数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 13-23

松島-村上同型と簡約 Lie 群のコホモロジー的表現について

東京大学数理科学　森山 知則
(Tomonori Moriyama)

0. 序

1960 年代初頭に，松島与三はコンパクトな局所リーマン対称空間 M の betti 数 $b_r(M)$ について次のことを発見した：M の普遍被覆 X がコンパクト因子を持たないリーマン対称空間であるとき，$b_r(M)$ は，r が小さいときに，しばしば X のコンパクト双対 X_u の betti 数 $b_r(X_u)$ と一致する。この研究を出発点として，局所リーマン対称空間 M 上の局所系に係数を持つコホモロジー群についての研究が行われ，今日「松島-村上同型」と呼ばれる結果を得た ([M-M])。この同型は，M がリーマン面の場合の Eichler-Shimura 同型の高次元化と考えられる。本稿の前半では，これらの仕事を Borel-Wallach が 70 年代の終わり頃に整理した形で，解説する。

さて，松島-村上同型によれば，局所リーマン対称空間 M の betti 数 $b_r(M)$ は次のような和に書ける:

$$b_r(M) = \sum_{\pi \in \widehat{G}} b_r(M, \pi) \qquad b_r(M, \pi) \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}.$$

ここで，G は X の等長変換群で，$\widehat{G}$ は G の既約ユニタリ表現の同値類の全体のなす集合を表す。ここで、betti 数に寄与する表現，すなわち，$b_r(M, \pi) \neq 0$ なる表現たちはコホモロジー的ユニタリ表現の例である（コホモロジー的表現の定義は，小節 **(1.4)** で与える)。簡約リー群のコホモロジー的なユニタリ表現にはどのようなものがあるであろうか? M がコンパクトリーマン面の場合にはコホモロジー的なユニタリ表現は単位表現及び離散系列表現と呼ばれるものに限られることが容易にわかる。一般の簡約リー群のコホモロジー的表現についてはどうであろうか？　この問いに対して完全な解答を与えたのは，1984 年の Vogan-Zuckermann の論文 [V-Z] である。すなわち，簡約リー群のコホモロジー的なユニタリ表現は，全て，Zuckermann の導来函手加群 (derived functor module) として実現されるというのが彼等の主張である。

導来函手加群は，その名前から想像されるように，もともとは代数的に定義された表現だが，本稿の後半では，後に与えられたその幾何学的な実現 ([Wo]) を説明する。G/X がエルミート型対称空間の場合などに，G のある種の離散系列表現は，適当な等質 (複素) 多様体 G/L 上の正則ベクトル束の正則な切断の空間に実現されることが 1950 年代から知られていたが， さらに G/L 上の適当な正則直線束の Dolbeault コホモロジー群を考えると，全ての離散系列表現を含む既約ユニタリ表現たちが構成される。最後に，IV 型領域の場合に，松島-村上同型がどのような形をとるかを簡単に述べる。

1. 松島・村上同型

この節では，表題の「松島-村上同型」について解説する。

(1.1) 局所対称空間上の局所系係数コホモロジー. G を連結な半単純Lie群とし，K をその極大コンパクト部分群とする。$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}(K)$ などと書き，対応するCartan分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする。$\Gamma \subset G$ をその離散部分群で，$X = G/K$ に自由に(=固定点なしで)作用するものとする。すると，$\varpi : X \to M := \Gamma\backslash X$ は多様体の間の普遍被覆写像になっている。後で，M はコンパクトと仮定するが，今しばらくは，非コンパクトであってもよいものとする。$\rho : \Gamma \to GL(E_\rho)$ を Γ の有限次元表現とする $(/\mathbf{C})$。$\varpi_\rho : E(\rho) := \Gamma\backslash(X \times E_\rho) \to M$ は M 上のベクトル束である。このベクトル束 $E(\rho)$ はさらに局所系の構造を持つ。すなわち，$M = \cup_\alpha U_\alpha$ なる開被覆であって，各 U_α 上で $E(\rho)$ が局所自明化され，またtransition function $\psi_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(E_\rho)$ が局所定数関数であるようなものが定まる。したがって，M 上の層が

$$(M \text{ の開集合}) \ni U \mapsto \{s : U \mapsto \varpi_\rho^{-1}(U) |\ \text{局所定数切断}\ \} \in (\text{有限次元 } \mathbf{C}\text{-ベクトル空間})$$

で定義できる。この層を ρ に伴う局所定数層といい，同じ記号 $E(\rho)$ で表す。なお，

$$H^0(U, E(\rho)) \cong \{s^\sharp : \varpi^{-1}(U) \to E_\rho | s^\sharp(\gamma x) = \rho(\gamma)s^\sharp(x),\ \forall(\gamma, x) \in \Gamma \times \varpi^{-1}(U)\}$$

であることに注意しておこう。さらに，$\pi_k(\Gamma\backslash X, *) = \{1\}, (k \geqslant 2)$, すなわち，$M = \Gamma\backslash X$ は $K(\Gamma, 1)$-空間になっている。このことから，つぎのような標準的な同型の存在が証明される：

$$H^q(\Gamma, E_\rho) \cong H^q(\Gamma\backslash X, E(\rho)).$$

ここで，$H^q(\Gamma, E_\rho) := \mathrm{Ext}^q_{\mathbf{Z}\Gamma}(\mathbf{Z}, E_\rho)$ は群コホモロジーである。

