数理解析研究所講究録 1345 巻 2003 年 31-49

Endomorphisms of Smooth Projective 3-Folds with Nonnegative Kodaira Dimension (非負小平次元を持つ3次元代数多様体の自己準同型写像)

岐阜大学・教育学部 藤本圭男 (Yoshio Fujimoto) *
(Faculty of Education, Gifu University)

1 序

コンパクト解析空間 X から、自分自身への全射正則写像 $f: X \to X$ を自己準同型写像 (endomorphism、略称 end) と呼ぶことにする。集合
End$(X) := \{f: X \to X \mid f$ は自己準同型写像$\}$、
Aut$(X) := \{g: X \cong X \mid g$ は自己同型写像$\}$
には共に自然な複素解析空間の構造が入り、特に後者は複素リー群となる。以下は良く知られた事実である。

Fact （い）X が射影代数多様体ならば、f は有限射。
（ろ）更に X が非特異で、標準束 K_X が pseudo-effective、特に X の小平次元が非負（$\kappa(X) \geq 0$）ならば、f は有限エタール射。更に、X の構造層 $\mathcal{O}_X$ のオイラー・ポワンカレ標数は $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ となる。
（は）X が正規コンパクト解析空間で一般型 (i.e. $\kappa(X) = \dim(X)$) ならば、f は同型写像。

そこで、自己準同型写像 $f: X \to X$ が同型写像でないとき、非自明な自己準同型写像 (nontrivial endomorphism) と定義する。非自明な自己準同型写像を許す多様体として、アーベル多様体、トーリック多様体、又はそれらと別の多様体との直積、更に適当な有限群による商多様体が挙げられる。一般的に、非自明な自己準同型写像を数多く持つ多様体

*The author was partially supported by the Sumitomo Foundation.

は、これらとどれ位、隔たりがあるだろうか？ **Fact**（は）より、一般型多様体はこの範疇から除外される。次の疑問が自然に生じる。

Question $(\mathbf{E_{n,a}})$: n 次元非特異射影代数多様体 X は、$0 \leq a := \kappa(X) < n$ 且、非自明な自己準同型写像 $f\colon X \to X$ を有すると仮定せよ。この時、X の適当な有限次不分岐被覆 $\pi\colon \tilde{X} \to X$ がとれて、$\tilde{X}$ は、ある非特異射影代数多様体 W $(0 \leq \dim(W) < n)$ 上のスムースな *abelian scheme* の構造を持つか？

論文 [2] の主要結果を述べよう。

主定理 Question $(E_{n,a})$ は $(n,a) = (3,0)$ 又は $(3,2)$ の時、肯定的。更に、$(n,a) = (3,1)$ で X_{min}（X の極小モデルで実は非特異となる）の飯高ファイブレーション $\Phi\colon X_{min} \to C$ の一般ファイバーが超楕円曲面の場合も肯定的。いずれの場合も、X の適当な不分岐被覆 $\tilde{X}$ は abelian 3-fold 又は $S \times E$ (但し、E は非特異楕円曲線、S は $\kappa(S) = \kappa(X)$ なる非特異代数曲面）のタイプに取れる。

2 主定理の証明の概略

本題に入る前に簡単であるが、$n = 1, 2$ の場合について、言及する。

$n = 1$ の場合、X は楕円曲線となって明らかに肯定的。

$n = 2$ の場合も肯定的。

略証 X は必然的に、極小 (minimal) となる。何故なら、もし第一種例外曲線 e が存在すると仮定しよう。非自明なエタール endomorphism $f\colon X \to X$ の合成 によって e の逆像をとる操作を繰り返せば、X の上には、互いに交わらない無限個の（-1)-曲線が存在し、ピカール数 $\rho(X) = \infty$ となって矛盾。次に **Fact**（ろ）＋ 代数曲面の分類 ＋ 小平先生の楕円曲面論により、

（1） $\kappa(X) = 0$ ならば、X はアーベル曲面、又は超楕円曲面のいずれか、

（2） $\kappa(X) = 1$ ならば、X の飯高ファイブレーション　$\phi\colon X \to C$ は、ザイフェルト楕円曲面、即ち特異ファイバーとしては、台が非特異楕円曲線である ${}_mI_0$ 型の重複ファイバーのみを許し、それ以外では楕円曲線を主ファイバーとするファイバー束の構造を与える。

注 1　$\kappa(X)=1$ の場合に別証明を与えておく。$(n,a)=(3,2)$ の場合の主定理の証明で用いる議論の雛型である。X は極小なので、K_X は *semi-ample*。$\phi\colon X\to C$ を X の飯高ファイブレーションとする。以下の議論より、底曲線 C の自己同型 $g\colon C\cong C$ が引き起こされて、$g\circ\phi=\phi\circ f$ が成り立つ。もし、ϕ の或る特異ファイバーの既約成分に有理曲線 γ が含まれたとせよ。非自明なエタール *endomorphism* $f\colon X\to X$ の十分高い合成積 $f^k\colon X\to X(k>0)$ を用いて、γ の逆像をとる。すると、$\phi\colon X\to C$ のファイバー内には、無限個の有理曲線が含まれることになって、矛盾が生じる。故に ϕ の特異ファイバーは mI_0 型重複ファイバーのみ。*q.e.d.*

さて、本題に移る。以下、$f\colon X\to X$ は, $\kappa(X)\geq 0$ なる非特異射影代数多様体 X の上の自己準同型写像（必ずしも非自明とは限らぬ）としよう。f によって保存されるデーターとして、次に着目する。

1．飯高ファイブレーション：

$\Phi\colon X\cdots\to W$ を X の飯高 fibration とする。すると、底空間 W の上の自己同型写像 $h\colon W\cong W$ が誘導されて、$\Phi\circ f=h\circ\Phi$ を満たす。何故なら étale endomorphism f による引き戻し写像　$f^*:\Gamma(X,\mathcal{O}(mK_X))\to\Gamma(X,\mathcal{O}(mK_X))$ (m は十分大きい自然数) は、単射であるが、$\Gamma(X,\mathcal{O}(mK_X))$ の有限次元性より同型写像となる為。

