数理解析研究所講究録 1334 巻 2003 年 24-36

Asymptotic efficiencies of estimators in a one-parameter family of truncated distributions

筑波大・数学　大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)
筑波大・数学　赤平　昌文 (Masafumi Akahira)

1　はじめに

非正則分布族の典型である 1 母数切断分布族の母数の推定問題を考える. この切断分布の密度の台が区間で, それが母数に依存する場合には, その母数に対する 2 次元十分統計量が存在するが, 1 次元十分統計量は一般には存在しない. そのような場合の最尤推定量, Bayes 推定量, Pitman 推定量, 最大確率推定量等の漸近的な比較は行われている ([O01], [OA01], [AO02]). しかし, その場合でも台の区間の両端を母数の関数と見なしてそれらに単調性があれば, 1 次元十分統計量が存在し, かつそれは完備にもなっている. そこで, 母数の関数の推定量として, 完備十分統計量の関数になる一様最小分散不偏推定量 (UMVUE) を得るので, UMVUE の漸近分布を求めることができ, 一方, 最尤推定量 (MLE) の漸近分布も求めることができる ([BMG01]). 本論においては, まず, [BMG01] の結果を紹介し, 様々なリスクによる漸近相対効率の概念を用いて, UMVUE に対する MLE の効率を求める. また, 期待絶対損失による下界を求め, それを達成する推定量について考察する.

2　1 母数切断分布の場合の不偏推定

$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度 $p(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1)$ をもつ分布に従う実確率変数とする. まず, $p(\cdot,\theta)$ について次の条件 (A) を仮定する.
(A) $g(x)$ を開区間 $(a(\theta), b(\theta))$ 上の連続な正値関数で, $\theta \in \Theta \in \mathbf{R}^1$ とし,

$$p(x,\theta) = \frac{g(x)}{G(\theta)} \mathcal{X}_{(a(\theta),b(\theta))}(x) \tag{2.1}$$

である. ただし, $a(\theta) < b(\theta)$ $(\theta \in \Theta)$, $G(\theta) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} g(x)dx$ で, $\mathcal{X}_{(a(\theta),b(\theta))}(\cdot)$ は区間 $(a(\theta), b(\theta))$ の定義関数とする.

いま, $X_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$, $X_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ とおくとき, 条件 (A) の下では, 2 次元統計量 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ は θ に対する十分統計量であるが, 一般には θ に対する 1 次元十分統計量は存在しない. しかし, $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ に単調性があれば, 次のようになることが知られている.

(i) $a(\cdot)$ が狭義の増加関数で, $b(\cdot)$ が狭義の減少関数ならば, θ に対する 1 次元十分統計量は

$$W_1^{(n)} := \min\{a^{-1}(X_{(1)}),\ b^{-1}(X_{(n)})\}$$

(ii) $a(\cdot)$ が狭義の減少関数で, $b(\cdot)$ が狭義の増加関数ならば, θ に対する 1 次元十分統計量は

$$W_2^{(n)} := \max\{a^{-1}(X_{(1)}),\ b^{-1}(X_{(n)})\}$$

である.

上記の統計量 $W_i^{(n)}$ $(i=1,2)$ は θ に対して完備になる ([HC56], [SO91]). また, 各 i について, $W_i^{(n)}$ の分布族を $\mathcal{F}_i(G)$ とする. ここで, 各 i について, 母数 θ の推定可能関数 $v(\theta)$ の集合を

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{F}_i(G)) := \{v : \Theta \to \mathbf{R}^1 |\ {}^\exists \hat{v}_n \text{ s.t. } E_\theta[\hat{v}_n(W_i^{(n)})] = v(\theta),\ {}^\forall\theta \in \Theta\}$$

で定義する. このとき, 各 i について $v \in \mathcal{E}_n(\mathcal{F}_i(G))$ で, $V_\theta[\hat{v}_n(W_i^{(n)})] < \infty$ $(\theta \in \Theta)$ ならば, 関数 v は UMVU(一様最小分散不偏) 推定可能になる. すなわち $v(\theta)$ の (有限分散をもつ)UMVU 推定量は存在する. また, 各 i について, UMVU 推定可能な関数の集合を $\mathcal{U}_n(\mathcal{F}_i(G))$ とする. このとき, 各 i について, 絶対連続関数 $v(\in \mathcal{E}_n(\mathcal{F}_i(G)))$ に対する不偏推定量は

$$\hat{v}_n(W_i^{(n)}) := v(W_i^{(n)}) + \frac{G(W_i^{(n)})}{nG'(W_i^{(n)})}v'(W_i^{(n)}) \tag{2.2}$$

になり, また, $V_\theta[\hat{v}_n(W_i^{(n)})] < \infty$ ならば, $\hat{v}_n(W_i^{(n)})$ は $v(\theta)$ の UMVU 推定量になる ([T59], [K85]).

例 2.1 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも一様分布 $U(-\theta,\theta)$ $(\theta > 0)$ に従うとき,

$$W_2^{(n)} = \max\{-X_{(1)}, X_{(n)}\}$$

になる.

