数理解析研究所講究録 1329 巻 2003 年 109-114

球面体と3次元擬フックス群

(Sphairahedra and three dimensional quasifuchsian groups)

阿原　一志 (Kazushi Ahara)
(明治大学大学院理工学研究科)
(Demartment of Mathematics,
Graduate School of Meiji University)

1 Introduction

この研究は荒木義行さんとの共同研究です。Indra's Pearls[MSW] には、函数論や双曲幾何で出てくるような、S^2（または H^3）上の擬フックス群の極限集合の美しいコンピュータグラフィックが描かれています。それらの定義式をみたところ、次元をあげた場合（つまり S^3 または H^4 上の場合）への自然に拡張ができそうに思われました。そして「球面体 (sphairahedron)」という立体幾何の新しい概念を作ればそこから3次元擬フックス群が得られるとの結論に達しました。

それでは、球面体（擬フックス群を与えるためにはいくつかの技術的な条件を満たす必要があります）がどれくらいたくさんあるか、という問題が最初の問題ということになります。メビウス変換で球面体は球面体へと写されますので、メビウス変換で写りあう球面体を一つと数えて、どれくらい球面体が存在するかという問題を考えました。

この論文では、球面体の定義と、面の数が6以下の場合の（擬フックス群をあたえるような）球面体の分類定理を紹介します。この定理の証明は現在投稿中の [AA2] に書いてあります。また、球面体の定義の条件を緩めた準球面体という概念も考えました。この場合には、一般に極限集合は球面と同相にはなりません。どのような位相形が現れるかは今後の課題です。

また、3次元擬フックス群のリミットセットは擬球 (quasi-sphere) とよばれるものになります。そのコンピュータグラフィックはおそらく世界初ではないかと思います。ホームページ [AA3][Ah] でこれらのグラフィックを見ることができます。ただし、擬球の絵を定義だけからただちに描くことはできません。描くための数学的準備が必要です。

2 球面、球体の定義

$S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$ を３次元球面とします。S^3 の中の球面、開球体、閉球体の定義をします。

定義 （S^3 内の球面、球体）

(1)　O が S^3 内の球面であるとは、O が３次元空間内の球面であるか、または O が平面と無限遠点 ∞ の和集合であることをいう。

(2) D が S^3 内の開球体であるとは、ある球面 O が存在して、O によって S^3 を二つに分けたときの一方が D と一致していることを言う。また D の閉包 $\overline{D} = D \cup O$ を閉球体と言う。

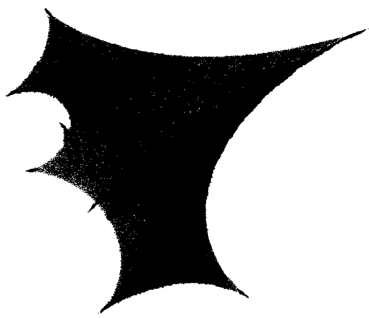
この定義を用いて、球面体を定義しましょう。

定義 （S^3 内の球面体）

P が S^3 内の球面体 (sphairahedron) であるとは、いくつかの閉球体 $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \cdots, \overline{D_p}$ が存在して、集合

$$S^3 - (\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \cdots \cup \overline{D_p}) \qquad (A)$$

が連結で単連結な二つの成分からなり、P がその一方と一致することをいう。



注意：この場合、二つの連結成分の両方が単連結でなければなりません。もし (A) が３つ以上の単連結な連結成分を持つ場合には、P は準球面体 (semi-sphairahedron) であると呼ぶことにします。

3　球面体が有理的であること、理想的であること

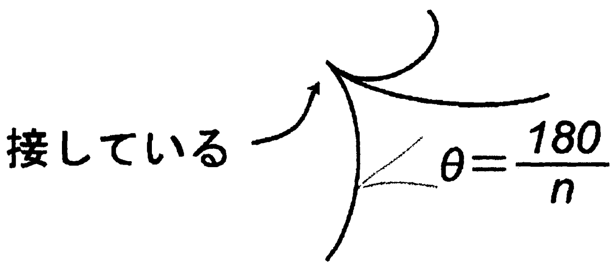
平面と平面の間の面角 (dihedral angle) という考え方を私たちは知っていますが、このことは球面と球面との間の面角という考え方へ自然に発展させることができます。接している二つの球面の面角は０であると考えます。

