数理解析研究所講究録 1344 巻 2003 年 40-50



# 標数 0 の微分閉体のモデル理論

岡山大学大学院・自然科学研究科 田中 広志 (Hiroshi Tanaka)
Graduate School of Natural Science and Technology,
Okayama University

微分体とは体に微分演算子を含めたものである. 微分閉体とは体における代数閉体の概念を微分体において考えたものであり, 1959 年に A. Robinson により公理化され, L. Blum によって単純化された. 以下, 標数 0 の微分閉体における $\delta$-閉集合での微分代数的な意味での定義可能という概念が, モデル理論における定義可能という概念と同値になることを示す.

## 1 微分体の理論

言語 $L=\{0,1,+,-,\cdot,\sigma\}$ とする.

**定義 1.1** 可換環の公理に次の閉論理式を付け加えたものを微分環の理論と呼ぶ:

$$\forall x \forall y \delta(x+y)=\delta(x)+\delta(y);$$
$$\forall x \forall y \delta(x \cdot y)=\delta(x) \cdot y+\delta(y) \cdot x.$$

また体の公理に上記の閉論理式を付け加えたものを微分体の理論と呼び, $DF$ と書く.

**定義 1.2** 微分環の理論, 微分体の理論のモデルをそれぞれ微分環, 微分体と呼ぶ.

今後 $x \cdot y$ を単に $xy$ と書く. また以下において $R$ はすべて微分環とし, 標数はすべて 0 とする.

**補題 1.3** $R$ を微分環とする. $a, b \in R$ で $b$ を単元とする. このとき次の 1, 2 が成り立つ:

1. $\delta(a^n)=na^{n-1}\delta(a)$;
2. $\delta(\frac{a}{b})=\frac{b\delta(a)-a\delta(b)}{b^2}$.

上記の 2 は整域の商体が微分体になっているということを保証している.

**定義 1.4** $R$ を微分環とする.
このとき $R\{\overline{X}\}:=R[X_1,\delta(X_1),\delta^2(X_1),\ldots,X_2,\delta(X_2),\delta^2(X_2),\ldots,X_n,\delta(X_n),\delta^2(X_n),\ldots]$ と書き, $R$ の differential polynomial ring と呼ぶ. また $R\{\overline{X}\}$ の元を differential polynomial と呼ぶ.

**定義 1.5** $R$ を微分環, $I \subset R$ とする.
このとき $I$ がイデアルでかつ $\delta$ についての演算で閉じているとき, differential ideal と呼ぶ. また $I$ が differential ideal でかつある自然数 $m$ が存在して $a^m \in I$ ならば $a \in I$ であるとき, radical differential ideal と呼ぶ. $I$ が differential ideal でかつ素イデアルであるとき, prime differential ideal と呼ぶ. $A \subset R$ とし, $A$ を含む最小の differential ideal を $A$ により生成される differential ideal と呼び, $\langle A\rangle$ と書く.

**定義 1.6** $R\{X\}$ の元 $f(X)$ を含む最小の differential ideal を $f(X)$ により生成された differential ideal と呼び, $\langle f(X)\rangle$ と書く.

**定義 1.7** $f(X)\in R\{X\}\setminus R$ に対して, $f$ に現れる $\delta^n(X)$ の中で最大の $n$ を $f$ の order と呼び, $\mathrm{ord}(f)$ と書く. また $f\in R$ のとき $\mathrm{ord}(f)=-1$ とする.

$f$ の order が $n\geq 0$ のならば

$$f(X)=\sum_{i=0}^{m} g_i(X,\delta(X),\delta^2(X),\ldots,\delta^{n-1}(X))(\delta^n(X))^i$$

と書ける (ここで $g_i\in R[X,\delta(X),\ldots,\delta^{n-1}(X)]$). $g_m\neq 0$ のとき $f$ は次数 $m$ を持つと呼ぶ. このとき

$$s_f:=\sum_{i=1}^{m} ig_i(X,\delta(X),\delta^2(X),\ldots,\delta^{n-1}(X))(\delta^n(X))^{i-1}$$

を $f$ の separant と呼ぶ.

**定義 1.8** $f(X),g(X)\in R\{X\}$ とする. $\mathrm{ord}(f)<\mathrm{ord}(g)$ であるかまたは $\mathrm{ord}(f)=\mathrm{ord}(g)$ でかつ $f$ の次数が $g$ の次数より小さいとき, $f(X)$ が $g(X)$ より simpler であると呼び $f(X)\ll g(X)$ と書く.

**注意 1.9** 明らかに $s_f\ll f$ である.

**定義 1.10** 任意の $f(X)\in R\{X\}\setminus R$ に対して

$$I_R(f):=\{g(X)\in R\{X\}\mid \text{ある自然数 } m \text{ が存在して } s_f^m g(X)\in\langle f\rangle\}$$

と定義する. なお誤解のないときは単に $I(f)$ と書く.

**補題 1.11** $f(X)\in R\{X\}\setminus R$ で既約であるとする. このとき $I(f)$ は prime differential ideal である.

**補題 1.12** $R\{X\}$ の任意の 0 でない prime differential ideal は $I(f)$ となる既約多項式 $f(X)$ が存在する.

**定義 1.13** $L/K$ を微分体の拡大, $\alpha\in L$ とする. $I(\alpha/K):=\{f(X)\in K\{X\}\mid f(\alpha)=0\}$ と定義する. このとき $I(\alpha/K)\neq\{0\}$ ならば $\alpha$ は $K$ 上 differentially algebraic であると呼ぶ. また $I(\alpha/K)=\{0\}$ ならば $\alpha$ は $K$ 上 differentially transcendental であると呼ぶ.