2．X の端射線：

X の標準束 K_X は, nef でないと仮定しよう。すると、étale endomorphism f は、X の端射線 R（K_X-negative extremal ray) 全体の置換を引き起こす。より正確に述べると次の様になる。

$f\colon Y\to X$ を非特異射影代数多様体の間の finite surjective morphism とする。ノルム写像　$f_*\colon \mathrm{Div}(Y)\to\mathrm{Div}(X)$ から誘導される push-foward map を $f_*\colon N^1(Y)\to N^1(X)$ と記す。1－サイクルとカルチエ因子との交点数を取ることで、$N_1(X)$ は $N^1(X)$ の双対と見なせる。そこで、引き戻し写像 $f^*\colon N_1(X)\to N_1(Y)$ を、f_* の随伴射 (adjoint map) として定義する。

命題 1　$f\colon Y\to X$ を、非特異射影代数多様体の間の有限次エタール被覆とする。更に、X と Y のピカール数は等しく、X の標準束 K_X は *nef* でないと仮定する。すると

（1）f_* と f^* とは、ソース Y の *extremal ray* R' 全体の為す集合と、ターゲット X の *extremal ray* R 全体の為す集合の間の 1 : 1 対応を与える。

（2）X の任意の *extremal ray* R に対して、$\phi := \mathrm{Cont}_R\colon X \to X'$ を R の収縮写像、$\psi := \mathrm{Cont}_{R'}\colon Y \to Y'$ を *extremal ray* $R' := f^*R$ の収縮写像とする。すると、全射有限射 $f'\colon Y' \to X'$ がとれて、$\phi \circ f = f' \circ \psi$, $f^{-1}(\mathrm{Exc}(\phi)) = \mathrm{Exc}(\psi)$ 且 $f'^{-1}(\phi(\mathrm{Exc}(\phi))) = \psi(\mathrm{Exc}(\psi))$ が成立する。

略証

Kleiman の判定法より $f_*\overline{NE}(Y) = \overline{NE}(X), f^*\overline{NE}(X) = \overline{NE}(Y)$（但し、$\overline{NE}(X)$ は、X の森錐）を得る。$K_Y \sim f^*K_X$ より、Y の森錐 (Mori-cone) の K_Y-negative part と X の森錐の K_X-negative part とは、1：1 に対応する。錐体定理 [4] より、森錐は K_X-negative part において局所的に polyhedral。故に、線形同型写像　$f^*\colon N_1(X) \cong N_1(Y)$, $f_*\colon N_1(Y) \cong N_1(X)$ により、森錐の端っこ（尖っている）に相当する端射線どうしは、ソースとターゲットで 1：1 に対応する。(2) の証明は容易である。 q.e.d.

特に、ソース Y とターゲット X の間に別の同型写像が存在する場合が、endomorphism $f\colon X \to X$ に相当し、f_* は X の extremal ray 全体の置換を引き起こす事が分かる。又、$f\colon Y \to X$ が分岐被覆の場合でも、分岐因子の形が明示できれば、適用できるケースがある。

命題 2　$f\colon S \to T$ を相対的極小な有理楕円曲面 S, T（共に $\mathbf{P}^2$ の 9 点ブローアップ）の間の任意の全射正則写像とすると、f は必然的に同型写像となる。

次に、$\dim X = \dim Y = 3$ 且、f が同型写像でない場合を考察する。この際、X や Y の因子収縮写像としては、森 [4] によって分類された 5 通りの可能性の内、唯一のタイプしか起こり得ない。

命題 3　$f\colon Y \to X$ を、$\kappa(X) = \kappa(Y) \geq 0, \rho(Y) = \rho(X)$ なる非特異 3 次元射影代数多様体　Y, X の間の同型写像でない有限次エタール被覆とする。もし、X の標準束 K_X が *nef* でないならば、X の任意の *extremal ray* R, 及び Y の任意の *extremal ray* R' は、（*E1*）型のみ。即ち R(*resp.* R') の収縮写像 $\phi := \mathrm{Cont}_R\colon X \to X'$(*resp.* $\psi := \mathrm{Cont}_{R'}\colon Y \to Y'$) は、非特異 3 次元射影代数多様体 X'(*resp.* Y') の非特異代数曲線 C(*resp.* C')（いずれも $\mathbf{P}^1$ でない）を中心とするブローアップ（の逆）である。更に、もし $f^*R = R'$ ならば、同型写像でない有限次エタール被覆　$f'\colon Y' \to X'$ が誘導されて、$\phi \circ f = f' \circ \psi$ かつ $f'^{-1}(C) = C'$　を満たす。

略証 命題 1 より、初めから $f^*R = R'$ と仮定してよい。$\psi(resp.\ \phi)$ の例外因子を、$E'(resp.\ E)$ とおく。命題 1 より、$f^{-1}(E) = E'$ を得る。森 [4] による端射線の分類 (因子収縮写像の場合は 5 通り) の内、(E1) 型のみが起こり得る事を示す。R が、(E1) 型でないとすると、E は一点につぶれ、単連結である。f は同型写像でないから、$E' = f^{-1}(E)$ は、2 個以上の連結成分に分解する。一方、$\psi: Y' \to Y$ は因子収縮写像だから、E' は既約でなければならず、矛盾。 q.e.d.