例 2.2 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$p(x,\theta) = \frac{\phi(x)}{2\Phi(\theta)-1}\mathcal{X}_{(-\theta,\theta)}(x) \quad (\theta > 0)$$

をもつ切断正規分布に従うとする. ただし, ϕ, Φ はそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ の密度, 分布関数とする. このとき, θ の完備十分統計量は $W_2^{(n)} = \max\{-X_{(1)}, X_{(n)}\}$ になる.

3 1 母数切断分布の場合の推定量の漸近分布

分布族 $\mathcal{F}_1(G)$ において, 与えられた推定可能関数 $v(\in \mathcal{U}_n(\mathcal{F}_1(G)))$ の最尤推定量 (MLE) と UMVU 推定量の漸近分布を求める ([BMG01]). まず, $B(\theta)$ を θ の近傍とし, 任意の $\theta' \in B(\theta) \subset \Theta$ について θ' の r 次導関数 $v^{(r)}(\theta')$ が存在して連続であるとき, v は $B(\theta)$ において C^r 級であるといい, $v \in C^r(B(\theta))$ で表わす.

いま, (i) の場合に $W_1^{(n)}$ は θ の MLE であるから, MLE の不変性から $v(\theta)$ の MLE は $v(W_1^{(n)})$ になる.

定理 3.1 ([BMG01]) (MLE の漸近分布). v を $r := \min\{k|v^{(k)}(\theta) \neq 0\}$ でかつ $v \in C^r(B(\theta))$ となる関数とし, $G \in C^2(B(\theta))$ とする. このとき

$$\frac{n^r}{A_r(\theta)}\left\{v(W_1^{(n)}) - v(\theta)\right\} \xrightarrow{L} Y^r \quad (n \to \infty)$$

である. ただし, $\xrightarrow{L}$ は法則収束を意味し, Y は密度 $f(y) = e^{-y}$ $(y > 0)$ をもつ指数分布 $E(0,1)$ に従う確率変数とし,

$$A_r(\theta) := \frac{v^{(r)}(\theta)}{r!}\frac{G^r(\theta)}{\{-G'(\theta)\}^r} \tag{3.1}$$

とする.

定理 3.2 ([BMG01]) (UMVU 推定量の漸近分布). v を $r := \min\{k|v^{(k)}(\theta) \neq 0\}$ でかつ $v \in C^{r+1}(B(\theta))$ となる絶対連続関数とし, $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ を (2.2) で定義されるとする. また, $G \in C^{r+1}(B(\theta))$ とする. このとき

$$\frac{n^r}{A_r(\theta)}\left\{\hat{v}_n(W_1^{(n)}) - v(\theta)\right\} \xrightarrow{L} Y^r - rY^{r-1} \quad (n \to \infty)$$

である. ただし, Y は指数分布 $E(0,1)$ に従う確率変数とし,

$$A_r(\theta) := \frac{v^{(r)}(\theta)}{r!}\frac{G^r(\theta)}{\{-G'(\theta)\}^r}$$

とする.

4 推定量の漸近相対効率

一般に, 母数 θ をもつ分布からの大きさ n の無作為標本 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく, θ の関数 $v(\theta)$ の 2 つの推定量 $\delta_{1,n} = \delta_{1,n}(\boldsymbol{X})$, $\delta_{2,n} = \delta_{2,n}(\boldsymbol{X})$ がリスク $R(\theta, \delta_{1,n}) > 0$, $R(\theta, \delta_{2,n}) > 0$ をもち, $n \to \infty$ のときいずれも 0 に収束するとする. ここで, k_n を

$$k_n := \min\{k \in \boldsymbol{N}|R(\theta, \delta_{2,k}) \leq R(\theta, \delta_{1,n})\}$$

で定義する. ただし, $\boldsymbol{N}$ は自然数全体の集合とする. いま, $\lim_{n\to\infty} k_n/n$ が存在するとき, $\delta_{1,n}$ に対する $\delta_{2,n}$ の漸近リスク効率 (asymptotic risk efficiency, 略して ARE) を

$$\mathrm{ARE}(\delta_{2,n}; \delta_{1,n}) := \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} \tag{4.1}$$

で定義する.

定理 4.1 $r > 0$ について

$$n^r R(\theta, \delta_{j,n}) = \tau_j^2 + o(1) \qquad (n \to \infty), \quad j = 1, 2 \tag{4.2}$$

で, $\tau_j^2 > 0$ $(j=1,2)$ とする. このとき

$$\mathrm{ARE}(\delta_{2,n};\delta_{1,n}) = \left(\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}\right)^{1/r} \tag{4.3}$$

である.