**定義 1.14** $R$ を微分環, $I\subset K\{X\}$ を differential ideal, $f\in I$ とする. 任意の $g\ll f$ に対して, $g\neq 0$ ならば $g\notin I$ となるとき $f$ を $I$ の最小多項式と呼ぶ.

**補題 1.15** $L/K$ を微分体の拡大とする. $f$ を $K\{X\}$ の既約多項式とし, $f_1$ を $f$ の $L\{X\}$ での既約分解の一つとする. このとき, $I_L(f_1)\cap K\{X\}=I_K(f)$ が成り立つ.

**補題 1.16** $R$ を微分環とする. このとき $I$ が differential ideal ならば, $\sqrt{I}$ は radical differential ideal である.

**定義 1.17** $I$ を radical differential ideal とする. このときある $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ が存在して $I=\sqrt{\langle\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\rangle}$ となるならば, $I$ は有限生成であると呼ぶ.

$R$ をネーター環とするとき, $R[X]$ もまたネーター環であるというのが Hilbert's Basis Theorem であるが, これは differential polynomial ring では一般には成り立たない. なぜならば次の例を考えると明らかである.

$$\langle X^2, \delta(X)^2, \delta^2(X)^2, \ldots \rangle.$$

しかしながら radical differential ideal たちに関しては成り立つというのが次の定理である.

**定理 1.18 (Ritt-Raudenbush's Basis Theorem)** $R$ を微分環とし, $R$ の任意の radical differential ideal は有限生成とする. このとき, $R\{\overline{X}\}$ の任意の radical differential ideal は有限生成である.

**補題 1.19** $R$ を微分環, $I$ を differential ideal とし $a, b \in R$ とする. このとき $\sqrt{\langle I, a\rangle}\sqrt{\langle I, b\rangle} \subset \sqrt{\langle I, ab\rangle}$.

**定理 1.20 (Decomposition Theorem)** $R$ は radical differential ideal たちに関して極大条件を満たすとする. このとき任意の radical differential ideal は prime differential ideal の有限個の共通集合で書ける.

**(証明)** 結論を否定する. すると radical differential ideal たちに関する極大条件より, prime differential ideal の有限個の共通部分で書けないものの中で極大なものが存在する. それを $I$ とおく. $I$ は素イデアルではないので, $ab \in I$ でかつ $a \notin I$ かつ $b \notin I$ なるものが存在する. このとき $\sqrt{\langle I, a\rangle}\sqrt{\langle I, b\rangle} \subset \sqrt{\langle I, ab\rangle} = I$. よって任意の $c \in \sqrt{\langle I, a\rangle} \cap \sqrt{\langle I, b\rangle}$ に対して, $c^2 \in I$ である. $I$ は radical differential ideal より $c \in I$ である. それ故 $\sqrt{\langle I, a\rangle} \cap \sqrt{\langle I, b\rangle} = I$. これは $I$ の性質に反する.

■

可換環においては極大イデアルは, 素イデアルである. 微分環においても同様のことがわかる.

**定義 1.21** $R$ を微分環, $I$ を differential ideal とする. このとき $I \subsetneq J \neq R$ となる differential ideal $J$ が存在しないとき, $I$ は maximal differential ideal と呼ぶ.

**補題 1.22** $R$ を微分環, $I$ を differential ideal とする. このとき, $I$ を含む maximal differential ideal は存在する.

**定理 1.23** maximal differential ideal $J$ は prime differential ideal である.

**(証明)** 背理法により示す. $J$ は prime でないとする. このとき $a, b \notin J$ かつ $ab \in J$ なるものが取れる. $J$ の極大性から $\sqrt{\langle J, a\rangle} = R$, $\sqrt{\langle J, b\rangle} = R$ が言える. よって

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\langle J, a\rangle}\sqrt{\langle J, b\rangle} \\ &\subset \sqrt{\langle J, ab\rangle} \\ &= \sqrt{J}\ (ab \in J \text{ より}). \end{aligned}$$

それ故 $\sqrt{J} = R$ となるので, $1 \in \sqrt{J}$ が言える. 従ってある $m$ が存在して $1^m \in J$ すなわち $1 \in J$ となり矛盾する. ■

**定義 1.24** $k$ を微分体, $D \subset k^n$ とする. このときある $\Sigma \subset k\{\overline{X}\}$ が存在して

$$D = \{\overline{a} \in k^n \mid \text{任意の } f \in \Sigma \text{に対して}, f(\overline{a}) = 0\}$$

となるならば, $D$ は $\delta$-閉集合であると呼び $D = V_\delta(\Sigma)$ と書く.

また $\delta$-閉集合 $D$ が任意の 2 つの真の $\delta$-閉集合の和にならないとき, $D$ は既約であると呼ぶ.

**補題 1.25** $k$ を微分体, $\Sigma \subset k\{\overline{X}\}$ とする. このとき, $V_\delta(\Sigma) = V_\delta(\sqrt{\langle\Sigma\rangle})$ である.