(1.2) de Rham コホモロジー. 局所定数層 $E(\rho)$ は細層分解

$$0 \to E(\rho) \to \mathcal{A}^0_M \otimes E(\rho) \to \mathcal{A}^1_M \otimes E(\rho) \to \cdots \to \mathcal{A}^n_M \otimes E(\rho) \to 0$$

を持つ $(n := \dim M)$。ここで，$\mathcal{A}^i_M$ は M 上の i 次微分形式の芽のなす層を表す。したがって，$H^q(M, E(\rho))$ を局所系つきのde Rham 複体のコホモロジーとして書ける：

$$H^q(M, E(\rho)) \cong H^q(H^0(M, \mathcal{A}^\bullet_M \otimes E(\rho))), \qquad q \geqslant 0.$$

(1.3) $(\mathfrak{g}, K)$-コホモロジー. 以下，Γ の表現 ρ は G の表現に拡張されるとし，それをやはり，$\rho : G \to GL(E_\rho)$ とかく。今考えている，de Rham 複体 $\{H^0(M, \mathcal{A}^\bullet_M \otimes E(\rho)), d\}$ は (G, K, Γ, E_ρ) なるデータから得られた「特殊な」複体であるから，つぎのように書きかえることが出来る。まず，各 q について

$$H^0(M, \mathcal{A}^\bullet_M \otimes E(\rho)) \cong \{H^0(X, \mathcal{A}^q_X) \otimes E_\rho\}^\Gamma$$

なる自然な同型が存在する。ここで，左辺の M 上の $E(\rho)$-係数付きの微分形式 ω に対応する右辺の元を $\omega^\sharp$ と書くとき，

$$\omega_{\varpi(x)}(\varpi(X_1),\cdots,\varpi(X_q)) = [x, \omega^\sharp_x(X_1,\cdots,X_q)] \quad (x\in X, X_i \in T_xX)$$

となっている。さらに右辺は

$$C^q \equiv C^q(C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes E_\rho) = \mathrm{Hom}_K(\wedge^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes E_\rho)$$

に自然に同型である。但し，$\omega^\sharp$ に対応する C^q の元を f_ω と書くとき，

$$f_\omega(x_1,\cdots x_q; g) = \rho(g^{-1})\omega^\sharp(g_*\varpi_*x_1,\cdots,g_*\varpi_*x_q), \qquad x\in X,\ x_i\in\mathfrak{g}\cong T_eG$$

である。このとき，$\{C^q(C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes E_\rho)\}_{q\geqslant 0}$ の方で外微分作用素を記述しよう：

命題 1. 外微分作用素 $d^q = d^q_C : C^q \to C^{q+1}$ を

$$d^q f(x_0,x_1,\cdots,x_q) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i[R\otimes\rho](x_i)f(x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_q),$$

で定義する。すると次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} H^0(M,\mathcal{A}^q_M\otimes E(\rho)) & \xrightarrow{d^q} & H^0(M,\mathcal{A}^{q+1}_M\otimes E(\rho)) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ C^q(C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes E_\rho) & \xrightarrow{d^q_C} & C^{q+1}(C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes E_\rho) \end{array} \tag{1}$$

したがって，自然につぎの $(\mathfrak{g},K)$-コホモロジー群の定義に導かれる (歴史的経緯はさておき)：

定義 2. (σ, V_σ) を G の連続表現の C^∞- ベクトル全体のなす空間，あるいは $(\mathfrak{g},K)$-加群とする。

$$C^q(V_\sigma) := \mathrm{Hom}_K(\wedge^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, V_\sigma)$$

とおき，その differential d^q を

$$d^q f(x_0,x_1,\cdots,x_q) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma(x_i)f(x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_q), \quad f\in C^q(V_\sigma)$$

上の命題と同じ式で定める。そうしておいて，(σ,V_σ) に対して，その $(\mathfrak{g},K)$-コホモロジー群 $H^q(\mathfrak{g},K,V_\sigma)$ を

$$H^q(\mathfrak{g},K,V_\sigma) := \frac{\mathrm{Ker}(d^q : C^q(V_\sigma)\to C^{q+1}(V_\sigma))}{\mathrm{Image}(d^{q-1} : C^{q-1}(V_\sigma)\to C^q(V_\sigma))}$$

で定義する。

すると，明らかに，

$$H^q(M,E(\rho)) \cong H^q(\mathfrak{g},K,C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes E_\rho), \quad q\geqslant 0,$$

が成立する。ここから先，Γ **は余コンパクト** (i.e. $M=\Gamma\backslash X$ はコンパクト) であるとしよう。$L^2(\Gamma\backslash G)$ は，右移動 $[R(g)\varphi](g_1) = \varphi(g_1g)$ $(g,g_1\in G)$ によって G のユニタリ

表現になっているが，その C^∞- ベクトルの全体は，丁度 $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ に一致する。一方，Gel'fand-Graev-Piatetski-Shapiro の定理によって，ユニタリ表現 $L^2(\Gamma\backslash G)$ は,