次の定理は主定理の証明において中核を為す。

定理 4 $f: X \to X$ は、$\kappa(X) \geq 0$ なる非特異 3 次元射影代数多様体 X の上の非自明な *endomorphism* とする。もし、K_X が *nef* でなければ、X の任意の端射線 R は *(E1)* 型であり、R の収縮写像 $\mathrm{Cont}_R: X \to X'$ は、X' の非特異楕円曲線 C を中心とするブローアップ (の逆) と一致する。

略証 X は非特異 3 次元射影代数多様体なので、flipping contraction は起こらない。森 [4] の端射線の分類結果と合わせると、X 上に端射線は高々、有限個しかない事が分かる。命題 1 より、endomorphism $f: X \to X$ を、f の適当な $k(>0)$ 回の合成写像 $f^k = f \circ \cdots \circ f$ で置き換える事により、f の push-forward map f_* は、X の端射線全体の為す有限集合の上に、恒等置換を引き起こすとしてよい。命題 3 より、X の任意の端射線 R は (E1) 型、即ち R の収縮写像 $\phi := \mathrm{Cont}_R: X \to X'$ は X' の非特異代数曲線 C を中心とするブローアップ (の逆) である。C は $\mathbf{P}^1$ でない。X' の上に、非自明な endomorphism $f': X' \to X'$ が引き起こされて、$f' \circ \phi = \phi \circ f$ を満たす。C の種数 $g(C) \geq 2$ と仮定しよう。フルヴィッツの公式より、$f'|_C: C \cong C$ は自己同型。それと $f'^{-1}(C) = C$ を合わせると、$\deg(f') = \deg(f'|_C) = 1$ だから、$f': X' \cong X'$ は同型写像となり、f' の非自明性に矛盾する。故に C は、非特異楕円曲線である。 q.e.d.

注 2 (1) 命題 *1* より、因子収縮写像でつぶれる例外因子は、*endomorphism* によって保存され、その帰結として、'非自明なエタール *end* を許す代数曲線は、楕円曲線に限る' という性質が、ブローアップの中心にまで遺伝するのである。

(2) 定理 *4* は、*endomorphism* (即ち、ソース Y とターゲット X が同型) という仮定を少し弱めた状況においても、成立する:

$f: Y \to X$ は、小平次元が非負の、非特異 3 次元射影代数多様体 X, Y の間の同型でないエタール被覆、且、X と Y の間には、余次元 1 で同型

である別の双有理写像 $u: X \cdots \to Y$（例えば、フロップ）が存在するとせよ。もし、K_X が nef でなければ、定理 4 と全く同様の主張が従う。

さて、主定理の証明の大雑把な方針を述べる。

Step1. minimal reduction の構成

小平次元が非負な非特異 3 次元射影代数多様体 X の上に、非自明な endomorphism $f: X \to X$ が与えられているとしよう。X は必ずしも極小ではない。そこで、$f: X \to X$ に endomorphism をも、込みにして MMP（極小モデルプログラム）を適用する。X の標準束 K_X が nef でないと仮定しよう。f を適当な合成写像 $f^k (k > 0)$ で置き換える事によって、f_* は、X 上の extremal ray$R$ 全体の恒等置換を引き起こすとしてよい。定理 3 より、各 R は (E1) 型であり、R の収縮写像 $\pi := \mathrm{Cont}_R: X \to X_1$ は、非特異 3 次元射影代数多様体 X_1 の上の nontrivial endomorphism $f_1: X_1 \to X_1$ を誘導し、$f_1 \circ \pi = \pi \circ f, \rho(X_1) = \rho(X) - 1$ を満たす。もし、K_{X_1} が nef でなければ、全く同様の論法より、再び f_1 を、（従って、元来の f をも）適当な合成写像で置き換えると、$(f_1)_*$ は X_1 上の extremal ray R_1 全体に、恒等置換を引き起こすとしてよい。以下、同様の作業を続行する。(E1) 型端射線の収縮写像によって、多様体のピカール数は 1 だけ減少するので、この作業は有限回で停止し、ついには、X の非特異極小モデル X_n の上の、非自明な endomorphism $f_n: X_n \to X_n$ を得る。これを、$f: X \to X$ の *minimal reduction* と呼ぶ。

要約すると、各 $(0 \le i \le n)$ に対して、

（1）$f_i: X_i \to X_i$（但し $f_0 := f, X_0 := X$ とおく）は、小平次元が非負の非特異 3 次元射影代数多様体 X_i の上の非自明な endomorphism。

（2）$\pi_{i-1}: X_{i-1} \to X_i$ は X_i 上の非特異楕円曲線 C_i を中心とするブローアップ（の逆）であり、$\pi_i \circ f_i = f_{i+1} \circ \pi_i$ が成立する。

（3）$f_i^{-1}(C_i) = C_i$ が set-theoretic な意味で成り立つ。

（4）X_n は X の非特異な極小モデルである。

注 3 この段階では、X の極小モデルの一意性までは云えないが、川又-*Kollár* の結果より、全ての極小モデルはフロップでつながっているので、非特異である事は従う。$\kappa(X) = 0, 2$ の場合、極小モデルの一意性は、*Step2* の *minimal reduction* の分類の副産物として云える。

Step2. minimal reduction の分類

宮岡-川又による3次元アバンダンス定理より、K_{X_n} はsemi-ample。よって、X_n の飯高ファイブレーション $\Phi: X_n \to W$ の構造を $\kappa(X_n) = 0, 1, 2$ に応じて個別に解析していく。

（い）$\kappa(X_n) = 2$ の場合には、中山 [5] による3次元楕円ファイバー空間の standard fibration theorem を、

（ろ）$\kappa(X_n) = 0$ の場合には、Bogomolov 分解定理を

（は）$\kappa(X_n) = 1$ で、Φ の一般ファイバーが超楕円曲面の場合には、藤木 [1] による'generic quotient theorem' を

本質的に用いる。

Step3. 楕円曲線を中心とするブローアップのプロセス

Step1の逆の操作、即ち、Step2で得た minimal reduction $f_n: X_n \to X_n$ からスタートして、順次、非特異楕円曲線 C_i に沿ってブローアップを施し、元来の非自明な endomorphism $f: X \to X$ を回復させる作業を実行する。ここで、各ブローアップの中心となるべき楕円曲線 C_i は、$f_i^{-1}(C_i) = C_i$ (Step1 (3) 参照）なる、非常に強い制限条件を満足せねばならない。これを、手掛かりに C_i の配置を探索して、ブローアップを繰り返していく。例えば、$\kappa(X) = 2$ の場合では、Step2 の分類より、極小モデル X_n の飯高ファイブレーションは、Seifert elliptic fibration の構造を与えるが、この各ファイバーに沿って、順次ブローアップしていく。$\kappa = 1$ の場合が最も面倒である。かくして、この作業が完了した段階で、非自明な endomorphism $f: X \to X$ の構造が判明し、主定理が副産物として得られる。

