえ計算は恐ろしく大変である。2つ穴あきトーラス群を考えてみる。この群は

$A, B, C$  で生成される階数 3 の自由群で、 $C, D = [A, B]C$  は放物型、 $\text{tr}D = -2$ .

ある ideal triangulation のもとで、 $\lambda$  lengths は  $x = -(\text{tr}A + \text{tr}BA^{-1}B^{-1}C)$ ,  $y = -(\text{tr}B + \text{tr}B^{-1}C)$ ,  $z = -(\text{tr}A + \text{tr}AC)$ ,  $u = -(\text{tr}AB + \text{tr}A^{-1}B^{-1}C)$ ,  $v = -(\text{tr}C + \text{tr}ABA^{-1}B^{-1})$  となり、定理 2 でいうトレース多項式は、

$$u^2vx + vxy^2 + u^2vz + vx^2z + vy^2z + vxz^2 - uv^2y - ux^2y - uyz^2 - 2uxyz + uvxyz = 0.$$

いくつかの写像類(ここでは曲面群の外部自己同型としての標準生成系  $(A, B, C)$  への作用で表わす)

$$\begin{aligned} \varphi_1(A, B, C) &= (A, BA, C) \\ \varphi_2(A, B, C) &= (ABA^{-1}, A^{-1}, C), \\ \varphi_3(A, B, C) &= (A, BA^{-1}B^{-1}CB, BA^{-1}B^{-1}CBAB^{-1}) \end{aligned}$$

の有理表現は

$$\begin{aligned} \varphi_{1*} &: \left( x, u, z, \frac{u^2 + xz}{y}, v \right) \\ \varphi_{2*} &: \left( y, z, \frac{-vy^2 - vxz + uyz}{ux}, \frac{y^2 + xz}{u}, v \right) \\ \varphi_{3*} &: \left( x, \frac{-uvy + xy^2 + x^2z}{uz}, \frac{-u^2vx + uv^2y + ux^2y - vxy^2 - vx^2z}{vyz}, \frac{-uv + xy}{z}, \frac{(u^2v - uxy + uvxy + vy^2 + vxz - uyz)^2}{u^2vy^2} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで  $(x, y, z, u, v)$  のそれぞれの写像による像だけを記した。

$\phi = \varphi_1 \varphi_3^{-1} \varphi_2$  は固定点  $\tau = (-4, -4, -4 + 8\sqrt{-1}, -8, -8 - 8\sqrt{-1})$  をもつ。この点に対応する群は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{17-5\sqrt{-1}}{4} & -6 + \frac{21\sqrt{-1}}{8} \\ 1 & \frac{-5+\sqrt{-1}}{4} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{5+11\sqrt{-1}}{4} & \frac{-18+37\sqrt{-1}}{8} \\ -1 + 2\sqrt{-1} & \frac{7-15\sqrt{-1}}{4} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{-25+25\sqrt{-1}}{4} \\ 2 + 2\sqrt{-1} & -6 \end{pmatrix}$$

であり

$$ABA^{-1}B^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

をみます。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 + \sqrt{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと  $(\phi(A), \phi(B), \phi(C)) = (M^{-1}AM, M^{-1}BM, M^{-1}CM)$ .  $\Gamma$  を  $A, B, C, M$  で生成される群とする。 $\mathbb{H}^3/\Gamma$  は 2 穴あきトーラスをファイバーとする  $S^1$  上のファイバー構造をもつ。 $\mathbb{H}^3/\Gamma$  は  $S^3$  における Whitehead link の補空間と同相である。

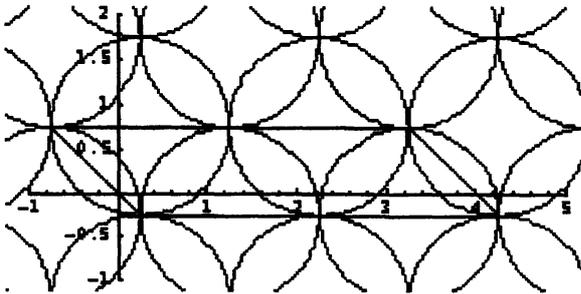


Figure 2.  $\Gamma$  のいくつかの元の isometric circle を描いたもの。平行四辺形は  $\infty$  の固定部分群の基本領域

4. 応用. 最後に  $\lambda$  length 座標のいくつかの応用を与える。

4.1. 写像類群の作用で不変な正則 2 次形式.  $\Delta$  を  $F'_{g,m}$  の ideal triangulation とする。3.4 節と同じ記号の下で、 $\lambda_{ki} = \lambda(c_{ki}, \cdot)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , とおくと

$$\Omega = \sum_{k=1}^n (d\lambda_{k1} \wedge d\lambda_{k2} + d\lambda_{k2} \wedge d\lambda_{k3} + d\lambda_{k3} \wedge d\lambda_{k1})$$

は写像類群  $\mathcal{MC}'_{g,m}$  の作用で不変である。これを(第1種の) Fuchs 群表現の空間に制限したのは Weil-Peterssen 形式である [Pe2].