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \widehat{\bigoplus}_{\pi\in\widehat{G}} \mathrm{Hom}_G(H_\pi, L^2(\Gamma\backslash G)) \otimes H_\pi$$

なる既約ユニタリ表現の離散的な Hilbert 直和に分解し，しかも各 G のユニタリ表現 π の重複度 $m_\Gamma(\pi) := \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_G(H_\pi, L^2(\Gamma\backslash G))$ は有限である。一方，後述するように，与えられた G の有限次元表現 E_ρ に対して $H^q(\mathfrak{g}, K, H_\pi \otimes E_\rho) \neq 0$ なる G の既約ユニタリ表現 (π, H_π) は有限個である。したがって，雑に考えると，

$$H^q(\mathfrak{g}, K, C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes E_\rho) \cong \bigoplus_{\pi\in\widehat{G}} \mathrm{Hom}_G(H_\pi, L^2(\Gamma\backslash G)) \otimes H^q(\mathfrak{g}, K, H_\pi \otimes E_\rho),$$

なる代数的直和に書けることが期待されるが，これは実際に正しいことが証明できる (この正当化の議論は，[B-W, Ch.VII, §3] を参照)。

(1.4) Kuga の補題. ここまでは，最後の議論の正当化を除けば，比較的，形式的な議論であった。次に，$(\mathfrak{g}, K)$-コホモロジー群 $H^q(\mathfrak{g}, K, H_\pi \otimes E_\rho)$ を決定する。

結果を述べるために，リー環 $\mathfrak{g}$ の Casimir 元 $C_\mathfrak{g}$ の定義を思い出す。まず，リー環 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B に関する正規直交基底 $\{\xi_i | 1 \leqslant i \leqslant \dim\mathfrak{g}\}$ を取り，$\mathfrak{g}$ の普遍展開環の元 $C_\mathfrak{g}$ を $C_\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}} \xi_i^2 \in U(\mathfrak{g})$ で定義する。$C_\mathfrak{g}$ は正規直交基底 $\{\xi_i\}$ のとり方によらずに定まり，$U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ に属す。G の既約ユニタリ表現 (π, H_π) の C^∞-ベクトル H_π^∞ の上には $Z(\mathfrak{g})$ はスカラーで作用する (既約ユニタリ表現に対する Schur の補題 [Kn. Prop 1.5)])。すなわち，環準同型 $\chi_\pi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbf{C}$ が存在して，

$$\pi(z)v = \chi_\pi(z), \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}), \quad \forall v \in H_\pi^\infty,$$

が成立する。χ_π を π の無限小指標という。同じく，G の既約有限次元表現 (ρ, E_ρ) にも，$Z(\mathfrak{g})$ はスカラーで作用するから，環準同型 $\chi_\rho : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbf{C}$ が存在し

$$\rho(z)v = \chi_\rho(z), \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}), \quad \forall v \in E_\rho,$$

となる。さて，結果は次のように極めて簡明である。

命題 3. (π, H_π) を G の既約ユニタリ表現，(ρ, E_ρ) を G の既約有限次元表現とする。$H_{\pi,K}$ で H_π の K 有限ベクトルの全体を表す.
(i) $\chi_\pi(C_\mathfrak{g}) \neq \chi_\rho(\mathbf{C}_\mathfrak{g})$ のとき，

$$H^q(\mathfrak{g}, K, H_{\pi,K} \otimes E_\rho) = \{0\}.$$

(ii) $\chi_\pi(C_\mathfrak{g}) = \chi_\rho(\mathbf{C}_\mathfrak{g})$ のとき，

$$H^q(\mathfrak{g}, K, H_{\pi,K} \otimes E_\rho) \cong \mathrm{Hom}_K(\wedge^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H_{\pi,K} \otimes E_\rho).$$

<u>命題 3 の証明の概略</u> 複体 $\{C^q = \mathrm{Hom}_K(\wedge^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H_\pi \otimes E_\rho), d\}$ にある内積 $(*, *)$ を入れる ([B-W, Ch.II, 2.2], 下の**注意**を参照). この内積に関して，$d : C^q \to C^{q+1}$ $(q \geqslant 0)$ の随伴作用素を $\delta : C^q \to C^{q-1}$ $(q \geqslant 0)$ とする:

$$(df_1, f_2) = (f_1, \delta f_2), \qquad \forall f_1 \in C^{q-1}, f_2 \in C^q.$$

そうして，ラプラシアン$\Delta : C^q \to C^q$を$\Delta := d\circ\delta + \delta\circ d$で定義する。$C^q$内の「調和型式」の空間$\mathcal{H}^q = \mathcal{H}^q(H_{\pi,K}\otimes E_\rho)$を$\mathcal{H}^q := \ker(\Delta : C^q \to C^q)$で定義する。すると，通常の調和積分論の議論と同様にして，

$$C^q = \mathcal{H}^q(H_{\pi,K}\otimes E_\rho)\widehat{\oplus} dC^{q-1}\widehat{\oplus}\delta C^{q+1}$$

が成立する（いま, C^qは有限次元ベクトル空間なので, 解析的な困難は現れない）。したがって,

$$H^q(\mathfrak{g}, K, H_{\pi,K}\otimes E_\rho) \cong \mathcal{H}^q(H_{\pi,K}\otimes E_\rho),$$