3 minimal reduction の分類

この節では、Step2 の minimal reduction の分類について述べる。

先ず、状況を設定する。end のカテゴリー内で極小モデル理論を使用するのは窮屈なので、以下では、end より少しだけ枠組みを広げておく。こうしても、証明は全く同様に機能する。

条件 (MR) （い）$f: Y \to X$ は、非特異、極小かつ小平次元が非負な3次元射影代数多様体 X, Y の間の同型写像でないエタール被覆。

（ろ）X と Y は、双有理型同値、即ち、有限回のフロップによってつながっている。

ここで、以下、必要な概念を定義しておく。

定義 5 V を非特異 n 次元射影代数多様体とする。正規多様体 S 上の楕円ファイバー空間 $f: V \to S$ は以下の条件を満たすとき、ザイフェルトであるという。

（1）f は、*equidimensional*。

（2）K_V は数値的に f-自明。

（3）V は S の特異点と f の *discriminant locus* D を除いた所では、主ファイバー束。更に、$\mathrm{codim}(D) = 1$ ならば、V は D に沿って、*general* には ${}_mI_0$-型重複ファイバーを持つ。即ち、D の *general* な点 x と横断的に交わる局所解析的な S 上の曲線 C をとると、$f^{-1}(C) \to C$ は C 上の非特異極小楕円曲面であり、$f^{-1}(x)$ は、台を非特異楕円曲線とする ${}_mI_0$-型の重複ファイバー 。

注 4 実は、以下の中山の定理より、f の全てのファイバーは非特異楕円曲線である事が従う。

次の中山の定理は基本的である。

定理 (N) [6] $f: V \to S$ は n 次元非特異射影代数多様体 V から、正規多様体 S への楕円ファイバー空間とし、以下を仮定する。

（1）$\mathrm{codim} f(\Delta) \geq 2$ となる V 上の如何なる素因子 Δ は uniruled でない。

（2）$\mathrm{codim} f(\Delta) = 1$ なる V 上の如何なる素因子 D も f のファイバーに含まれる有理曲線の族で覆われない。

（3）K_V は数値的に f-自明。

すると、適当な generically finite な全射 $T \to S$ がとれて、以下を満たす。

（1）T は非特異射影代数多様体。

（2）ファイバー積 $V \times_S T$ の主成分 W に対して、誘導される正則写像 $W \to V$ は有限次エタール被覆。

（3）W は、T 上、T と楕円曲線 E との直積 $T \times E$ と同型。

定理 6 条件 *(MR)* の下で、更に $\kappa(Y) = \kappa(X) = 2$ を仮定する。すると、

（1）ソース Y とターゲット X との間に同型写像が存在して、これと f とを合成する事で、f は X 上の *endomorphism* と見なす事が出来る。

（2）X は高々、商特異点のみを許す正規代数曲面 T の上の、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi: X \to T$ の構造を持つ。T 上の自己同型 $\lambda: T \cong T$ が引き起こされて、$\phi \circ f = \lambda \circ \phi$ を満たす。

（3）X の適当な有限次エタール被覆 $\tilde{X}$ がとれて、同型 $\tilde{X} \cong \tilde{T} \times E$ が存在する（但し、$\tilde{T}$ は一般型の非特異極小代数曲面、E は非特異楕円曲線)。

次の簡単な補題は、endomorphism のモデルを取り替える際、有効である。

補題 7 $u: X \cdots \to X'$ を n 次元非特異射影代数多様体 X, X' の間の双有理写像で、余次元 1 で同型、更に $f: Y \to X$ を、同型写像ではない有限次エタール被覆 とせよ。すると、余次元 1 で同型な双有理写像 $v: Y \cdots \to Y'$ と、同型写像でない有限次エタール被覆 $g: Y' \to X'$ がとれて、$u \circ f = g \circ v$ を満たす。

定理 6 の証明 3 次元アバンダンス定理より、十分大なる自然数 m に対して $|mK_X|$ は、base point free で、飯高ファイブレーション $\phi: X \to S$ を与える。(S は高々、商特異点のみを持つ正規代数曲面.)

$mK_X \sim \phi^* L$ （L は S 上の非常に豊富な直線束）とかけ、特に K_X は numerically f-trivial。楕円ファイバー空間 $\phi: X \to S$ は必ずしも、equidimensional でない事に注意する。そこで、中山 [5] による 3 次元楕円ファイバー空間の standard fibration theorem を適用して、モデルを取り替える。全空間 X に有限回のフロップを施し、底空間を双有理正則写像 $\mu: T \to S$ で底変換すると、T 上に、equidimensional な楕円ファイバー空間 $\psi: X_1 \to T$ が構成できる。フロップは特異点のレベルを変えないので、X_1 も非特異。$mK_{X_1} \sim (\mu \circ \psi)^* L$ 故、K_{X_1} も又、numerically ψ-trivial。

claim $\psi: X_1 \to T$ はザイフェルト楕円ファイバー空間。

proof. ここで、補題 7 を適用すると、X_1 上に、同型写像でない有限次エタール被覆 $g_2: X_2 \to X_1$ で、元の $f: Y \to X$ と双有理なものが取れる。X_2 も X とフロップでつながっているので、同様の論法を繰り返すと、同型写像でない有限次エタール被覆の無限上昇列（tower)

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{g_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_3 \xrightarrow{g_3} X_2 \xrightarrow{g_2} X_1 \sim_{bir} X$$