証明. まず, リスク $R(\theta,\delta_{1,n})$, $R(\theta,\delta_{2,n})$ はいずれも正値をとり, $n\to\infty$ とすると 0 に収束するから, $n\to\infty$ のとき $k_n\to\infty$ になる. 次に, k_n の定義から

$$R(\theta,\delta_{2,k_n}) \le R(\theta,\delta_{1,n}) < R(\theta,\delta_{2,k_n-1})$$

になり, (4.2) から十分大きい n について

$$k_n^{-r}\left(\tau_2^2+o(1)\right) \le n^{-r}\left(\tau_1^2+o(1)\right) < (k_n-1)^{-r}\left(\tau_2^2+o(1)\right)$$

になる. そこで, この不等式の辺々に k_n^r をかけると

$$\tau_2^2+o(1) \le \frac{k_n^r}{n^r}\left(\tau_1^2+o(1)\right) < \left(\frac{k_n}{k_n-1}\right)^r\left(\tau_2^2+o(1)\right)$$

になるから

$$\left(\tau_2^2+o(1)\right)^{1/r} \le \frac{k_n}{n}\left(\tau_1^2+o(1)\right)^{1/r} < \frac{k_n}{k_n-1}\left(\tau_2^2+o(1)\right)^{1/r}$$

になり

$$\left\{\frac{\tau_2^2+o(1)}{\tau_1^2+o(1)}\right\}^{1/r} \le \frac{k_n}{n} < \frac{k_n}{k_n-1}\left\{\frac{\tau_2^2+o(1)}{\tau_1^2+o(1)}\right\}^{1/r}$$

になる. よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n} = \left(\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}\right)^{1/r}$$

になり, (4.1) から

$$\mathrm{ARE}(\delta_{2,n};\delta_{1,n}) = \left(\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}\right)^{1/r}$$

が成り立つ. □

次に, 前節の設定の下で, $\boldsymbol{X}$ に基づく, θ の関数 $v(\theta)$ の推定量 $\delta_n(\boldsymbol{X})$ のリスク R として, 漸近平均 2 乗誤差 (asymptotic mean squared error, 略して AMSE), すなわち δ_n の漸近分布による MSE, $E_\theta[\{\delta_n(\boldsymbol{X})-v(\theta)\}^2]$, 漸近平均絶対誤差 (asymptotic mean absolute error, 略して AMAE), すなわち δ_n の漸近分布による MAE, $E_\theta[|\delta_n(\boldsymbol{X})-v(\theta)|]$ を考える.

定理 4.2 ([BMG01]). リスク R として MSE をとれば, 定理 3.1, 3.2 の条件の下で, $v(\theta)$ の MLE $v(W_1^{(n)})$ に対する UMVU 推定量 $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ の ARE は,

$$\mathrm{ARE}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)});v(W_1^{(n)})\right) = \left\{\frac{r}{2(2r-1)}\right\}^{1/(2r)} \tag{4.4}$$

証明については, 定理 3.1 より $v(\theta)$ の MLE, $v(W_1^{(n)})$, の AMSE

$$\mathrm{AMSE}_\theta\left(v(W_1^{(n)})\right) \approx \frac{(2r)!A_r^2(\theta)}{n^{2r}}$$

を得, 定理 3.2 より $v(\theta)$ の UMVU 推定量 $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ の AMSE, すなわち漸近分散

$$V_\theta\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)})\right) \approx \frac{r^2A_r^2(\theta)\Gamma(2r-1)}{n^{2r}} \tag{4.5}$$

を得るから, 定理 4.1 より (4.4) を得る. (4.4) の右辺は 1 未満になるから, (4.1) より, n が大きいとき

$$k_n \approx \left\{\frac{r}{2(2r-1)}\right\}^{1/(2r)} n$$

になり, 漸近的には UMVU 推定量は MLE より良いことが分かる. 特に $r=1$ のときには, $k_n \approx 0.707n$ となり, 同じリスクを冒す場合には UMVU 推定量は MLE より標本の大きさが約 30% 減らせることを意味する.

定理 4.3 リスク R として平均絶対誤差をとれば, 定理 3.1, 3.2 の条件の下で, $v(\theta)$ の MLE $v(W_1^{(n)})$ に対する UMVU 推定量 $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ の ARE は, $r>0$ について

$$\mathrm{ARE}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v(W_1^{(n)})\right) = \left(\frac{2r^{r-1}e^{-r}}{\Gamma(r)}\right)^{1/r} \tag{4.6}$$

である.

証明については, 定理 3.1 より $v(\theta)$ の MLE $v(W_1^{(n)})$ の AMAE

$$\mathrm{AMAE}_\theta\left(v(W_1^{(n)})\right) = E_\theta\left[\left|v(W_1^{(n)}) - v(\theta)\right|\right] \approx |A_r(\theta)|\Gamma(1+r)/n^r$$

を得, 定理 3.2 より $v(\theta)$ の UMVU 推定量 $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ の AMAE

$$\mathrm{AMAE}_\theta\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)})\right) = E_\theta\left[\left|\hat{v}_n(W_1^{(n)}) - v(\theta)\right|\right] \approx 2|A_r(\theta)|r^re^{-r}/n^r$$

を得るから, 定理 4.1 より (4.6) を得る. (4.6) において, Stirling の公式を用いると, r が大きいとき

$$\mathrm{ARE}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v(W_1^{(n)})\right) \approx \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/(2r)} \tag{4.7}$$

となり, (4.7) の右辺は 1 未満であり, n が大きいとき

$$k_n \approx \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/(2r)} n$$

となり, 漸近的には UMVU 推定量は MLE より良いことが分かる. 特に, $r=1$ のとき, (4.6) より $k_n \approx (2/e)n \fallingdotseq 0.736n$ になる.