となる。一方，ラプラシアンΔを計算して，次の「Kuga's Lemma」と呼ばれる式を得る（[M-M, Ch.I, §6], [B-W, Theorem 2.5(iii)]):

$$\Delta = -\pi(C_\mathfrak{g}) + \rho(C_\mathfrak{g}) = (-\chi_\pi(C_\mathfrak{g}) + \chi_\rho(C_\mathfrak{g}))\mathrm{id}.$$

これから，命題は直ちに従う。 □

以上をまとめると次の定理を得る：

定理 4 (松島-村上同型). Gを連結な半単純リー群, Kをその極大コンパクト部分群, $\Gamma\subset G$をGの余コンパクトな離散部分群とする。このとき，Gの有限次元既約表現(ρ, E_ρ)に対して，同型対応

$$\begin{aligned} &H^q(\Gamma, E_\rho) \cong H^q(M, E(\rho)) \\ \cong &\bigoplus\nolimits_{\pi\in\widehat{G}} \mathrm{Hom}_G(H_\pi, L^2(\Gamma\backslash G)) \otimes H^q(\mathfrak{g}, K, H_{\pi,K}\otimes E_\rho) \\ \cong &\bigoplus\nolimits_{\pi\in\widehat{G_\rho}} \mathrm{Hom}_G(H_\pi, L^2(\Gamma\backslash G)) \otimes \mathrm{Hom}_K(\wedge^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H_{\pi,K}\otimes E_\rho). \end{aligned}$$

が成立する。但し,

$$\widehat{G}_\rho := \{\pi\in\widehat{G} | \chi_\pi(C_\mathfrak{g}) = \chi_\rho(C_\mathfrak{g})\}$$

とおいた。

この定理を踏まえて，コホモロジー的表現を次のように定義する:

定義 5. (σ, V_σ)を必ずしもユニタリ(正確には, ユニタリ化可能)とは限らぬ既約な$(\mathfrak{g}, K)$加群とする. このとき, (σ, V_σ)が**コホモロジー的**とは, Gの有限次元既約表現(ρ, E_ρ)と整数$i\geqslant 0$が存在して,

$$H^i(\mathfrak{g}, K, V_\sigma\otimes E_\rho) \neq 0,$$

なることをいう.

注意 上の命題3の証明で用いた$C^q(H_{\pi,K}\otimes E_\rho)$上の内積について，少しコメントする。$G$の有限次元表現$(\rho, E_\rho)$には

$$\begin{aligned} (\rho(k)u, \rho(k)v)_\rho &= (u, v)_\rho, && \forall k\in K, \forall u, v\in E_\rho; \\ (\rho(X)u, v)_\rho &= (u, \rho(X)v)_\rho, && \forall X\in\mathfrak{p}, \forall u, v\in E_\rho, \end{aligned}$$

を満たす内積$(*,*)_\rho$が必ず存在する([M-M, Part I, Lemma 3.1])ので一つ固定する。$E(\rho) \cong (\Gamma\backslash G)\times_K E_\rho$ なので，$E(\rho)$ の各ファイバーにも計量が誘導される。この計量と，局所リーマン 対称空間 M 上の通常のリーマン計量とによって，M 上の $E(\rho)$-係数の微分形式の空間 $H^0(M, \mathcal{A}_M^q \otimes E(\rho))$ に内積が定まる。これを前節の同型

$$H^0(M, \mathcal{A}_M^q \otimes E(\rho)) \cong C^q = C^q(C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes E_\rho)$$

を通じて，右辺に移し，かつそれを部分空間 $\mathrm{Hom}_K(\wedge^q\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H_{\pi,K}\otimes E_\rho) \subset C^q$ に制限したものが，証明で用いた内積である(この部分は[M-M, Part I, §5]を見よ)。したがって，定理の右辺は，丁度，M 上の $E(\rho)$-係数付き調和形式を取り出したことになっている。

(1.5) X が Hermite 対称空間の場合. $X = G/K$ が Hermite 対称空間の場合を考える。$\bar{o} = eK \in X$ での接ベクトル空間を $\mathfrak{p}$ と同一視すると，複素化 $\mathfrak{p}_\mathbf{C}$ は正則部分 $\mathfrak{p}^+$ 及び反正則部分 $\mathfrak{p}^-$ の直和に分かれる。H_π を既約とは限らぬ $(\mathfrak{g}, K)$-加群とする。$C^r = \mathrm{Hom}_K(\wedge^r\mathfrak{p}, H_{\pi,K})$ は,

$$C^{p,q} = \mathrm{Hom}_K(\wedge^p\mathfrak{p}^+ \otimes \wedge^q\mathfrak{p}^-, H_{\pi,K})$$

の直和に分解する:$C^r = \oplus_{p+q=r}C^{p,q}$。一方で，我々のラプラス作用素は, この分解を保つことが示される([M-M,Part II, Proposition 3.1])ので, $H_{\pi,K}$ の r 次の $(\mathfrak{g}, K)$-コホモロジーは,

$$H^r(\mathfrak{g}, K, V) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(\mathfrak{g}, K, V)$$