を得る。但し、各 X_n は非特異で、X とフロップ $v_n: X \cdots \to X_n$ で結ばれている。$K_{X_n} \sim (g_2 \circ \cdots \circ g_n)^* K_{X_1}, K_{X_n} \cong K_X$ が任意の自然数 n に対して成立し、$mK_{X_1} \sim \psi^* \mu^* L$ を満たす。故に、$(g_2 \circ \cdots \circ g_n)^*$ は $\Gamma(X_n, mK_{X_n})(\cong \Gamma(X_1, mK_{X_1}))$ の線型同型写像を引き起こす。よって $\mu \circ \psi \circ \cdots \circ g_n: X_n \to S$ も X_n の飯高ファイブレーションであり、$\psi_n := \psi \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n: X_n \to T$

も T 上の equidimensional な楕円ファイバー空間である。更に、フロップ $h: X_n \cdots \to X_1$ に対して、同型 $u: S \cong S$ と、双有理同型 $\nu: T \cdots \to T$ が存在して、$\psi \circ h = \nu \circ \psi_n, u \circ \mu = \mu \circ \nu$ を満たす。実は ν は同型である。何故なら、T 上の任意の曲線 C 上の楕円曲面は、フロップ h によって X_1 内の曲面に移されるが、ψ は equi-dimensional だから、$\nu_* C$, $(\nu^{-1})_* C$ は S の曲線にならざるを得ないからである。そこで、$\psi: X_1 \to T$ がザイフェルトでないと仮定しよう。ψ の特異ファイバーとしては、T 上の prime divisor Δ に沿って、有理曲線の1パラメーター族が登場する。そこで、n を無限大に飛ばすと、注 1 と同様の論法により $\psi_n: X_n \to T$ の特異ファイバー内には、T 上の prime divisor Δ に沿って、無限個の有理曲線が現われることになる。一方、$\nu: T \cong T$, $h: X_n \cdots \to X_1$ は余次元1で同型、且 ψ は equidimensional だから、同様の結論が元の $\psi: X_1 \to T$ についても云える。これは、矛盾。ここで、中山の定理 (N) を適用すれば、クレームが云える。

さて、元の X は X_1 とフロップでつながっている。ここで、フロップは rigid な有理曲線に沿って為されることを思い出す。X_1 の適当なエタール被覆は、一般型極小代数曲面と楕円曲線との直積に分解するので、X_1 の有理曲線は動く。よって、フロップの施し様がなく、$h: X_n \cong X_1$ は同型写像にならざるをえない。後の証明は容易である。（証明終）

次に $\kappa = 0$ の場合を扱う。

命題 8 T は複素トーラス、コンパクト複素多様体 X は、$b_1(X) = 0$ なる藤木のクラス $\mathcal{C}$ 多様体とする。$X \times T$ 上の、任意の自己準同型写像 f は、$f = g \times h$（g, h は各々、X, T 上の自己準同型写像）の形に分解する。

定理 9 条件（*MR)* の下で更に $\kappa(X) = \kappa(Y) = 0$ を仮定する。すると、

（1） ソース Y とターゲット X との間に同型写像が存在して、$f: X \to X$ は X 上の非自明な自己準同型写像と見なせる。

（2） X の適当な有限次エタール被覆 $\tilde{X}$ は、*abelian 3-fold* 又は、非特異な *K3* 曲面 $\tilde{T}$ と楕円曲線 E との直積 $\tilde{T} \times E$ に同型である。

（3）後者の場合、X は $\tilde{T}$ の有限群 G による商空間 $W := \tilde{T}/G$ 上のザイフェルト楕円ファイバー空間であり、f はそれと両立して、底曲面 W の自己同型を引き起こす。同時に、X は E の有限群 G' による商曲線 $C := E/G'$ 上のザイフェルト *K3*、又はエンリケス・ファイバー空間でもあり、f はそれと両立して、底曲線 C の自己準同型写像を引き起こす。

証明 3次元アバンダンス定理より、$K_X \in \mathrm{Pic}(X)$ は有限位数、特に $c_1(X)_{\mathbf{R}} = 0$。最初に、X の基本群 $\pi_1(X)$ は無限群である事を示そう。X と Y は、余次元1で同型だから、その基本群は同型。もし、有限群だと仮定すると、単射群準同型写像 $f_*: \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ は同型。故に、$\deg(f) = [\pi_1(X) : \pi_1(Y)] = 1$ となり、f は同型写像となる。これは、仮定に反する。