4.2. 放物型変換.  $a_1, \dots, a_g$  を  $F'_{g,m}$  上の互いに交わらない単純閉曲線の組で、どの2つもアイソトピックでないとする。  $\tau_i$  で  $a_i$  における Dehn twist を表わすものとする。  $(n_1, \dots, n_g) \in \mathbb{Z}^g - \{(0, \dots, 0)\}$  とし、  $\tau = \tau_1^{n_1} \dots \tau_g^{n_g}$  とおく。このとき  $\tau$  (したがって何乗かすると  $\tau$  となる写像類) は忠実な表現空間  $\mathcal{R}'_{g,m}$  に固定点をもたない。このことを一つの例で見る。

表現  $\rho \in R'_{0,3}(a, b, c)$  を任意に選ぶ。ここで  $(a, b, c) \in (\mathbb{C}^\times)^3$  とする。  $A, B, C$  を  $\Gamma = \rho(G'_{0,3})$  の標準生成系とし、  $a = -\text{tr}A, b = -\text{tr}B, c = -\text{tr}C$  とおく。以下、Figure 3 を参照しながら話を進める。ideal arc  $a$  と  $b$  の上の elementary move の合成は閉曲線  $e$  における Dehn twist  $\tau$  である。  $\lambda'_a$  と  $\lambda'_b$  をそれぞれ  $\rho$  に関する  $a', b'$  の  $\lambda$  lengths とする。

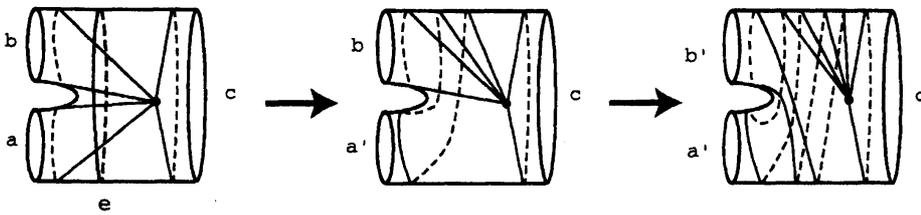


Figure 3

(12) を用いて

$$(13) \quad \lambda'_a = -\lambda_a + \lambda_b \lambda_c - c \lambda_b - b \lambda_c, \quad \lambda'_b = -\lambda_b + \lambda'_a \lambda_c - c \lambda'_a - a \lambda_c.$$

$\tau$  の有理表現は  $\tau_*(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) = (\lambda'_a, \lambda'_b, \lambda_c)$ . (13) により  $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x} + \lambda_c \mathbf{v}$ , ここで

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \lambda'_a \\ \lambda'_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\lambda_c - c) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\lambda_c - c) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_c - c \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \lambda_c - c \\ -(\lambda_c - c) & (\lambda_c - c)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

は  $SL(2, \mathbb{C})$  の行列であるから、もしそれが対角化不可能ならば、  $-\text{tr}(AB) = \lambda_c - c \neq 0$  より、そのときの  $P$  の固有値は 1 である。

今、ある整数  $n \geq 1$  に対して  $\tau_*^n$  が  $R'_{0,3}(a, b, c)$  に固定点をもったとする。このとき、ある  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$  が見つかって

$$(I + P + \dots + P^{n-1})((P - I)\mathbf{x} + \lambda_c \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

$P$  が対角化可能ならば  $\text{tr}P = (\lambda_c - c)^2 - 2 = \xi + \xi^{-1}$  をみたす 1 の  $n$  乗根  $\xi$  が存在し  $\text{tr}AB = -\lambda_c + c = \pm(\xi^{1/2} + \xi^{-1/2})$ . これは  $\rho$  が忠実な表現であることに反する。  $P$  が対角化不可能ならば、その固有値は 1 であり  $I + P + \dots + P^{n-1}$  は正則行列。したがって、  $(P - I)\mathbf{x} + \lambda_c \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .  $(\lambda_c - 2)^2 \neq 4$  のときは  $\mathbf{x} = -(P - I)^{-1} \lambda_c \mathbf{v}$  を (9) に代入して  $\text{tr}[A, B] = 2$  を得る。それ以

外の場合も  $(\text{tr}A, \text{tr}B, \text{tr}AB) = (\pm 2, \mp 2, 2)$  あるいは  $(\text{tr}A, \text{tr}B, \text{tr}AB) = (\pm 2, \pm 2, -2)$ , したがってこの場合も  $\text{tr}[A, B] = 2$  を得る。よって  $\rho$  が忠実な表現であることに反する。以上のことより、すべての  $n \geq 1$  に対して  $\tau_*^n$  は  $R'_{0,3}(a, b, c)$  に固定点をもたない。

付録.