なる分解を持つ。

(1.6) 例 1 (消滅定理と Betti 数の公式). G が複素化 $G_\mathbf{C}$ を持つとし, ρ として自明な一次元表現 $(\mathbf{1}, \mathbf{C})$ を取る。このとき，松島-村上同型は

$$H^r(M, \mathbf{C}) \cong \bigoplus_{\pi\in\widehat{G}} \mathrm{Hom}_G(H_\pi, L^2(\Gamma\backslash G)) \otimes H^r(\mathfrak{g}, K, H_{\pi,K})$$

となる。ところが，次のような消滅定理がある:

命題 6 ([B-W, Ch. V, 3.4], cf. [V-Z, Theorem 8.1]). G を非コンパクトな単純リー群とし，(π, H_π) をその自明でない既約ユニタリ表現とする。このとき,

$$H^r(\mathfrak{g}, K, H_{\pi,K}) = \{0\}, \qquad r < \mathrm{rk}_\mathbf{R}(G)$$

が成立する。

したがって，$r < \mathrm{rk}_\mathbf{R}(G)$ の場合には $\pi = \mathbf{1}$ の項のみが生き残り,

$$H^r(M, \mathbf{C}) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathbf{C}, L^2(\Gamma\backslash G)) \otimes H^r(\mathfrak{g}, K, \mathbf{C}) \cong H^r(\mathfrak{g}, K, \mathbf{C}),$$

が成立する。$G_\mathbf{C}$ の連結部分群でリー環 $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ を持つものを G_u とかく。このとき $X_u = G_u/K$ を X のコンパクト双対という。 X_u の de Rham コホモロジー群の任意の元は，G_u-不変な微分形式によって代表されることを用いると,

$$H^q(X_u; \mathbf{C}) \cong H^q(\mathfrak{g}_u, K, \mathbf{C}) \cong H^q(\mathfrak{g}, K, \mathbf{C}), \qquad q \geqslant 0,$$

が判明する。結局，次を得る：

命題 7 ([M]). G を非コンパクト単純リー群で，K をその極大コンパクト部分群とする。M をリーマン対称空間 $X=G/K$ を余コンパクトな離散部分群 Γ で割って得られる，局所リーマン対称空間とする：$M=\Gamma\backslash X$. r を $r<\mathrm{rk}_{\mathbf{R}}(G)$ なる自然数とすると，M の r-番目の *betti* 数 $b_r(M)$ は X のコンパクト双対の r-番目の *betti* 数 $b_r(X_u)$ に等しい。

原論文 [M] では，後に証明された上の命題 7 よりすこし弱い消滅定理を用いているので，その分だけ弱い結果が書かれている。

(1.7) 例 2 (Eichler 同型). $G=SL(2,\mathbf{R})$ とする。この場合，各非負整数 $k\geqslant 0$ に対して，G の $(k+1)$ 次元既約表現は丁度一つ存在する。それを (ρ_k,E_k) と書こう。$H^i(\mathfrak{g},K,H_\pi\otimes E_k)\neq 0$ となる G の既約ユニタリ表現は, 次の場合に限られる:

$$H^0(\mathfrak{g},K,\mathbf{C})\cong\mathbf{C},\qquad H^2(\mathfrak{g},K,\mathbf{C})\cong\mathbf{C},$$
$$H^1(\mathfrak{g},K,D^+_{k+2}\otimes E_k)\cong H^{1,0}(\mathfrak{g},K,D^+_{k+2}\otimes E_k)\cong\mathbf{C},$$
$$H^1(\mathfrak{g},K,D^-_{k+2}\otimes E_k)\cong H^{0,1}(\mathfrak{g},K,D^-_{k+2}\otimes E_k)\cong\mathbf{C}.$$

ここで，D^+_l 最低ウェイト $l(\geqslant 2)$ を持つ G の最低ウェイト加群，すなわち，正則離散系列表現。 D^-_l は D^+_l の反傾表現で反正則離散系列表現と呼ばれる表現である。このことは, $SL(2,\mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現の分類と命題 3 よりすぐわかる。したがって，特に,

$$\begin{aligned}H^1(\Gamma,E_k)\cong&\mathrm{Hom}_G(D^+_{k+2},L^2(\Gamma\backslash G))\otimes H^1(\mathfrak{g},K,D^+_{k+2}\otimes E_k)\\ &\oplus\mathrm{Hom}_G(D^-_{k+2},L^2(\Gamma\backslash G))\otimes H^1(\mathfrak{g},K,D^-_{k+2}\otimes E_k)\end{aligned}$$

となる。さらに，(1,0) 型調和形式の空間

$$\mathrm{Hom}_G(D^+_{k+2},L^2(\Gamma\backslash G))\otimes H^1(\mathfrak{g},K,D^+_{k+2}\otimes E_k)$$

は，自然に，G 上の不連続群 Γ に関するウェイト $k+2$ の保型形式 $S_{k+2}(\Gamma)$ と同一視される。したがって，

$$H^1(\Gamma,E_k)\cong S_{k+2}(\Gamma)\oplus\overline{S_{k+2}(\Gamma)},$$

と，$H^1(\Gamma,E_k)$ を保型形式を使って書くことが出来る。これを，Eichler 同型という (cf. [Shim, Ch.8])。

(1.8) 文献. [M-M] および [B-W, Ch.1, Ch2, Ch7] が基本的な文献。[B1] は，[B-W] の要約。M が非コンパクトの場合については，まだ理論は発展途上のようであり，また私の力不足もあって，ここでは述べられなかった。[B2],[O, §1],[Schw] 等の概説を参照して頂きたい。