**補題 1.26** 既約な $\delta$-閉集合 $V$ はある prime differential ideal $P$ が存在して, $V = V_\delta(P)$ と書ける.

**系 1.27** 任意の $\delta$-閉集合は既約な $\delta$-閉集合の有限個の和集合で書ける.

**定義 1.28** 以下の閉論理式を $\Phi_{\{n,m_0,m_1,\ldots,m_n,l_0,l_1,\ldots,l_{n-1}\}}$ と表す ($n$ は 1 以上の自然数, $m_0, m_1, \ldots, m_n, l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ は任意の自然数) :

$$\begin{aligned}
&\forall a_{0,0,\ldots,0}\forall a_{1,0,\ldots,0}\cdots\forall a_{m_0,0,\ldots,0}\forall a_{0,1,0,\ldots,0}\cdots\forall a_{0,m_1,0,\ldots,0}\cdots\forall a_{m_0,m_1,\ldots,m_n}\\
&\forall b_{0,0,\ldots,0}\forall b_{1,0,\ldots,0}\cdots\forall b_{l_0,0,\ldots,0}\forall b_{0,1,0,\ldots,0}\cdots\forall a_{0,b_1,0,\ldots,0}\cdots\forall b_{l_0,l_1,\ldots,l_{n-1}}\\
&(a_{m_0,m_1,\ldots,m_n} \neq 0 \wedge (b_{0,0,\ldots,0} \neq 0 \vee \cdots \vee b_{l_0,l_1,\ldots,l_{n-1}} \neq 0)) \to\\
&\exists v(\Sigma_{0\leq i_0\leq m_0,\ldots,0\leq i_n\leq m_n} a_{i_0,\ldots,i_n} v^{i_0}\delta(v)^{i_1}\delta^2(v)^{i_2}\cdots\delta^n(v)^{i_n} = 0 \wedge\\
&\Sigma_{0\leq i_0\leq l_0,\ldots,0\leq i_{n-1}\leq l_{n-1}} b_{i_0,\ldots,i_{n-1}} v^{i_0}\delta(v)^{i_1}\delta^2(v)^{i_2}\cdots\delta^{n-1}(v)^{i_{n-1}} \neq 0).
\end{aligned}$$

**定義 1.29** $DF$ に $\{\Phi_{\{n,m_0,m_1,\ldots,m_n,l_0,l_1,\ldots,l_{n-1}\}} \mid n$ は 1 以上の自然数, $m_0, m_1, \ldots, m_n, l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ は自然数 $\}$ を付け加えた理論を微分閉体の理論と呼び, $DCF$ と書く.

**注意 1.30** 微分閉体は明らかに, 代数閉体である.

**補題 1.31** $k$ を微分体, $f(X), g(X) \in k\{X\}$ で $\mathrm{ord}(g) < \mathrm{ord}(f)$ とする. このとき $k$ の拡大微分体 $l$ と $a \in l$ が存在して $f(a) = 0$ かつ $g(a) \neq 0$ が成り立つ.

**(証明)**$f$ の $k\{X\}$ での既約因子の一つを $f_1$ とする. このとき $\mathrm{ord}(f) = \mathrm{ord}(f_1)$ である. よって $I = I(f_1)$ とおくと, $g \notin I$ である. $k\{X\}/I$ の商体を $F$ とする. $F$ は自然に $k$ の拡大微分体になっている. $a \in F$ を $X + I$ とすると $f \in I, g \notin I$ より $f(a) = 0$ かつ $g(a) \neq 0$ である. よって補題は示せた.

■

**命題 1.32** $k$ を微分体とする. このとき $k$ を含む微分閉体 $K$ が存在する.

**(証明)** まず次のことを満たす $k$ の拡大微分体 $k^*$ が存在することを示す.

> 任意の $f(X), g(X) \in k\{X\}$ に対して $\mathrm{ord}(g) < \mathrm{ord}(f)$ ならば $f(a) = 0$ かつ $g(a) \neq 0$ となる $a \in k^*$ が存在する.

$\Sigma := \{f(c_{fg}) = 0 \wedge g(c_{fg}) \neq 0 \mid f, g \in k\{X\}, \mathrm{ord}(g) < \mathrm{ord}(f)\}$ とおく (各 $c_{fg}$ は新しい定数記号). このとき, $\mathrm{Diag}(k) \cup \Sigma \cup DF$ は無矛盾である. なぜならば $\Sigma$ の任意の有限部分集合 $\Sigma_n = \{f_1(c_{f_1g_1}) = 0 \wedge g_1(c_{f_1g_1}) \neq 0\} \cup \cdots \cup \{f_n(c_{f_ng_n}) = 0 \wedge g_n(c_{f_ng_n}) \neq 0\}$ に対して補題 1.31 を繰り返すことにより $\mathrm{Diag}(k) \cup \Sigma_n \cup DF$ のモデルが存在する. よってコンパクト性定理により, $\mathrm{Diag}(k) \cup \Sigma \cup DF$ は無矛盾である. それ故 $\mathrm{Diag}(k) \cup \Sigma \cup DF$ のモデルが存在するが, そのモデルは明らかに上記の条件を満たす.

次に $k_0 = k, k_1 = k^*, k_2 = k_1^*, \ldots$ となる微分体の拡大列を作り, $K := \bigcup_{0\leq i\in\omega} k_i$ とおき, $f(X), g(X) \in K\{X\}$ かつ $\mathrm{ord}(g) < \mathrm{ord}(f)$ とする. このとき $f(X), g(X) \in k_n\{X\}$ となる自然数 $n$ が取れる. すると拡大列の作り方から $f(a) = 0$ かつ $g(a) \neq 0$ となる $a \in k_{n+1}$ が取れる. 従って $K$ は微分閉体になっている.