**A. Ptolemy equation の証明.**  $x = (\text{tr}A + \text{tr}BCD)$ ,  $y = (\text{tr}B + \text{tr}CDA)$ ,  $z = (\text{tr}C + \text{tr}DAB)$ ,  $w = (\text{tr}D + \text{tr}ABC)$ ,  $u = (\text{tr}AB + \text{tr}CD)$ ,  $v = (\text{tr}BC + \text{tr}AD)$  とし,  $\text{tr}ABCD = -2$  を仮定する。

$$\begin{aligned}
uw &= \text{tr}A\text{tr}CB + \text{tr}B\text{Atr}DA + \text{tr}BC\text{tr}DC + \text{tr}CD\text{tr}AD \\
&= \text{tr}ABCB + \text{tr}BADA + \text{tr}BCDC + \text{tr}CDAD + 2\text{tr}AC^{-1} + 2\text{tr}BD^{-1} \\
&= (\text{tr}ABC\text{tr}B - \text{tr}ABCB^{-1}) + (\text{tr}DAB\text{tr}A - \text{tr}DABA^{-1}) \\
&\quad + (\text{tr}BCD\text{tr}C - \text{tr}BCDC^{-1}) + (\text{tr}CD\text{Atr}D - \text{tr}CDAD^{-1}) \\
&\quad + 2\text{tr}AC^{-1} + 2\text{tr}BD^{-1} \\
&= (\text{tr}ABC\text{tr}B - \text{tr}A\text{tr}C + \text{tr}ABC^{-1}B^{-1}) + (\text{tr}DAB\text{tr}A - \text{tr}B\text{tr}D + \text{tr}ABA^{-1}D^{-1}) \\
&\quad + (\text{tr}BCD\text{tr}C - \text{tr}BCDC^{-1}) + (\text{tr}CD\text{Atr}D - \text{tr}CDAD^{-1}) \\
&\quad + 2(\text{tr}A\text{tr}C - \text{tr}AC + \text{tr}B\text{tr}D - \text{tr}BD) \\
&= \text{tr}ABC\text{tr}B + \text{tr}DAB\text{tr}A + \text{tr}BCD\text{tr}C + \text{tr}CD\text{Atr}D + \text{tr}A\text{tr}C + \text{tr}B\text{tr}D \\
&\quad + \text{tr}ABDD^{-1}C^{-1}B^{-1} + \text{tr}ABCC^{-1}A^{-1}D^{-1} - \text{tr}BCDC^{-1} - \text{tr}CDAD^{-1} \\
&\quad - 2\text{tr}AC - 2\text{tr}BD \\
&= \text{tr}ABC\text{tr}B + \text{tr}DAB\text{tr}A + \text{tr}BCD\text{tr}C + \text{tr}CD\text{Atr}D + \text{tr}A\text{tr}C + \text{tr}B\text{tr}D \\
&\quad + \text{tr}DAB\text{tr}BCD + \text{tr}ABC\text{tr}CDA \\
&\quad - \text{tr}BCDABD - \text{tr}ABCDAC - \text{tr}BCDC^{-1} - \text{tr}CDAD^{-1} - 2\text{tr}AC - 2\text{tr}BD \\
&= xz + yw \\
&\quad - \text{tr}BCD\text{Atr}BD + \text{tr}BCDAD^{-1}B^{-1} - \text{tr}ABCD\text{tr}AC + \text{tr}ABCDC^{-1}A^{-1} \\
&\quad - \text{tr}BCDC^{-1} - \text{tr}CDAD^{-1} - 2\text{tr}AC - 2\text{tr}BD.
\end{aligned}$$

$\text{tr}ABCD = -2$  だから、最後の項は  $xz + yw$  に等しい。

**B. 例.  $\mathcal{R}'_{0,3}(a, b, c)$  の表現**

$\mathcal{R}'_{0,3}(a, b, c)$  の各点は  $SL(2, \mathbb{C})$  の行列  $A, B, C$  ( $a = -\text{tr}A, b = -\text{tr}B, c = -\text{tr}C$ ) で  $ABC$  は放物型で  $\text{tr}ABC = -2$  をみたすもので生成される。

$\lambda_1 = -(\text{tr}A + \text{tr}BC)$ ,  $\lambda_2 = -(\text{tr}B + \text{tr}AC)$ ,  $\lambda_3 = -(\text{tr}C + \text{tr}AB)$  とおくと、これらはトレース恒等式