2. コホモロジー的表現

(2.1) Dolbeault コホモロジーによるユニタリ表現の構成. 一般の簡約リー群 G に対して，松島-村上同型を上述の Eichler 同型のように具体的に書くためには，G のコホモロジー的なユニタリ表現を決定することが必要となる。序で述べたように，コホモロジー的

なユニタリ表現は，G の等質空間 (複素多様体) 上の正則直線束の (Dolbeault) コホモロジー群の上に実現される。その構成法を述べよう (cf. [Ko])。

以下，簡単のため $G(\subset G_{\mathbf{C}})$ を半単純線型リー群とし，G の極大コンパクト部分群 K と K の Cartan 部分群 T を一つとって固定する。K に対応する G の Cartan 対合を θ で表す。$\mathfrak{t}$ を T のリー環とする。$\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ に対して，

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{t}, \alpha) := \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} | [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{t}\}$$

とおく。$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B が定める $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$ 上の双線型形式を $\langle , \rangle$ で表す。$\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ に対して，

$$\begin{aligned}
L \equiv L(\lambda) &:= \{g \in G | \mathrm{Ad}^*(g)\lambda = \lambda\} \\
\mathfrak{l}_{\mathbf{C}} \equiv \mathfrak{l}_{\mathbf{C}}(\lambda) &:= \mathrm{Lie}(L) \otimes \mathbf{C} = \bigoplus_{\langle \lambda, \alpha \rangle = 0} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{t}, \alpha) \\
\mathfrak{u} \equiv \mathfrak{u}(\lambda) &:= \bigoplus_{\langle \lambda, \alpha \rangle > 0} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{t}, \alpha), \\
\mathfrak{q} \equiv \mathfrak{q}(\lambda) &:= \mathfrak{l}_{\mathbf{C}}(\lambda) \oplus \mathfrak{u}(\lambda),
\end{aligned}$$

と置く。また，リー群 L のリー環を $\mathfrak{l}$ と書く。$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の部分リー環 $\mathfrak{q}(\lambda)$ を θ-stable な放物型部分代数と呼ぶ。$\mathfrak{q}(\lambda)$, $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ をリー環に持つ $G_{\mathbf{C}}$ の連結部分群をそれぞれ $Q = Q(\lambda)$, $K_{\mathbf{C}}$ とかくと，次のような等質空間の埋め込みが出来る:

$$K_{\mathbf{C}}/K_{\mathbf{C}} \cap Q(\lambda) \overset{\text{open}}{\hookleftarrow} K/K \cap L(\lambda) \hookrightarrow G/L(\lambda) \overset{\text{open}}{\hookrightarrow} G_{\mathbf{C}}/Q(\lambda).$$

この埋め込みによって，$K/K \cap L(\lambda)$ 及び，$G/L(\lambda)$ には，複素多様体の構造が入る (一般化された Borel embedding)。$K/K \cap L(\lambda)$ の複素次元を S で表す。
θ-stable な放物型部分群 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{u}$ に対して，$\rho(\mathfrak{u}) \in \sqrt{-1}\mathfrak{l}^*$ を

$$\langle 2\rho(\mathfrak{u}), y \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(y)|\mathfrak{u}), \qquad y \in \mathfrak{l}$$

で定める。$\mathfrak{q}$ が θ-stable なことから，$\rho(\mathfrak{u}) \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ と思えることに注意する。$\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ は，$\lambda + \rho(\mathfrak{u}(\lambda)) \in \sqrt{-1}\mathfrak{l}^*$ が，$L(\lambda)$ ユニタリ指標に持ちあがるとき，**integral** という。また，その指標を $\mathbf{C}_{\lambda+\rho(\mathfrak{u}(\lambda))}$ と記す。integral な $\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ に対して，$G \times_{L(\lambda)} \mathbf{C}_{\lambda+\rho(\mathfrak{u}(\lambda))}$ には $G_{\mathbf{C}} \times_{Q(\lambda)} \mathbf{C}_{\lambda+\rho(\mathfrak{u}(\lambda))}$ の引き戻しとして G-作用付きの正則直線束の構造が入る。したがって，この正則直線束の Dolbeault コホモロジー $H^i_{\bar\partial}(G/L(\lambda), \mathbf{C}_{\lambda+\rho(\mathfrak{u}(\lambda))})$ には G の表現が定まる。Dolbeault コホモロジー $H^i_{\bar\partial}(G/L(\lambda), \mathbf{C}_{\lambda+\rho(\mathfrak{u}(\lambda))})$ は $i = S$ のときを除いて，$\{0\}$ であり，$i = S$ のときには，自然な Fréchet 位相を持つ，一般には無限次元の，G の既約表現となることが知られている ([Wo])。しかも，この表現に伴う $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $H^S_{\bar\partial}(G/L(\lambda), \mathbf{C}_{\lambda+\rho(\mathfrak{u}(\lambda))})_K$ はユニタリ化可能であることが知られている。このユニタリ表現を $\Pi(G, \lambda)$ で表す。λ, λ' が $\mathrm{Ad}^*(G)$-同値ならば，それらはユニタリ同値な表現を定める。ユニタリ表現 $\Pi(G, \lambda)$ はその無限小指標や，K-タイプの分布などいろいろなことが詳細にわかるが，中でも (本稿において) 重要なことは，次の Vogan-Zuckermann の結果である。