**補題 1.33** $K, L \models DCF$ でかつ $L$ は $\omega^+$-飽和とする. また $\overline{a} \in K, \overline{b} \in L, k = \langle \overline{a} \rangle, l = \langle \overline{b} \rangle$ とする. $\sigma$ を $k$ から $l$ への同型写像で $\overline{a}$ を $\overline{b}$ に写すものとする. このとき任意の $\alpha \in K$ に対して, $\sigma$ の拡張であり $k\langle \alpha \rangle$ から $L$ への中への同型写像 $\sigma^*$ が存在する.

**(証明)**$\alpha \in K$ とする.

- $\alpha$ が $k$ 上 differentially algebraic のとき
  $f$ を $I(\alpha/k)$ の最小多項式, $\mathrm{ord}(f) = n, \sigma(f) = g$ とする. また $\Gamma(v) := \{g(v) = 0\} \cup \{h(v) \neq 0 : h(X) \in l(X), \mathrm{ord}(h) < n\}$ とおく.
  **主張** $\Gamma(v)$ は無矛盾である.
  なぜならば任意の自然数 $N$ に対して, $\{g(v) = 0\} \cup \{h_1(v), h_2(v), \ldots, h_N(v) : \mathrm{ord}(h_i) < n (1 \leq i \leq N)\}$ を考える. すると $L \models DCF$ より, $g(v) = 0 \wedge \Pi_{i=i}^{N} h_i(v) \neq 0$ を満たす $\beta_0 \in L$ が存在する. よってコンパクト性定理により $\Gamma(v)$ は無矛盾である.
  $\Gamma(v)$ は無矛盾でかつ $L$ は $\omega^+$-飽和より, $\Gamma(v)$ を満たす $\beta \in L$ が存在する. ここで $\sigma$ の拡張 $\sigma^* : k\langle \alpha \rangle \to l\langle \beta \rangle$ を $\sigma^*(\alpha) = \beta$ と決める. このとき $f, g$ の作り方から, $\sigma^*$ は単射になるので $k(\alpha) \cong l(\beta)$ が言える. よって補題は成り立つ.
- $\alpha$ が $k$ 上 differentially transcendental のとき
  $L$ は $\omega^+$-飽和より $l$ 上 differentially transcendental な元 $\beta \in L$ が存在する. $\sigma^* : k\langle \alpha \rangle \to l\langle \beta \rangle$ を $\sigma^*(\alpha) = \beta$ と決める. このとき明らかに $k(\alpha) \cong l(\beta)$ である. よって補題は成り立つ.

■

**定理 1.34** $DCF$ は QE を許す, よってモデル完全である. さらに完全である.

**(証明)** まず QE を許すことを示す. そのためには次の主張を示せば十分である.
**主張** $K, L \models DCF$ とし, $k$ は $K, L$ の部分微分体とする. また $\overline{a} \in k$ とし, $\phi(v, \overline{w})$ を qf-論理式とする. このとき $K \models \exists v \phi(v, \overline{a})$ ならば, $L \models \exists v \phi(v, \overline{a})$.

$K, L \models DCF$ とし, $k$ は $K, L$ の部分微分体とする. また $\overline{a} \in k$ とし, $\phi(v, \overline{w})$ を qf-論理式とする. なお一般性を失うことなしに $K, L$ は十分飽和しているとしてよい. $K \models \exists v \phi(v, \overline{a})$ とする. するとある $\alpha \in K$ が存在して, $K \models \phi(\alpha, \overline{a})$ が言える. $l = \langle \overline{a} \rangle$ とおくと上記の補題よりある $\beta \in L$ が存在して, $l\langle \alpha \rangle \cong l\langle \beta \rangle$ が成り立つ. よって $\phi$ は qf-論理式だから $L \models \phi(\beta, \overline{a})$ である. それ故 $L \models \exists v \phi(v, \overline{a})$ となり主張は示せた. 従って $DCF$ は QE を許す.

次に完全性を示す. $K, L \models DCF$ とする. $\mathbf{Q}$ において $\delta$ を自明な作用と考えることにより, $\mathbf{Q}$ は微分体になる. さらに $\mathbf{Q}$ は明らかに $K, L$ の部分構造になっている. また任意の閉論理式 $\phi$ に対して, $DCF$ は QE を許すのである qf-閉論理式 $\sigma$ が存在して $DCF \models \phi \leftrightarrow \sigma$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} K \models \phi &\Leftrightarrow K \models \sigma \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Q} \models \sigma \\ &\Leftrightarrow L \models \sigma \\ &\Leftrightarrow L \models \phi \end{aligned}$$

それ故 $K \equiv L$ となり, $DCF$ は完全である.

■

$R$ を微分環とし, $I$ を differential ideal とする.
また

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} R &:= \{p \mid p \text{ は } R \text{ の prime differential ideal}\};\\ V(I) &:= \{p \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset p\};\\ D(I) &:= \{p \in \operatorname{Spec} R \mid I \not\subset p\} \end{aligned}$$

とする.