さらに, リスク R として, $v(\theta)$ の推定量 $\delta(\boldsymbol{X})$ について, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して δ の漸近誤差確率 (asymptotic error probability, 略して AEP) $P_\theta\{K_r(\theta)|\delta(\boldsymbol{X}) - v(\theta)| > \varepsilon\}$ をとる. ただし, $K_r(\theta)$ は正規化定数とする.

定理 4.4 リスク R として EP をとれば, 定理 3.1, 3.2 の条件の下で, $v(\theta)$ の MLE $v(W_1^{(n)})$ に対する UMVU 推定量 $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ の相対漸近誤差確率 (relative AEP, 略して RAEP) は次のようになる.

(i) $r = 1$ のとき

$$\mathrm{RAEP}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v(W_1^{(n)})\right) := \frac{\mathrm{EP}_\theta(\hat{v}_n(W_1^{(n)}))}{\mathrm{EP}_\theta(v(W_1^{(n)}))} \approx \begin{cases} e^{-1} & (\varepsilon > 1), \\ e^{\varepsilon} - e^{-1+2\varepsilon} + e^{-1} & (0 < \varepsilon \leq 1). \end{cases}$$

(ii) $r \geq 2$ のとき

$$\mathrm{RAEP}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v(W_1^{(n)})\right) \approx \begin{cases} \exp\left[-\left\{y(\varepsilon) - \varepsilon^{1/r}\right\}\right] & (\varepsilon > (r-1)^{r-1}), \\ e^{\varepsilon^{1/r}}\left\{e^{-y_1(\varepsilon)} - e^{-y_2(\varepsilon)} + e^{-y_3(\varepsilon)}\right\} & (0 < \varepsilon \leq (r-1)^{r-1}) \end{cases}$$

である. ただし, $\varepsilon > (r-1)^{r-1}$ のとき $y^r - ry^{r-1} = \varepsilon$ となる y を $y(\varepsilon)$ とし, また $0 < \varepsilon \leq (r-1)^{r-1}$ のとき $-y^r + ry^{r-1} = \varepsilon$ となる y を $y_1(\varepsilon)$, $y_2(\varepsilon)$ $(y_1(\varepsilon) \leq y_2(\varepsilon))$ とし, $y^r - ry^{r-1} = \varepsilon$ となる y を $y_3(\varepsilon)$ とする.

証明の概略. まず, MLE の AEP は, $r \geq 1$ について

$$\mathrm{AEP}_\theta\left(v(W_1^{(n)})\right) = P_\theta\left\{\left|\frac{n^r}{A_r(\theta)}\left(v(W_1^{(n)}) - v(\theta)\right)\right| > \varepsilon\right\} \approx e^{-\varepsilon^{1/r}} \tag{4.8}$$

となる. また, UMVU 推定量の AEP は

$$\mathrm{AEP}_\theta\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)})\right) \approx P\left\{\left|Y^r - rY^{r-1}\right| > \varepsilon\right\} = \int_{\{y:|y^r - ry^{r-1}|>\varepsilon\}} e^{-y}dy \tag{4.9}$$

となる. ここで, (4.9) の積分範囲について考える.

(i) $r = 1$ の場合. (4.9) は, n が大きいとき

$$\mathrm{AEP}_\theta\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)})\right) \approx \begin{cases} \int_{1+\varepsilon}^{\infty} e^{-y}dy \\ \int_0^{1-\varepsilon} e^{-y}dy + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} e^{-y}dy \end{cases} = \begin{cases} e^{-(1+\varepsilon)} & (\varepsilon > 1), \\ 1 - e^{-(1-\varepsilon)} + e^{-(1+\varepsilon)} & (0 < \varepsilon \leq 1) \end{cases} \tag{4.10}$$

となる (図 4.1 参照). よって, (4.8), (4.10) より, 大きい n について

$$\mathrm{RPE}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v(W_1^{(n)})\right) \approx \begin{cases} e^{-1} & (\varepsilon > 1), \\ e^{\varepsilon} - e^{-1+2\varepsilon} + e^{-1} & (0 < \varepsilon \leq 1). \end{cases}$$