故に、ボゴモロフ分解定理より、適当な X のエタール被覆 $\tilde{X}$ は、abelian 3-fold 又は、K3曲面 $\tilde{T}$ と楕円曲線 E との直積 $\tilde{T} \times E$ に同型。前者の場合は $\tilde{X}$ は有理曲線を含まない。後者の場合は、いかなる有理曲線も、第2成分への射影 $p_2: \tilde{X} \to E$ のファイバーに含まれるが、これはrigidでない。何故なら、E は $\tilde{T}$ 上の平行移動として $\tilde{X}$ に作用するからである。よって X 上のいかなる有理曲線も又、rigidでない。故に、定理6の証明と同様の理由で、同型 $X \cong Y$ が従う。$q: \tilde{X} := \tilde{T} \times E \to X$ はminimal split covering 即ち、q は有限次Galoisエタール被覆であり、Galois群 $\tilde{G} := \mathrm{Gal}(\tilde{X}/X)$ が、$(\mathrm{id}_{\tilde{T}}, \tau)$ の形の元を含まない（但し、$0 \neq \tau \in E$ は楕円曲線 E の平行移動の意味）とする。q の最小性より、合成写像 $f \circ q: \tilde{X} \to X$ は $q: \tilde{X} \to X$ を経由する。故に自己準同型写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{X}$ が存在して、$q \circ \tilde{f} = f \circ q$ を満たす。K3曲面の単連結性と命題8より、適当な自己準同型写像 $u: E \to E$ と自己同型 $v: \tilde{T} \cong \tilde{T}$ が存在して、$\tilde{f} = v \times u$ を満たす。同様に任意の自己同型 $\tilde{g}: \tilde{X} \cong \tilde{X}$ は、$g = g_1 \times g_2$, $g_1 \in \mathrm{Aut}(\tilde{T})$, $g_2 \in \mathrm{Aut}(E)$ と分解する。群準同型写像 $\tau: \mathrm{Aut}(\tilde{X}) \to \mathrm{Aut}(\tilde{T})$, $\rho: \mathrm{Aut}(\tilde{X}) \to \mathrm{Aut}(E)$ を、各々、$\tau(g) = g_1$, $\rho(g) = g_2$ と定義して $G := \tau(\tilde{G}), G' := \rho(\tilde{G})$ とおく。第一成分への射影 $p_1: \tilde{X} \to \tilde{T}$ により、X 上にザイフェルト楕円ファイバー空間 $\psi: X = \tilde{T} \times E/\tilde{G} \to W := \tilde{T}/G$ の構造が入る。$f \in \mathrm{End}(X)$ は $\tilde{f} = v \times u \in \mathrm{End}(\tilde{X}), (v \in \mathrm{Aut}(\tilde{T}), u \in \mathrm{End}(E))$ によって誘導されるので、$\tilde{f}$ は $\tilde{G}$ の作用と両立する。従って、v も G の作用と両立して、底空間 W の自己同型 $v': W \cong W$ を誘導する。同様にして、第二成分への射影 $p_2: \tilde{X} \to E$ により、X 上にザイフェルトK3、又はEnriquesファイバー空間 $X := \tilde{T} \times E/\tilde{G} \to C := E/G'$ の構造が入り、$f \in \mathrm{End}(X)$ は、底曲線 C の自己準同型写像 $u': C \to C$ を誘導する。（証明終）

命題 10 $f: Y \to X$ は、双有理同値な非特異 n 次元射影代数多様体 X, Y の間の、同型でない有限次エタール被覆とする。$\kappa(X) \geq 0$ と仮定して、飯高ファイブレーション $\phi: X \cdots \to Z$ の一般ファイバーの非特異モデルを F とおく。すると、$\chi(\mathcal{O}_F) = 0$ を得る。

系 10.1 条件（*MR)*の下で更に $\kappa(Y)=\kappa(X)=1$ を仮定する。すると、X の飯高ファイブレーション $\phi\colon X\to C$ の一般ファイバーは、アーベル曲面又は超楕円曲面のいずれかと同型である。

ここで、超楕円曲面に関する基本的事実を思い出しておく。

Basic Facts S を超楕円曲面とする。

（1）S は丁度2通りの、同型でない楕円曲面の構造を持つ。

タイプ *(A)*: アルバネーゼ写像 $p_S\colon S\to \mathrm{Alb}(S)$ により、S は楕円曲線 $\mathrm{Alb}(S)$ 上の、ファイバーを楕円曲線とする正則ファイバー束になる。

タイプ（*B*)：楕円曲線 $E:=\mathrm{Aut}^0(S)$ の S への作用は自由でなく、自然な射影 $q_S\colon S\to C_S:=S/E\cong \mathbf{P}^1$ により、ザイフェルト楕円曲面の構造を持つ。

（2）$\overline{NE}(S)$ は、p_S, q_S の一般ファイバーによって張られ、$f\in \mathrm{End}(S)$ は、各々、底曲線 $\mathrm{Alb}(S), C_S$ の自己準同型写像を誘導する。

次の補題は、定理6の証明と同様、同型でない有限次不分岐被覆の無限個のタワーを X 上に構成する議論から従う。

補題 11 条件（MR）の下で、更に $\kappa(X)=1$ と仮定し、$\phi\colon X\to C$ を X の飯高ファイブレーションとする。このとき、ϕ の特異ファイバーの各既約成分の非特異モデルは有理曲面でない。

定理 12 条件（MR）の下で、更に $\kappa(X)=1$ 且、飯高ファイブレーション $\phi\colon X\to C$ の一般ファイバーは超楕円曲面とする。すると

（1）ソース Y とターゲット X の間に別の同型写像が存在し、f は X 上の非自明な自己準同型写像と見なせる。

（2）ファイバー空間の分解 $X\xrightarrow{\pi}T\xrightarrow{q}C$

がとれる：但し、$\pi\colon X\to T$ は、高々、商特異点のみを許す正規曲面 T 上のザイフェルト楕円ファイバー空間、$q\colon T\to C$ は $\mathbf{P}^1$ - ファイバー空間、且、$\phi=q\circ\pi$ を満たす。

（3）$f\in \mathrm{End}(X)$ は、T の自己準同型写像、及び C の自己同型写像を誘導し、上の分解と両立する。

（4）X の適当な有限次不分岐被覆 $\tilde{X}$ は直積 $\tilde{T}\times E$（但し $\tilde{T}$ は $\kappa(\tilde{T})=1$ なる非特異極小代数曲面、E は楕円曲線）と同型。

略証 藤木 [1] の'generic quotient theorem' を用いて、超楕円曲面のタイプ（B）型の elliptic fibration を相対化する事が肝要である。即ち、次のファイバー空間の分解が存在する：$X\cdots\xrightarrow{\pi'}S\xrightarrow{p}C$。

ここで、pの一般ファイバーは$\mathbf{P}^1$、且π'の一般ファイバーは楕円曲線、且$\phi = p \circ \pi'$。ブローアップ$\mu: \hat{X} \to X$によりπ'の不確定点を解消して、S上の楕円ファイバー空間$g := \pi' \circ \mu: \hat{X} \to S$を得る。これに、相対的極小モデルプログラムを走らせて、楕円ファイバー空間$h: X' \to S$で以下を満たすものがとれる。