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + a\lambda_2\lambda_3 + b\lambda_3\lambda_1 + c\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

をみたす。逆にこの等式をみたす  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^\times$  から行列  $A, B, C$  を求めることができる。

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_2/\lambda_3 - a & (\lambda_2^2 + a\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2)/\lambda_1\lambda_3^2 \\ -\lambda_1 & \lambda_2/\lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda_1/\lambda_3 - b & \lambda_2/\lambda_3^2 \\ -(\lambda_1^2 + b\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2)/\lambda_2 & \lambda_1/\lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda_3 \\ -\lambda_3 & -c \end{pmatrix}.$$

### C. 例. $\mathcal{R}'_{1,1}(c)$ の表現

$\mathcal{R}'_{1,1}(c)$  の各点は  $SL(2, \mathbb{C})$  の行列  $A, B, C$  ( $c = -\text{tr}C$ ) で  $ABA^{-1}B^{-1}C$  は放物型で  $\text{tr}ABA^{-1}B^{-1} = -2$  をみたすもので生成される。  $\lambda_1 = -(\text{tr}A + \text{tr}BA^{-1}B^{-1}C)$ ,  $\lambda_2 = -(\text{tr}ABA^{-1} + \text{tr}B^{-1}C)$ ,  $\lambda_3 = -(\text{tr}A^{-1} + \text{tr}B^{-1}CAB)$ ,  $\lambda_4 = -(\text{tr}AB + \text{tr}A^{-1}B^{-1}C)$ ,  $\lambda_5 = -(\text{tr}C + \text{tr}ABA^{-1}B^{-1})$  および  $c = -\text{tr}C$  とおくとトレース恒等式

$$\lambda_3\lambda_5(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_4^2) + \lambda_1\lambda_5(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2) = \lambda_2\lambda_4(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda_5^2) + (c - \lambda_5)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4.$$

をみたす。逆に  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{C}^\times$  がこの等式をみたせば、次のような行列を求めることができる。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_4^2\lambda_5 + \lambda_2^2\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_5 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4}{\lambda_2\lambda_4\lambda_5} & \frac{\lambda_2\lambda_4\lambda_5^2 - \lambda_3\lambda_4^2\lambda_5 - \lambda_2^2\lambda_3\lambda_5 - \lambda_1\lambda_3^2\lambda_5 + \lambda_2\lambda_3^2\lambda_4}{\lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_5^2} \\ -\lambda_1 & \frac{\lambda_3}{\lambda_5} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_5} & \frac{\lambda_2^2\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_5 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4}{\lambda_1\lambda_4\lambda_5^2} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_4\lambda_5}{\lambda_3} & \frac{-\lambda_2\lambda_4\lambda_5^2 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4^2\lambda_5 + \lambda_1^2\lambda_3\lambda_5 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{\lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda_5 \\ -\lambda_5 & -c \end{pmatrix}.$$

## 参考文献

- [Ber] Bers, L., An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston, *Acta Math.* **141** (1978), 73–98.
- [Bus] Buser, P., *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Birkhäuser, 1992.
- [Hat] Hatcher, A., On triangulations of surfaces, *Topology and its appli.* , **40** (1991), 189–194.
- [Luo] Luo, Feng, Geodesic length functions and Teichmüller spaces, *J. Differential Geom.* **48** (1998), 275–317.
- [Mos] Mosher, L., A user’s guide to the mapping class group: once punctured surfaces, Geometric and computational perspectives on infinite groups (Mineapolis, MN and New Brunswick, NJ, 1994), 101–174, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [NäNa1] Nakanishi, T. and M. Näätänen, The Teichmüller space of a punctured surface represented as a real algebraic space, *Michigan Math. J.*, **42** (1995) 235–258
- [NäNa2] Nakanishi, T. and M. Näätänen, Areas of two-dimensional moduli spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2001), 3241–3252.
- [NNR] Nakanishi, T., M. Näätänen and G. Rosenberger, Arithmetic Fuchsian groups of signature  $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$  with  $2 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3$ ,  $e_4 = \infty$ , in *Complex Geometry of Groups* (edited by A. Carocca et al), *Contemporary Mathematics*, vol.**240**, 1999, 269–277.
- [Pe1] Penner, R. C., The decorated Teichmüller space of punctured surfaces, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987), 299–339.
- [Pe2] Penner, R. C., Weil-Petersson volumes. *J. Differential Geom.* **35** (1992), no. 3, 559–608.
- [Zie] Zieschang, H., *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces*, *Lecture Notes in Math.* **875**, Springer-Verlag, 1981.