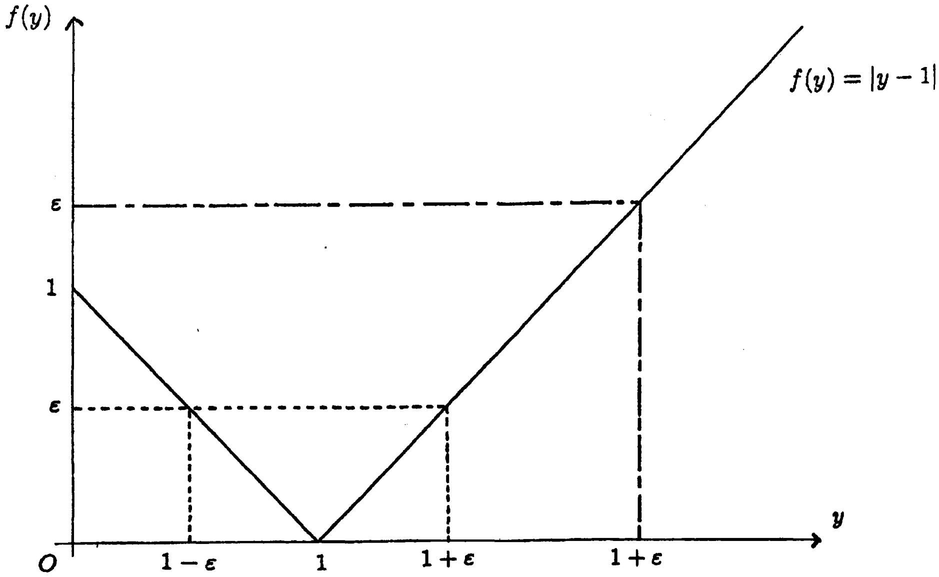

図 4.1 $r = 1$ の場合の $|y-1| > \varepsilon$ のグラフ

を得る.
(ii) $r \geq 2$ の場合. $\varepsilon > (r-1)^{r-1}$ のとき $y^r - ry^{r-1} = \varepsilon$ となる y を $y(\varepsilon)$ とし, $0 < \varepsilon \leq$

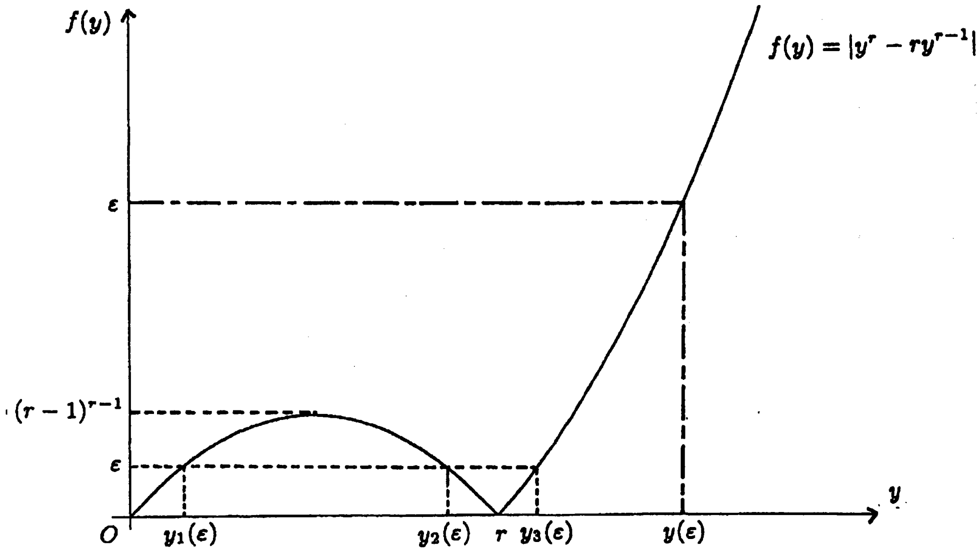

図 4.2 $r \geq 2$ の場合の $|y^r - ry^{r-1}| > \varepsilon$ のグラフ

$(r-1)^{r-1}$ のとき $-y^r + ry^{r-1} = \varepsilon$ となる y を $y_1(\varepsilon)$, $y_2(\varepsilon)$ (ただし $y_1(\varepsilon) \leq r-1 \leq y_2(\varepsilon) < r$) とし, $y^r - ry^{r-1} = \varepsilon$ となる y を $y_3(\varepsilon)$ とすれば, (4.9) は, n が大きいとき

$$\mathrm{AEP}_\theta\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)})\right) \approx \begin{cases} \int_{y(\varepsilon)}^{\infty} e^{-y}dy \\ \int_{y_1(\varepsilon)}^{y_2(\varepsilon)} e^{-y}dy + \int_{y_3(\varepsilon)}^{\infty} e^{-y}dy \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-y(\varepsilon)} & (\varepsilon > (r-1)^{r-1}), \\ e^{-y_1(\varepsilon)} - e^{-y_2(\varepsilon)} + e^{-y_3(\varepsilon)} & (0 < \varepsilon \leq (r-1)^{r-1}) \end{cases} \tag{4.11}$$

となる (図 4.2 参照). よって, (4.8), (4.11) より, 大きい n について

$$\mathrm{RAEP}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v(W_1^{(n)})\right) \approx \begin{cases} \exp\left[-\left\{y(\varepsilon) - \varepsilon^{1/r}\right\}\right] & (\varepsilon > (r-1)^{r-1}), \\ e^{\varepsilon^{1/r}}\left\{e^{-y_1(\varepsilon)} - e^{-y_2(\varepsilon)} + e^{-y_3(\varepsilon)}\right\} & (0 < \varepsilon \leq (r-1)^{r-1}) \end{cases}$$

を得る. □

次に, $v(\theta)$ の MLE $v(W_1^{(n)})$ は漸近的な偏りをもつので, それを補正した MLE

$$v^*(W_1^{(n)}) := v(W_1^{(n)}) - \frac{r!}{n^r}A_r(W_1^{(n)})$$

を考えると, これは $v(\theta)$ の漸近不偏推定量になる. ただし, $A_r(\cdot)$ は (3.1) で定義されたものとする.