**補題 1.35** $R$ を微分環とする. このとき, 次のことが成り立つ:

1. $V(\{0\}) = \operatorname{Spec} R$;
   $V(R) = \{0\}$;
2. $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$;
3. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\Sigma_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

上記補題より $\operatorname{Spec} R$ には $V(I)$ を閉集合とした位相を入れることが出来る.

**補題 1.36** $R$ を微分環, $V(f) := \{p \in \operatorname{Spec} R \mid f \in p\}$ とする. このとき次が成り立つ:

1. $V(f) = V(\langle f\rangle)$;
2. $V(I) = \bigcap_{f\in I} V(f)$.

**補題 1.37** $R$ を微分環, $D(f) := \{p \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin p\}$ とおく. このとき次が成り立つ:

1. $D(f) = D(\langle f\rangle)$;
2. $D(I) = \bigcup_{f\in I} D(f)$;
3. $I = \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ ならば $D(I) = \bigcup_{j=1}^{m} D(f_j)$.

**補題 1.38** $R$ を微分環, $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset R$ とする. このとき次は同値である:

1. $\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D(f_\lambda)$;
2. $\{f_\lambda\}$ が生成する differential ideal $\langle f_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ が $R$ と一致する.

**定義 1.39** $k$ を微分体, $p \in S_n(k)$ とする. このとき

$$I_p = \{f \in k\{\overline{X}\} \mid \text{“}f(\overline{v}) = 0\text{''} \in p\}$$

と書く. $I_p$ は明らかに prime differential ideal である.

**定義 1.40** $T$ を完全な理論, $M \models T$ とする. 任意の $\phi \in L(M)$ に対して $[\phi] := \{p \in S_n(M) \mid \phi \in p\}$ と書く. このとき, $[\phi]$ たちを基本開集合として位相を入れることが出来る. さらに実際には $[\phi]$ は閉集合にもなっている. またコンパクト性定理により $S_n(M)$ はコンパクト空間であることが言える.

**定理 1.41** $k$ を微分体とし, $f : S_n(k) \to \mathrm{Spec}\, k\{\overline{X}\}$ を $f(p) = I_p$ と決める. このとき $f$ は全単射でかつ連続である.

**(証明)** $f$ が全単射であることは省略する. $f$ が連続であることを示す. $\mathrm{Spec}\, k\{\overline{X}\}$ の任意の閉集合 $V$ を取るとある differential ideal $I$ が存在して $V = V(I)$ と書ける. $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$ より,

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(I)) &= f^{-1}(\bigcap_{f \in I} V(f)) \\ &= \bigcap_{f \in I} f^{-1}(V(f)) \end{aligned}$$

である. ところで

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(f)) &= \{p \in S_n(k) \mid I_p \in V(f)\} \\ &= \{p \in S_n(k) \mid f \in I_p\} \\ &= \{p \in S_n(k) \mid \text{“}f = 0\text{''} \in p\} \\ &= [f = 0] \end{aligned}$$

であるから, $f^{-1}(V(f))$ は閉集合である. 従って $f^{-1}(V(I))$ は閉集合となり $f$ は連続である. ■

**系 1.42** $k$ を微分体とする. このとき, $\mathrm{Spec}\, k\{\overline{X}\}$ はコンパクト空間である.

**定理 1.43** $DCF$ は $\omega$-安定である.

**定義 1.44** $k$ を微分体, $K$ を $k$ を含む微分閉体とする. このとき任意の $L \models DCF$ に対して, $L \supset k$ ならば $K$ は $L$ の部分モデルとして埋め込めるとき $K$ を $k$ の微分閉包と呼ぶ.

**注意 1.45** $DCF$ のモデル完全性により, 上記の $K$ は実際には $L$ の初等部分モデルとして埋め込めている.

**系 1.46** $k$ を微分体とする. このとき $k$ の微分閉包は存在する.

**定義 1.47** $K \models DCF$ とし, $V \subset K^n$ を $\delta$-閉集合とする.

$$I_\delta(V) := \{f(\overline{X}) \in K\{\overline{X}\} \mid \text{任意の}\overline{a} \in V \text{ に対して}, f(\overline{a}) = 0\}$$

と書く.

**定義 1.48** $K \models DCF$ とし, $V \subset K^n$ を $\delta$-閉集合, $k$ を $K$ の部分微分体とする. このとき $I_\delta(V)$ が $k\{\overline{X}\}$ の元たちによって生成されるならば, $V$ は $k$ 上定義可能といい, $k$ を $V$ の定義微分体と呼ぶ. 特にこの講究録においては以下の定義 1.49 と区別するため, $V$ は $k$ 上微分代数的意味において定義可能と呼ぶ.

**定義 1.49** $M$ を $L$-構造とする. また $A \subset M$ とし, $D \subset M^n$ とする. このとき, ある $L(A)$-論理式 $\phi(\overline{x})$ が存在して $D = \{\overline{a} \in M^n \mid M \models \phi(\overline{a})\}$ と書けるならば, $D$ は $A$ 上の定義可能集合または $A$ 上定義可能と呼ぶ. 特にこの講究録においては, $D$ は $A$ 上モデル理論的意味において定義可能と呼ぶ.