定理 8 ([V-Z]). G のコホモロジー的な既約**ユニタリ**表現は，上で構成した $\Pi(G,\lambda)$ のいずれかにユニタリ同値である。また，$\Pi(G,\lambda)$ の $(\mathfrak{g},K)$-コホモロジーは具体的に計算される。

(2.2) betti 数に寄与する表現. 以下，本稿では，自明な表現と同じ無限小指標を持つ場合のみを考える。すなわち，局所対称空間の betti 数に松島-村上同型を通じて寄与しうるユニタリ表現のみを考えよう。

さて，前小節の記号で，λ として $\rho(\mathfrak{u}(\lambda))$ をとると，これは integral であり，直線束 $G\times_{L(\lambda)}\mathbf{C}_{\lambda+\rho(\mathfrak{u}(\lambda))}$ は $G/L(\lambda)$ の標準直線束 $\Omega=\Omega_{G/L(\lambda)}$ に他ならない。この場合，

$$A_{\mathfrak{q}}:=H^{S}_{\bar\partial}(G/L(\lambda),\mathbf{C}_{2\rho(\mathfrak{u}(\lambda))})_K,$$

とおく。このとき，次が成立する。

定理 9 ([V-Z]). (i) (π,H_π) を $H^i(\mathfrak{g},K,H_{\pi,K})\neq 0$ なる半単純リー群 G の既約ユニタリ表現とすると，ある θ-*stable* な放物型部分代数が存在して，$H_{\pi,K}$ と $A_{\mathfrak{q}}$ は $(\mathfrak{g},K)$-加群として同値である。
(ii) $R:=\dim_{\mathbf{C}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p}_{\mathbf{C}})$ とおく。このとき，

$$\begin{aligned}&H^i(\mathfrak{g},K,A_{\mathfrak{q}})\cong \mathrm{Hom}_K(\wedge^i\mathfrak{p},A_{\mathfrak{q}})\\ \cong &H^{i-R}(\mathfrak{l},(L\cap K)^\circ,\mathbf{C})\cong \mathrm{Hom}_{(L\cap K)^\circ}(\wedge^{i-R}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{l}),\mathbf{C}).\end{aligned}$$

さらに，$X=G/K$ がエルミート型対称空間のときには，各 Hodge 成分ごとに，定理 9 (ii) にあたることがわかる ([V-Z, Proposition 6.19])。なお，$\mathrm{Ad}^*(G)$-共役でない θ-stable な放物型部分代数 $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ に対しても $A_{\mathfrak{q}}$ と $A_{\mathfrak{q}'}$ が同一の表現を与えることがあり得ることを注意しておく。たとえば正則離散系列表現は, G/K 上の 0 次のコホモロジーとしても, G/T 上の高次の Dolbeault コホモロジーとしても実現される。

(2.3) $SL(2,\mathbf{R})$ の場合. $G=SL(2,\mathbf{R})\supset K=T=SO(2)$ とする。$\lambda(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix})=0$ のとき，$L=G$ であり，$A_{\mathfrak{q}}=\mathbf{C}$ (自明な表現). $\lambda(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix})\in\sqrt{-1}\mathbf{R}_{>0}$ のとき，埋め込み $G/L(\lambda)\overset{\text{open}}{\hookrightarrow}G_{\mathbf{C}}/Q(\lambda)$ は，上半平面のリーマン球面への埋め込みに他ならない。この場合には，$A_{\mathfrak{q}}=D_2^+$ (正則離散系列表現). $\lambda(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix})\in-\sqrt{-1}\mathbf{R}_{>0}$ とすると，やはり $G/L(\lambda)$ は上半平面だが，今度は複素構造の入り方が異なっている。得られる表現は $A_{\mathfrak{q}}=D_2^-$ (反正則離散系列表現) である。

(2.4) IV 型領域の場合. 離散系列表現の Hodge タイプ. まず，$G=SO_o(2n,2)\supset K=SO(2n)\times SO(2)$ とする。$X:=G/X$ は 複素 $2n$ 次元である。ここでは離散系列表現の Hodge タイプを決定してみよう。勿論，離散系列以外にもコホモロジー的な既約ユニタリ表現が多く存在するが，網羅的な記述はかなり面倒に思われる (Hodge タイプ (n,n) のコホモロジーに寄与しうる表現は [K-O, §5] に全て挙げてある)。$\xi_i:=E_{2i-1,2i}-E_{2i,2i-1}\in\mathfrak{g}$

$(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ とすれば，$\mathfrak{g}$ 及び $\mathfrak{k}$ の共通の Cartan 部分代数として $\mathfrak{t} := \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \mathbf{R}\xi_i$ が取れる。$f_i \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ を $\langle f_i, \xi_j \rangle = \sqrt{-1}\delta_{i,j}$ で定める。すると，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 及び，$(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ に関するルート系は，