定理 4.5 $v(\theta)$ の補正 MLE $v^*(W_1^{(n)})$ に対する UMVU 推定量 $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ の漸近分散による ARE は

$$\mathrm{ARE}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v^*(W_1^{(n)})\right) = \left\{\frac{r^2\Gamma(2r-1)}{\Gamma(2r+1) - \Gamma^2(r+1)}\right\}^{1/(2r)} \tag{4.12}$$

である.

証明については, 定理 3.1 より $v(\theta)$ の補正 MLE $v^*(W_1^{(n)})$ の AMSE, すなわち漸近分散は

$$V_\theta\left(v^*(W_1^{(n)})\right) \approx \frac{A_r^2(\theta)}{n^{2r}}\left\{\Gamma(2r+1) - \Gamma^2(r+1)\right\}$$

であり, また $v(\theta)$ の UMVU 推定量 $\hat{v}_n(W_1^{(n)})$ の漸近分散は (4.5) であるから, 定理 4.1 より (4.12) を得る. 特に, r が大きいとき, Stirling の公式より

$$\mathrm{ARE}\left(\hat{v}_n(W_1^{(n)}); v^*(W_1^{(n)})\right) \approx 1$$

になる.

5 推定量の期待絶対損失による漸近有効性

本節では, 漸近中央値不偏推定量の期待絶対損失による下界を求め, その達成についても論じる.

補題 5.1 $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ を 2 つの非負値確率変数列とし, それらの密度は存在し, 各 n について $E(X_n)$, $E(Y_n)$ は有限確定であるとする. また, 関数 M が存在して,

$$P\{Y_n \geq x\} \leq M(x), \quad \int_0^\infty M(x)dx < \infty$$

とする. もし,

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n \le a\} \le \lim_{n\to\infty} P\{Y_n \le a\}, \quad a > 0$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) \ge \lim_{n\to\infty} E(Y_n)$$

である.

証明はFatouの補題を用いればよい. いま, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも密度 $p(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ をもつ分布に従う確率変数列とする. ただし, Θ は $\mathbf{R}^1$ の開区間とする. ここで, θ の推定量 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(\boldsymbol{X})$ について, 任意の $\vartheta \in \Theta$ に対して正数 δ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \left| P_\theta\left\{\hat{\theta}_n \le \theta\right\} - \frac{1}{2}\right| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \left| P_\theta\left\{\hat{\theta}_n \ge \theta\right\} - \frac{1}{2}\right| = 0$$

となるとき, $\hat{\theta}_n$ を漸近中央値不偏 (asymptotically median unbiased , 略して AMU) 推定量であるという. ただし, $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ とする. さて, θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\varlimsup_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \le t\right\} \le \beta_\theta(t), \quad t > 0 \tag{5.1}$$

となる関数 $\beta_\theta(\cdot)$ が存在し, また

$$\beta_\theta(t) = \lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_n^* - \theta\right| \le t\right\}, \quad t > 0 \tag{5.2}$$

となる (θ の)AMU 推定量 $\hat{\theta}_n^*(\boldsymbol{X})$ が存在したとする. このとき, (5.1), (5.2) および補題 5.1 より, 任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\varliminf_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_n - \theta\right|\right] \ge \lim_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_n^* - \theta\right|\right] \tag{5.3}$$

になる. よって, (5.3) の右辺は θ の AMU 推定量の絶対損失に関するリスク (期待絶対損失) の下界を与える. さらに

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_n^* - \theta\right|\right] = \int_0^\infty \{1 - \beta_\theta(t)\}\, dt \tag{5.4}$$

になる. よって (5.3), (5.4) より次の命題を得る.

定理 5.1 θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\varliminf_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_n - \theta\right|\right] \ge \int_0^\infty \{1 - \beta_\theta(t)\}\, dt$$

である.

例 5.1 (一様分布). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも一様分布 $U(\theta-(1/2), \theta+(1/2))$ に従う確率変数列とする. このとき, θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\varlimsup_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \le t\right\} \le 1 - e^{-2t}, \quad t > 0$$

になり, $\hat{\theta}_n^* := (\min_{1\le i\le n} X_i + \max_{1\le i\le n} X_i)/2$ は θ の AMU 推定量で

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_n^* - \theta\right| \le t\right\} = 1 - e^{-2t}, \quad t > 0$$

になる ([A82]). よって, (5.2), (5.4), 定理 5.1 より, θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\varliminf_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_n - \theta\right|\right] \ge \frac{1}{2}$$

となり, この下界は $\hat{\theta}_n^*$ によって達成されるという意味で $\hat{\theta}_n^*$ は θ の漸近有効推定量になる.