## 2 主定理

**定義 2.1** $A$ を含む最小の微分体を $\langle A\rangle$ と書く. また $k$ を微分体としたとき $k$ と $A$ を含む最小の微分体を $k\langle A\rangle$ と書く.

**定義 2.2** $L/K$ を微分体の拡大, $a \in L$ とする. ある $f(X) \in K[X]$ が存在して $f(a) = 0$ となるとき, $a$ は $K$ 上強代数的であると呼ぶ.

**命題 2.3** $\mathbf{C}$ を $DCF$ の万有モデル, $A \subset \mathbf{C}$ とする. また $k = \langle A\rangle, a \in \mathbf{C}$ とする. このとき次の 1, 2 は同値である:

1. $a$ は $A$ 上代数的である;
2. $a$ は $k$ 上強代数的である.

**(証明)**(2 $\Rightarrow$ 1) 定義より明らか.

(1 $\Rightarrow$ 2) $I(a/k)$ の最小多項式を $f$ とする. $\mathrm{ord}(f) = 0$ ならば明らかに $a$ は $k$ 上強代数的である. $\mathrm{ord}(f) \geq 1$ とする. $k$ を含む微分閉体を $K$ とする. $f$ の $K\{X\}$ での既約分解の一つを $f_1$ とすると, $\mathrm{ord}(f) = \mathrm{ord}(f_1)$ である. $\mathbf{C}$ は十分飽和しているので, $I(f_1) = I(b/K)$ となる $b \in \mathbf{C}$ が存在する. また $I(b/K) \cap k\{X\} = I(a/k)$ より $\mathrm{tp}(a/k) = \mathrm{tp}(b/k)$ である. ここで $a$ は $k$ 上代数的より, ある $\phi(v) \in L(k)$ と自然数 $m$ が存在して $\mathbf{C} \models \phi(a)$ かつ $|\{\alpha \in \mathbf{C} \mid \mathbf{C} \models \phi(\alpha)\}| = m$ が成り立つ. $\exists^{=m} v\phi(v)$ により $\phi(v)$ の解がちょうど $m$ 個あるということを表す論理式とする. すると $\mathbf{C} \models \exists^{=m} v\phi(v)$ が成り立つ. $K$ は $k$ を含む微分閉体でかつ $DCF$ のモデル完全性により, $K \models \exists^{=m} v\phi(v)$ が成り立つ. $a, b$ は $\phi(v)$ の解より $a, b \in K$ となる. しかしながら, $\mathrm{ord}(f_1) \geq 1$ より $b \notin K$ となり矛盾する.

■

**系 2.4** $\mathbf{C}$ を $DCF$ の万有モデル, $A \subset \mathbf{C}$ とする. また $k = \langle A\rangle, a \in \mathbf{C}$ とする. このとき $\mathrm{dcl}(A) = k$ が成り立つ.

**(証明)** $\mathrm{dcl}(A) \supset k$ は明らか.

$\mathrm{dcl}(A) \subset k$ を示す. $a \in \mathrm{dcl}(A)$ とする. このとき $a$ は $k$ 上代数的より上記の補題から $a$ は $k$ 上強代数的である. つまり $a$ の $k$ 上の最小多項式 $f(x)$ が存在する. ここで $f(x)$ の次数が 2 以上とする. $k$ は完全体より $f(x)$ は重解を持たないので $\mathbf{C}$ での解は 2 個以上になる. これは $a \in \mathrm{dcl}(A)$ であることに反する. 従って $f(x)$ の次数は 1 となり $a \in k$ が成り立つ.

■

以下微分体ではなく, 体でのことについて少し考察する.

**定義 2.5** $K$ を代数閉体, $X \subset K^n$ とする. このときある $\Sigma \subset K[\overline{X}]$ が存在して

$$X = \{\overline{a} \in K^n \mid 任意の\ f \in \Sigma に対して\ f(\overline{a})\}$$

となるならば, $X$ はザリスキー閉集合と呼び, $X = V(\Sigma)$ と書く.

**定義 2.6** $K$ を代数閉体, $V \subset K^n$ をザリスキー閉集合とする.

$$I(V) := \{f(\overline{X}) \in K[\overline{X}] \mid \text{任意の}\overline{a} \in V \text{ に対して } f(\overline{a}) = 0\}$$

と書く. また $k$ が $K$ の部分体のとき, $I_k(V) := I(V) \cap k[\overline{X}]$ と書く.

**定義 2.7** $V \subset K^n$ をザリスキー閉集合, $k$ を $K$ の部分体とする. このとき $I(V)$ が $k[\overline{X}]$ の元たちによって生成されるならば, $V$ は $k$ 上定義されるといい $k$ を $V$ の定義体と呼ぶ.

**補題 2.8** $K/k$ を体の拡大とする. $K[\overline{X}]$ のイデアル $I$ が $k[\overline{X}]$ の元からなる基底 $\{F_i(\overline{X})\}$ を持つとする. また, $\{F_i(\overline{X})\}$ で生成される $k[\overline{X}]$ のイデアルを $I_0$ とする.

このとき任意の $Q(\overline{X}) \in I$ は $I_0$ の元の $K$-係数一次結合で書ける. さらに, $Q(\overline{X}) = \Sigma w_\lambda P_\lambda(\overline{X})$ ($P_\lambda(\overline{X}) \in k[\overline{X}], w_\lambda \in K, \{w_\lambda\}$ は $k$ 上一次独立) と表すと, $P_\lambda(\overline{X}) \in I_0$ である. また $I \cap k[\overline{X}] = I_0$ が成り立つ.