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm(f_i \pm f_j) | 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\}$$
$$\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm(f_i \pm f_j) | 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

となる。$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とし，$\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}$ の正則部分 $\mathfrak{p}^+$ 及び反正則部分 $\mathfrak{p}^-$ を

$$\Delta(\mathfrak{p}^+, \mathfrak{t}) = \{\pm f_i + f_{n+1}) | 1 \leqslant i \leqslant n\};$$
$$\Delta(\mathfrak{p}^-, \mathfrak{t}) = \{\pm f_i - f_{n+1}) | 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

で定める。$0 \leqslant k \leqslant n$ とし，$\lambda = \sum_i \lambda_i f_i \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ を，

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k > \lambda_{n+1} > \lambda_{k+1} > \cdots \lambda_n > 0$$

を満たすように取り，$\mathfrak{q}'_k = \mathfrak{q}(\lambda)$, $\mathfrak{q}''_k := \overline{\mathfrak{q}_k}$ とおく。このとき，$A_\mathfrak{q}$ $(\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'_k, \mathfrak{q}''_k)$ は丁度，自明表現と同じ無限小指標を持つ離散系列表現の全体になっている。上の定理 9 によって，$\dim_C H^i(\mathfrak{g}, K, A_\mathfrak{q}) = \delta_{i,2n}$ $(\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'_k, \mathfrak{q}''_k)$ であることがわかるが ([B-W, Ch. II, Theorem 5.3])，さらに，[V-Z, Proposition 6.19] によって Hodge タイプも次のように決定できる：$H^{2n-k,k}(\mathfrak{g}, K, A_{\mathfrak{q}'_k}) = \mathbf{C}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$，及び，$H^{k,2n-k}(\mathfrak{g}, K, A_{\mathfrak{q}''_k}) \cong \mathbf{C}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

$G = SO_o(2n+1, 2)$ のときにも，自明表現と同じ無限小指標を持つ離散系列表現 π は全部で $2n+2$ 個あり，$\dim_\mathbf{C} H^{2n+1}(\mathfrak{g}, K, \pi) = \delta_{i,2n+1}$ となるが，$2n+2$ 個の Hodge タイプ，$(2n+1-k, k)$ $(0 \leqslant k \leqslant 2n+1)$ のどれに寄与するかでこれらの表現は識別される。

(2.5) 文献. コホモロジー的な表現の代数的な構成についての教科書：[Kn-V], [V], [Wa, Ch.6]。離散系列表現の実現については，W. Schmid の論文や概説記事 :[Schm1-3] を参照。

References

[Bl] Borel, A., Cohomologie de sous-groupes discretes et representations de groupes semi-simples, Asterisque **32-33** 73-112 (1976).

[B2] Borel, A., Cohomology and spectrum of an arithmetic group, Operator thory and group representations vol.I, 28-45, (1984).

[B-W] Borel, A. and Wallach, N., *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Mathematical surveys and monographs, 67, AMS (1999).

[Kn] Knapp, A. W., *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples.* Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press (1986)

[Kn-V] Knapp, A. W. and Vogan. D, *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series, 45. Princeton University Press (1995)

[Ko] Kobayashi, T., 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現論,「数学」**46**, 28-47 (1994).

[Ko-O] KOBAYASHI, T. AND ODA. T, A vanishig theorem for modular symbols on locally symmetric spaces, Comment. Math. Helv. **73**, 45-70 (1998)

[M] MATSUSHIMA, Y. , On betti numbers of compact, locally symmetric Riemanninan manifolds, Osaka. Math. J. **14** 1-20 (1962).

[M-M] MATSUSHIMA, Y. AND MURAKAMI, S, On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric riemannian manifolds, Ann. Math **78**, 365-416 (1966).

[O] ODA, T., 古典領域の算術商の幾何学, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所 研究所報 **21** (第六回津田塾大学整数論シンポジウム報告集) 1-22 (2000).

[Schm1] SCHMID, W., Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, (1967), In: *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, Mathematical surveys and monographs, 67, AMS (1999), 223- 286.

[Schm2] SCHMID, W., On a conjecture of Langlands, Ann. of Math. **93** 1-42 (1971).

[Schm3] SCHMID, W., Discrete series, Proc. Symp. Pure Math. **61**, 83-113 (1997).

[Sch] SCHWERMER, J., Cohomology of arithmetic groups, automorphic forms and L-functions, In: Cohomology of arithmetic groups and automorphic forms, 1-29, Lecture Notes in Math., 1447 (1990).

[Shm] SHIMURA, G., Introduction to arithmetic thoery of automorphic functions, Princeton University Press (1971).

[V] VOGAN, D., Representations of real redcuctive Lie groups , Birkhauiser (1981).

[Wa] WALLACH, N., Real redcuctive groups I, Academic Press (1988).

[Wo] WONG, H-W., Dolbeault cohomological realization of Zuckerman modules associated with finite rank representaions , J. Funct. Anlysis **129** (1995) 428-454.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN

E-mail address: moriy-to@ms.u-tokyo.ac.jp