例 5.2 (切断正規分布). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$p(x-\theta) = \begin{cases} ke^{-(x-\theta)^2/2} & (|x-\theta| < 1/2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数列とする. ただし, $k := 1/[2\sqrt{2\pi}\{\Phi(1/2) - (1/2)\}]$ とし, $-\infty < \theta < \infty$ とする. また, $K := \lim_{x\to -1/2+0} p(x)$ とする. このとき, θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\varlimsup_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \le t\right\} \le 1 - e^{-2Kt}, \quad t > 0$$

になる ([AT81] の p.78 参照). 一方, θ の Pitman 推定量は範囲の中央 $\hat{\theta}_n^* := (\min_{1\le i\le n} X_i + \max_{1\le i\le n} X_i)/2$ に漸近的に同等で, $n(\hat{\theta}_n^* - \theta)$ の漸近密度は

$$f_{\hat{\theta}_n^*}(t) = Ke^{-2K|t|} \quad (-\infty < t < \infty)$$

となるから, $\hat{\theta}_n^*$ は θ の AMU 推定量で

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_n^* - \theta\right| \le t\right\} = 1 - e^{-2Kt}, \quad t > 0$$

になる ([AT81], [O01], [OA01]). また, θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は

$$\tilde{\theta}_n = \begin{cases} \max_{1\le i\le n} X_i - \frac{1}{2} & (\text{確率 } 1/2 \text{ で}), \\ \min_{1\le i\le n} X_i + \frac{1}{2} & (\text{確率 } 1/2 \text{ で}) \end{cases}$$

に漸近的に同等になり, $n(\tilde{\theta}_n - \theta)$ の漸近密度は

$$f_{\tilde{\theta}_n}(t) = \frac{K}{2}e^{-K|t|} \quad (-\infty < t < \infty)$$

になるから, $\hat{\theta}_{ML}$ は θ の AMU 推定量で

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_{ML} - \theta\right| \le t\right\} = 1 - e^{-Kt}, \quad t > 0$$

になる ([AT81], [O01], [OA01]). よって, (5.2), (5.4), 定理 5.1 より θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\varliminf_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\right] \geq \int_0^\infty e^{-2Kt}dt = \frac{1}{2K}$$

となり, この下界は $\hat{\theta}_n^*$ によって達成されるから, $\hat{\theta}_n^*$ は漸近有効推定量になる. しかし

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_{ML}-\theta\right|\right] = \frac{1}{K}$$

となって, θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は上記の下界を達成しないので, $\hat{\theta}_{ML}$ は漸近的有効でない.

例 5.3 (切断指数分布). $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも密度

$$p(x-\theta) = \begin{cases} ke^{-(x-\theta)} & (\theta < x < \theta+1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数列とする. ただし, $k=(1-e^{-1})^{-1}$ とする. このとき, θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} P_\theta\left\{n\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\leq t\right\} &\leq \begin{cases} 1-e^{-2kt}-(1-2e^{-kt})\sinh t & (0<t<\frac{1}{k}\log 2), \\ 1-e^{-2kt} & (t \geq \frac{1}{k}\log 2) \end{cases} \\ &=: \beta_\theta(t)\end{aligned}$$

になる ([A82]). よって, (5.2), (5.4), 定理 5.1 より, θ の任意の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\right] &\geq \frac{1}{2k}-\frac{1}{1-k^2}\left\{k^2\cosh\left(\frac{1}{k}\log 2\right)-k^2+k\sinh\left(\frac{1}{k}\log 2\right)-1\right\} \\ &\fallingdotseq 0.2892 \end{aligned} \tag{5.5}$$

となる. この下界を達成する AMU 推定量は存在しないので, いくつかの AMU 推定量の期待絶対損失と比較をしてみよう.

(I) MLE の場合. θ に関する MLE は $\hat{\theta}_{ML}=X_{(1)}$ となる. ここで, $P\{n(\hat{\theta}_{ML}-\theta)\leq t\}\approx 1-e^{-kt}$ より

$$\hat{\theta}_{ML}^* := X_{(1)}-\frac{1}{nk}\log 2$$

とすれば, $P\{\hat{\theta}_{ML}^*\leq\theta\}\approx 1/2$ となり, $\hat{\theta}_{ML}^*$ は θ の AMU 推定量である. このとき

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_{ML}^*-\theta\right|\right] = \frac{1}{k}\log 2 \fallingdotseq 0.4382$$

になり, $\hat{\theta}_{ML}^*$ は (5.5) の下界を達成しない.