**(証明)** 任意の $Q(\overline{X}) \in I$ が $I_0$ の元の $K$-係数一次結合で書けることは明らか.

$Q(\overline{X}) = \Sigma\gamma_\mu G_\mu(\overline{X})$ ($\gamma_\mu \in K, G_\mu(\overline{X}) \in I_0$) となるような $\{G_\mu(\overline{X})\}$ のうち極小なものを取る. すると $\{G_\mu(\overline{X})\}$ は $k$ 上一次独立である. $\Sigma\gamma_\mu G_\mu(\overline{X}) = \Sigma w_\lambda P_\lambda(\overline{X})$ より, 各単項式の係数に関して関係式がいくつか得られる. しかもそれは $\{G_\mu(\overline{X})\}$ の個数だけ一次独立なものがある. よって各 $\gamma_\mu$ について解けて, $\gamma_\mu = \Sigma_\lambda d_{\mu\lambda} w_\lambda$ ($d_{\mu\lambda} \in k$) という関係が得られる. $\Sigma w_\lambda P_\lambda(\overline{X}) = \Sigma_{\mu\lambda} d_{\mu\lambda} w_\lambda G_\mu(\overline{X})$ より, $P_\lambda(\overline{X}) = \Sigma_\mu d_{\mu\lambda} G_\mu(\overline{X}) \in I_0$ が成り立つ. $I \cap k[\overline{X}] = I_0$ は明らか.

■

**命題 2.9** $K$ を代数閉体, $V \subset K^n$ をザリスキー閉集合とする. このとき, $V$ は最小の定義体を持つ.

$k$ を $V$ の最小の定義体としたとき, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ に対して次の 1, 2 は同値である:

1. $\sigma$ が $V$ を固定する;
2. $\sigma$ が $k$ の元を固定する.

**(証明)** 変数 $X_1, \ldots, X_n$ に関する単項式 $X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$ の全体を一列に並べて $M_i(\overline{X})(i = 0, 1, \ldots)$ とする. 各 $M_i(\overline{X})$ に対して, $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1} \in K$ が存在して $M_i(\overline{X}) - \Sigma_{j=0}^{i-1} a_j M_j(\overline{X}) \in I(V)$ となるならば, この $M_i(\overline{X})$ を取り除く. この操作を繰り返して残った単項式の全体を $\{M_{i_\lambda}(\overline{X})\}$ とする. よって $i_\lambda$ と一致しない $i$ に対しては $\{a_\lambda\}$ が存在して, $P_i(\overline{X}) := M_i(\overline{X}) - \Sigma_{i_\lambda < i} a_\lambda M_{i_\lambda}(\overline{X}) \in I(V)$ となるように出来る. また $i_\lambda$ に対しては $P_{i_\lambda}(\overline{X}) := 0$ とおく. すると任意の $i$ に対して $P_i(\overline{X})$ は $I(V)$ によって一意的に定まる. $I(V)$ は明らかに $\{P_i(\overline{X})\}$ 全体で生成される. $P_0, \ldots, P_m$ が $I(V)$ を生成するような $m$ のうち, 最小なものを改めて $m$ だとする. $P_0, \ldots, P_m$ の係数たちにより生成される体を $k$ とする. このとき $k$ は明らかに $V$ の定義体である.

次に $k$ が $V$ の最小の定義体であることを示す. $l$ を $V$ の任意の定義体だとする. $P_i(\overline{X}) \neq 0$ となる任意の $i$ に対して, $P_i(\overline{X}) := M_i(\overline{X}) - \Sigma_{i_\lambda} a_\lambda M_{i_\lambda}(\overline{X})$ の係数の中から $k$ 上に一次独立な元の極大集合を $\{w_\rho\}$ とする. ただし $w_0 = 1$ としておく. すると各 $\lambda$ に対して, $a_\lambda = \Sigma_\rho d_{\lambda\rho} w_\rho (d_{\lambda\rho} \in l)$ と書け, $P_i(\overline{X}) = \Sigma w_\rho Q_\rho(\overline{X})$ と書ける. ここで $Q_0(\overline{X}) = M_i(\overline{X}) - \Sigma_\lambda d_{\lambda 0} M_{i_\lambda}(\overline{X}), Q_\rho(\overline{X}) = -\Sigma_\lambda d_{\lambda\rho} M_{i_\lambda}(\overline{X})(\rho \neq 0)$ である. 上記の補題より, 各 $Q_\rho(\overline{X})$ は $I_k(V)$ に属するが $M_{i_\lambda}(\overline{X})$ の一次結合は 0 以外は $I(V)$ に属しえないから, $\rho \neq 0$ ならば $Q_\rho(\overline{X}) = 0$ で $Q_0(\overline{X}) = P_i(\overline{X})$ である. よって $a_\lambda = d_{\lambda 0} \in l$ である. それ故 $k \subset l$. 従って $k$ は $V$ の最小の定義体である. 最後の同値性は $k$ の作り方より明らかである. ■

**命題 2.10 (Seidenberg's Differential Nullstellensatz)** $K \models DCF$ とする. $K\{\overline{X}\}$ の任意の radical differential ideal $I$ に対して $V_\delta(I)$ を対応させる写像を考えると, $K\{\overline{X}\}$ の radical differential ideal 全体から $\delta$-閉集合全体への 1 対 1 対応になる.