さて、ここで二つ言葉を準備しましょう。

定義 （有理的な球面体、理想的な球面体）

（１）P が有理的な球面体 (rational sphairahedron) であるとは、すべての辺について、そこでの面角が１８０度の約数になっていることである。

（２）P が理想的な球面体 (ideal sphairahedron) であるとは、すべての頂点について、その頂点にあつまる辺が頂点で接していることを言う。

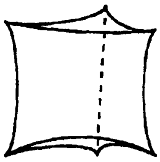
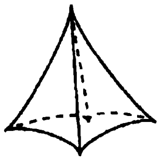
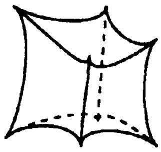
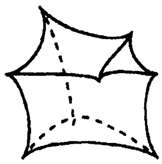
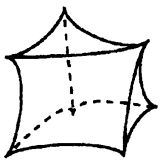
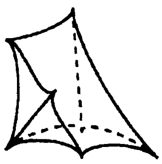
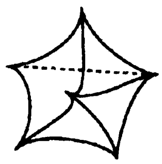


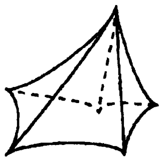
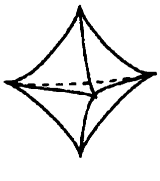
4　有理的かつ理想的な球面体の分類定理

さて、有理的、理想的、という言葉の定義をしましたが、これらの条件を満たすような球面体はあるのでしょうか。球面体をメビウス変換で写してもやはり球面体ですし、有理的であること、理想的であることはメビウス変換で保たれます。ですから、有理的かつ理想的な球面体のメビウス変換類（等角同値類といってもよい）を分類することが重要になります。実は「たくさんある」ことを証明することができました。そのことは論文 [AA2] にまとめました。たとえば、サイコロ型の球面体（つまり６つの面、１２本の辺、８つの頂点がある）で、すべての面角は６０度（６０は１８０の約数です。）でかつ理想的なもの、と条件を絞っても、二つのパラメータをもつほどたくさんの例が見つかりました。また、その二つのパラメータを特定の値にすると、球面体が理想双曲多面体を与えることがわかりました。この場合の球面体群（５章を見てください。）はフックス群になります。

定理（有理的理想的球面体の分類定理）

もし、有理的かつ理想的な球面体の面の数が6以下であったならば、その面角の組み合わせ数b、等角同値類の次元d、有理的かつ理想的な準球面体の面角の組み合わせ数b'、等角同値類の次元d'の表は以下のとおりである。

polyhedron	b	d	b'	d'
 prism	0	*	6	1
 pyramid	2	0	2	0
 cube	7	2	11	2
	0	*	12	2
	3	1	3	1
	0	1	2	1
	0	*	0	*

polyhedron	b	d	b'	d'
 pentagonal pyramid	0	*	0	*
 triangular dipyramid	0	*	0	*

5 球面体群

有理的な球面体 P に対して、球面体群 $G(P)$ を定義しましょう。P の面を定義する S^3 内の球面を $O_1,\cdots,O_p$ とします。O_i に関する球の反転写像を f_i とします。このとき、$f_i,\cdots,f_p$ が生成する群を $\hat{G}$ とします。今、この群の関係式の長さがすべて偶数であることが容易に確かめられますから、G を長さ偶数の元全体からなる $\hat{G}$ の部分群とすれば、これは向きを保つメビウス変換群の部分群になっています。これを P の球面体群 $G=G(P)$ と呼ぶことにします。

定理

有理的で理想的な球面体がサイコロ型のとき、球面体群は擬フックス群（またはフックス群）になる。

証明は [AA2] にあります。他の有理的で理想的な球面体についても同様の定理が主張できると思いますが、まだ証明できていません。

6 References

[Ah] Ahara K., *Quasi-sphere*, `http://www.math.meiji.ac.jp/~ahara/quasisphere/`

[AA1] Ahara K. and Araki Y., *Sphairahedral Approach to Parameterize Visible Three Dimensional Quasi-Fuchsian Fractals*, to appear in CGI2003 (2003)

[AA2] Ahara K. and Araki Y., *Ideal Rational Sphairahedra and Three Dimensional Quasifuchsian Groups*, preprint 2003

[Ar] Araki Y., *Fractal3D*, `http://www.fractal3d.com/home/home.shtml`

[MSW] Mumford D., Series C. and Wright D., *Indra's Pearls* , Cambridge press, 2002.