(II) $\hat{\theta}_1 = \alpha X_{(1)}+(1-\alpha)(X_{(n)}-1)$ $(0<\alpha<1)$ の場合. $P\{n(\hat{\theta}_1-\theta)\leq 0\}\approx e(1-\alpha)/(e-\alpha e+\alpha)$ より,

$$\hat{\theta}_1^* := \frac{e}{e+1}X_{(1)}+\frac{1}{e+1}(X_{(n)}-1)$$

とすれば, $\hat{\theta}_1^*$ は θ の AMU 推定量となる. このとき

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta\left[n\left|\hat{\theta}_1^* - \theta\right|\right] = \frac{e}{k(1+e)} \doteqdot 0.4621$$

になり, $\hat{\theta}_1^*$ は (5.5) の下界を達成せず, また, $\hat{\theta}_{ML}^*$ は, $\hat{\theta}_1^*$ よりも下界 (5.5) に近いという意味では良い推定量であることがわかる.

(III) $\hat{\theta}_2 = \alpha X_{(1)} + (1-\alpha)(X_{(n)}-1) + \beta/n \ \ (0<\alpha<1,\ \beta\in\mathbf{R})$ の場合. $\hat{\theta}_2$ に対して

$$P\left\{n\left(\hat{\theta}_2 - \theta\right) \le 0\right\} = \begin{cases} \frac{e(1-\alpha)}{e-\alpha e+\alpha} e^{-\frac{ke^{-1}}{1-\alpha}\beta} & (\beta \ge 0), \\ 1 - \frac{\alpha}{e-\alpha e+\alpha} e^{\frac{k}{\alpha}\beta} & (\beta < 0) \end{cases} \tag{5.6}$$

となる. まず, $\beta \ge 0$ のとき, θ の AMU 推定量として

$$\hat{\theta}_2^* := \frac{ce}{ce+1} X_{(1)} + \frac{1}{ce+1}(X_{(n)}-1) + \frac{e}{kn(ce+1)} \log\frac{2}{1+c}$$

をとる. ただし, c は $0<c<1$ となる定数とする. たとえば, $\lim_{n\to\infty} E_\theta[n|\hat{\theta}_2^* - \theta|]$ は $c \doteqdot 1$ のとき最小値はおよそ 0.4621 となるが, $\hat{\theta}_2^*$ は (5.5) の下界を達成しない. また, $\beta<0$ のとき, θ の AMU 推定量として

$$\hat{\theta}_3^* := \frac{e}{c} X_{(1)} + \frac{c-e}{c}(X_{(n)}-1) + \frac{e}{ckn} \log\frac{1-e+c}{2}$$

をとる. ただし, c は $e<c,\ e/(ck)\log(1-e+c/2) < 0$ となる定数とする. たとえば, $\lim_{n\to\infty} E_\theta[n|\hat{\theta}_3^* - \theta|]$ は $c \doteqdot 3.0377$ のとき最小値はおよそ 0.4160 となり, $\hat{\theta}_3^*$ は (5.5) の下界を達成しないが, $\hat{\theta}_3^*$ は, $\hat{\theta}_{ML}^*$ よりも下界 (5.5) に近いという意味では良い推定量であることが分かる.

6 おわりに

本論において, 1 母数切断分布族の母数に対して 1 次元十分統計量が存在するような場合に, 推定量の漸近的性質について考察した. この場合には, 分布族が限定的なものにならざるを得ない. 今後は多母数切断分布族の母数推定問題についても考えたい.

参考文献

[A82] Akahira, M. (1982). Asymptotic optimality of estimators in non-regular cases. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **34**, Part A, 69–82.

[AO02] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2002). Information inequalities for the Bayes risk for a family of non-regular distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **54** (4), 806–815.

[AT81] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). *Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency.* Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.

[BMG01] Barranco–Chamorro, I., Moreno–Rebollo, J. L. and Gómez–Gómez, M. T. (2001). Asymptotic properties of MLE and UMVUE in one–parameter truncated distributions. *Metrika*, **54**, 97–110.

[HC56] Hogg, R. V. and Craig, A. T. (1956). Sufficient statistics in elementary distribution theory. *Sankhya*, **17**, 209–216.

[K85] Karakostas, K. X. (1985). On minimum variance unbiased estimators. *Amer. Statist.*, **39**, 303–305.

[L83] Lehmann, E. L. (1983). *Theory of Point Estimation.* Wiley, New York.

[O01] Ohyauchi, N. (2001). Comparison of the Bayes risks of estimators for a family of truncated normal distributions. *Commun. Statist. -Theory and Meth.*, **31** (5), 699–718.

[OA01] Ohyauchi, N. and Akahira, M. (2001). On the lower bounds for the Bayes risk of estimators in the uniform and truncated normal cases. *Proc. Symps., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **1224**, 11–35.

[SO91] Stuart, A. and Ord, J. K. (1991). *Kendall's Advanced Theory of Statistics.* (Fifth ed. Vol. 2), Classical Inference and Relationship. Edward Arnold.

[T59] Tate, R. F. (1959). Unbiased estimation: Functions of location and scale parameters. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 341–366.