（1）それは、$g: \hat{X} \to S$と双有理同値。

（2）X'は高々、$\mathbf{Q}$-分解的ターミナル特異点しか持たない。

（3）$K_{X'}$はh-ネフ。

更に中山 [5] による equidimensional モデル定理より、X'に有限回のフロップを施し、底空間を双有理射$u: W \to S$で底変換すると、以下を満たす楕円ファイバー空間$h': X'' \to W$を得る。

（1）h'は equidimensional。

（2）X''は高々、$\mathbf{Q}$-分解的ターミナル特異点しか持たない。

（3）W上に有効$\mathbf{Q}$-因子Λがとれて、(W, Λ)は対数的ターミナル対、且$K_{X''} \sim_Q f'^*(K_W + \Lambda)$となる。

ここで、'$K_{X''}$がネフ$\leftrightarrow K_W + \Lambda$が$W$上ネフ'

に注意する。曲面W上の対数的MMPと、3次元MMP、及び中山の standard fibration 定理を組み合わせると、双有理射$u': W \to T$及び、楕円ファイバー空間$\pi: Z \to T$がとれて、

（1）$u' \circ h'$はπと双有理同値。

（2）πは equidimensional。

（3）Zは高々、$\mathbf{Q}$-分解的ターミナル特異点のみを持つ。

（4）T上の有効$\mathbf{Q}$-因子Γが取れて、(T, Γ)は対数的ターミナル対且、$K_Z \sim \pi^*(K_T + \Gamma)$。

（5）K_Zはネフ、即ち、ZはXの絶対的極小モデル。

川又-Kollár より、Zは元のXと有限回のフロップで結ばれているから、非特異。補題7より、Z上の非同型な有限次エタール被覆の無限個のタワー

$$X \sim_{bir} Z \xleftarrow{g_1} Z_1 \xleftarrow{g_2} Z_2 \leftarrow \cdots \xleftarrow{g_n} Z_n \leftarrow \cdots$$

（但しZ_nは全てXの非特異極小モデル）を得る。Zの飯高ファイブレーション　$\phi': Z \to C$の一般ファイバーは超楕円曲面であり、適当な$\mathbf{P}^1$-ファイバー空間$q: T \to C$がとれて、$\phi' = q \circ \pi$と分解する。すると、$\pi: Z \to T$はザイフェルト楕円ファイバー空間である。そうでなければ、T上の素因子Δがとれて、一般の点$p \in \Delta$上のファイバーの既約成分は全て、有理曲線となる。一方、ϕ'の一般ファイバーは超楕円曲面だから、

有理曲線を持たない。故に、Δ は、$\mathbf{P}^1$-ファイバー空間 $q: T \to C$ のファイバーに含まれる。よって、Δ も有理曲線で、$\pi^{-1}(\Delta)$ の非特異モデルは有理曲面となる。これは、補題 11 に反する。従って、定理 (N) を適用して、証明が完了する。　q.e.d.

4　主定理の略証明

証明の最終段階 Step 3 では、minimal reduction $f_n: X_n \to X_n$ からスタートして、逐次、楕円曲線を中心とするブローアップにより、元の非自明自己準同型写像 $f: X \to X$ を復元する。2 節、Step1 の記号を用いる。まず、簡単な補題を用意する。

補題 13　$f: X \to T$ は非特異 $n(\geq 3)$ 次元射影代数多様体 X から正規多様体 T へのザイフェルト楕円ファイバー空間とする。f の任意のファイバーに沿って X をブローアップしても、得られた多様体 X' は再び、ザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。

(a)　$\kappa(\mathbf{X}) = \mathbf{2}$ **の場合**

$f_n \in \mathrm{End}(X_n)$ は、底曲面の自己同型 $\rho_n: X_n \cong X_n$ を誘導し、$f_n^{-1}(C_n) = C_n$ より、$f_n|_{C_n}: C_n \to C_n$ は非自明な自己準同型であることに注意する。ブローアップ $\pi_{n-1}: X_{n-1} \to X_n$ の中心となる楕円曲線 C_n は、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi_n: X_n \to T_n$ のファイバーでなければならない。何故なら、もし $\phi_n(C_n)$ が T_n の曲線ならば、$\phi_n|_{C_n}: C_n \to \phi_n(C_n)$ の mapping degree の考察より、同型 $f_n|_{C_n}: C_n \cong C_n$ が云えて、矛盾が生じる。補題 13 を適用すると、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi_{n-1}: X_{n-1} \to T_{n-1}$ を得る。同様の考察により、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi_i: X_i \to T_i$ のファイバー C_i を中心とするブローアップを続行する。最終的に、元の X がザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つことが示せる。

(b)　$\kappa(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ **の場合**

先ず、特別の場合を考察する。

命題 14　V は 3 次元アーベル多様体と双有理同値であるが、同型でない非特異 3 次元射影代数多様体で、非自明な自己準同型写像 $f: V \to V$ を持つと仮定する。すると、

（1）V はアーベル曲面と双有理同値な代数曲面 S 上の楕円束 $p: V \to S$（即ち、構造群及び典型ファイバー共に楕円曲線の主ファイバー束）の構造を持つ。

（2）f は p と両立して、底空間の自己同型 $g: S \cong S$ を引き起こす。

（3）V の適当な有限次不分岐エタール被覆 $\tilde{V}$ は、直積 $S' \times E$（但し、S' はアーベル曲面と双有理同値な非特異代数曲面、E は楕円曲線。）と同型。

略証　f の適当な合成積をとって、$f: V \to V$ の minimal reduction $f_n: V_n \to V_n$ を構成する。仮定より V_n は、非単純な3次元アーベル多様体である。$f_n^{-1}(C_n) = C_n$ より、$f_n|_{C_n}: C_n \to C_n$ は平行移動でなく、C_n において、不動点 o を持つ。V_n, C_n には共に、o を単位元とする代数群の構造が入り、C_n は V_n の部分アーベル多様体となる。商写像 $p_n : V_n \to T_n := V_n/C_n$ はアーベル曲面 T_n 上の楕円束の構造を与え、f_n は底曲面の自己同型 $g_n : T_n \cong T_n$ を誘導する。$\kappa = 2$ の場合と全く同様の理由で、楕円束のファイバーを中心とするブローアップを続行して、最終的には、元の X 自身が楕円束の構造を持つ事が示せる。