**(証明)** まず全射性を示す.

任意に $\delta$-閉集合 $V$ をとる. このときある differential ideal $I$ が存在して $V = V_\delta(I)$ と書ける. $V_\delta(I) = V_\delta(\sqrt{I})$ より, radical differential ideal として $\sqrt{I}$ を取ればよい. よって全射である.

次に単射性を示す.

任意に radical differential ideal $I \neq J$ を取る. 一般性を失うことなしに $g(\overline{X}) \notin I$ かつ $g(\overline{X}) \in J$ としてよい. radical differential ideal の Decomposition Theorem により, $I \subset P$ でかつ $g(\overline{X}) \notin P$ となる prime differential ideal $P$ が存在する. $K\{\overline{X}\}/P$ の商体を $L$ とおく. このとき自然に $K \subset L$ となる. $L$ を含む微分閉体を $\tilde{L}$ とおく. すると任意の $f \in P$ に対して, $f(\alpha) = 0$ かつ $g(\alpha) \neq 0$ となる $\alpha \in L$ が存在する. ここで Ritt-Raudenbush's Basis Theorem より $P = \sqrt{\{f_1, \dots, f_m\}}$ ($f_1, \dots, f_m \in K\{\overline{X}\}$) と書ける. よって $\tilde{L} \models \exists \overline{v} \bigwedge_{i=1}^{m} f(\overline{v}) = 0 \wedge g(\overline{v}) \neq 0$ が成り立つ. $DCF$ はモデル完全なので, $K \models \exists \overline{v} \bigwedge_{i=1}^{m} f(\overline{v}) = 0 \wedge g(\overline{v}) \neq 0$ が成り立つ. それ故 $V_\delta(P) \neq V_\delta(J)$. 従って $V_\delta(I) \neq V_\delta(J)$ となり単射である.

■

ここまでで主定理のための事実がすべて記述できた. 最後に主定理を示す.

**定理 2.11** (主定理) $K \models DCF$ とし, $k$ を $K$ の部分微分体とする. また $V$ は $\delta$-閉集合とする. このとき次の 1, 2 は同値である:

1. $V$ は $k$ 上モデル理論的意味において定義可能である;
2. $V$ は $k$ 上微分代数的意味において定義可能である.

**(証明)**(2⇒1) $V$ は $k$ 上微分代数的意味において定義可能なので, $I_\delta(V)$ は $k\{\overline{X}\}$ の元により生成される. また $I_\delta(V)$ は radical differential ideal より,

$$I_\delta(V) = \sqrt{\langle f_1, \dots, f_m \rangle} (f_i \in k\{\overline{X}\})$$

と書ける. よって Seidenberg's Differential Nullstellensatz より, $V = \{\overline{a} \in K^n \mid \bigwedge_{i=1}^{m} f_i(\overline{a}) = 0\}$ となるので $V$ はモデル理論的意味において定義可能である.

(1⇒2) $V$ は $\delta$-閉集合より, $V = \{\overline{a} \in K^n \mid \bigwedge_{i=1}^{l} g_i(\overline{a}) = 0\}$ と書ける. ここである自然数 $N$ が存在して, $g_i \in K[X_i^{(j)} : i \leq n, j \leq N] (1 \leq i \leq l)$ が成り立つ. $J = \sqrt{\langle g_1, \dots, g_l \rangle}, J_0 = J \cap K[X_i^{(j)} \mid i \leq n, j \leq N]$ とおく. また, $k_0$ を $J_0$ の定義体とする. このとき任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ に対して

$$V(J) \text{ を固定する} \Leftrightarrow V(J_0) \text{ を固定する} \Leftrightarrow \sigma \text{が } k_0 \text{の元を固定する.} \tag{1}$$

が成り立つ. $V$ は $k$ 上モデル理論的意味において定義可能より, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(K)$ に対して $\sigma(V) = V$ となる. よって (1) から, $\sigma$ が $k_0$ の元を固定する. それ故 $k_0 \subset \mathrm{dcl}(k)$. $\mathrm{dcl}(k) = k$ より, $k_0 \subset k$. 従って $V$ は $k$ 上微分代数的意味において定義可能である. ■

## 参考文献

[1] D. Marker, *Introduction to the Model Theory of Fields*, in Model Theory of Fields, Lecture Notes in Logic **5**, Springer, 1996.

[2] D. Marker, *Model Theory of Differential Fields*, in Model Theory of Fields, Lecture Notes in Logic **5**, Springer, 1996.

[3] D. Marker, *Model Theory of Differential Fields*, in Model Theory, Algebra, and Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **39**, Cambridge Univ. Press, New York, 2000.

[4] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, 1973.

[5] E. R. Kolchin, *Galois Theory of Differential Fields*, Amer. J. Math **75**, 1953, 753-824.

[6] E. R. Kolchin, *Constrained Extensions of Differential Fields*, Advances in Math. **12**, 1974, 141-170.

[7] A. Seidenberg, *Some Basic Theorems in Differential Algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 1952, 174-190.

[8] A. Pillay, *Model Theory of Algebraically Closed Fields*, in Model Theory and Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **1696**, Springer 1998.

[9] C. Wood, *Differentially Closed Fields*, in Model Theory and Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **1696**, Springer 1998.

[10] 坪井明人, **モデルの理論**, 河合文化教育研究所, 1997.

[11] 板井昌典, **幾何的モデル理論入門**, 日本評論社, 2002.

[12] 中野茂男, **代数幾何学入門**, 共立出版株式会社, 1969.