命題 15　V はK3曲面と楕円曲線の直積に双有理同値な非特異3次元射影代数多様体であり、非自明な自己準同型写像 $f: V \to V$ を持つと仮定する。すると、

（1）$V \cong S \times E$、但し S はK3曲面と双有理同値な非特異代数曲面、E は楕円曲線。

（2）自己同型写像 $g: S \cong S$ が存在して、$p \circ f = g \circ p$、但し $p: V \to S$ は第一成分への射影。

略証　$f: V \to V$ の minimal reduction $f_n: V_n \to V_n$ については、定理9より、命題は正しい。（2）が云えているので $\kappa = 2$ の場合と同様の理由により、ザイフェルト楕円ファイバー空間の各ファイバーを中心とするブローアップを繰り返して、X を復元できる。 q.e.d.

$f: X \to X$ を $\kappa(X) = 0$ なる非特異3次元射影代数多様体 X 上の非自明な自己準同型写像とする。必要ならば f を適当な合成積 $f^k (k > 0)$ で置き換えて、minimal reduction $g: X' \to X'$ をとる。楕円曲線を中心とする一連のブローアップ（の逆）を $\pi: X \to X'$ とおくと、$g \circ \pi = \pi \circ f$。定理9より、$X'$ の適当な有限次ガロワ・エタール被覆 $p: \tilde{X}' \to X'$ は、abelian 3-fold 又はK3曲面と楕円曲線との直積と同型。しかも、g は、自己準同型 $\tilde{g}: \tilde{X}' \to \tilde{X}'$ にリフトできる。すると、$V := X \times_{X'} \tilde{X}'$ は非特異で $\tilde{X}'$ と双有理同値、かつ自然な射影 $V \to X$ は、X の有限次ガロワ・エタール被覆。自己準同型写像　$f \times \tilde{g}: X \times \tilde{X}' \to X \times \tilde{X}'$ は、非自明な自己準

同型写像$h: V \to V$を誘導する。再び、必要ならf, hを適当な合成積で置き換えてよい。以下の２通りの可能性が生じる。

（い）：$\tilde{X}'$がabelian 3-fold の場合：

$V \to \tilde{X}'$が同型ならば、Xはabelian 3-fold Vの有限群による商であり、極小。次に$V \to \tilde{X}'$が同型でないとせよ。命題14により、Vはアーベル曲面と双有理同値な代数曲面$\tilde{T}$上の、楕円束 $q: V \to \tilde{T}$になる。ガロワ群$G := \mathrm{Gal}(V/X)$は、この楕円束の構造を保ち、$\tilde{T}$の有限自己同型群G'を引き起こす。故に自然な射影$\rho: X \cong V/G \to \tilde{T}/G' =: T$はザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。自己準同型写像$h: V \to V$はガロワ群Ｇの作用と両立し、楕円束構造$q: V \to \tilde{T}$を保ち、且、同型$g': \tilde{T} \cong \tilde{T}$を誘導する。従って、$g'$も$G' \cong \mathrm{Gal}(\tilde{T}/T)$の作用と両立して、$T$の自己同型$\lambda: T \cong T$を引き起こす。

（ろ）：$\tilde{X}'$がＫ３曲面と楕円曲線との直積に同型な場合：

命題15より、同型$V \cong \tilde{T} \times E$,（但し$V$はＫ３曲面と双有理同値な非特異代数曲面、$E$は楕円曲線）が存在する。しかも、自己準同型の分解$h = h_1 \times h_2$ (但し$h_1 \in \mathrm{Aut}(\tilde{T}), h_2 \in \mathrm{End}(E)$) が成り立つ。命題８より、ガロワ群$\tilde{G} := \mathrm{Gal}(V/X)$は第一成分への射影$p_1: V \to \tilde{T}$を保ち、底空間$\tilde{T}$の自己同型群$G$を引き起こす。自然な写像$\rho_1: X := V/\tilde{G} \to \tilde{T}/G =: T$により、$X$は$T$上のザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。これは、（い）の場合と同じ理由で $f: X \to X$によって保存され、底曲面Tの自己同型$\alpha: T \cong T$が引き起こされる。 q.e.d.

(C) $\kappa(\mathbf{X}) = 1$ の場合

X_{min}の飯高ファイブレーションの一般ファイバーが超楕円曲面の場合の証明は、煩雑なので方針を述べるに留める。minimal reduction $f_n : X_n \to X_n$をとる。X_nは２通りの楕円ファイバー空間の構造を持つ。

（１）第一に、藤木quotient $g_n : X_n \to T_n$によって、$\mathbf{P}^1$-ファイバー空間T_n上のザイフェルト楕円ファイバー空間構造を,

（２）第二に、相対アルバネーゼ写像により、楕円曲面A_n上の、equidimensionalな（必ずしもザイフェルトとは限らぬ）楕円ファイバー空間$\alpha_n : X_n \to A_n$の構造を持つ。

大方の場合は、g_nのファイバーを中心とするブローアップを繰り返す事で、元のXが回復する。α_nのファイバーに沿って、ブローアップするのが好ましく無い事は、以下の例からも想像がつく。

例 16 $f: S \to C$は正則切断oを持つ相対的極小楕円曲面で、$\kappa(X) = 1$且$\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$（即ち、ザイフェルト楕円曲面でない）とする。$S$は$C$の関数

体 K 上、定義された o を単位元に持つ楕円曲線 $\mathcal{E}$ と見なせる。$i: S \cdots \to S$ を $\mathcal{E}/K$ の相対的に逆元をとる群演算から生じる双有理写像とする。それは、S の極小性より S の自己同型となる。E を楕円曲線、$t: E \cong E$ を E の 2 等分点による平行移動とする。$j := i \times t \in \mathrm{Aut}(S \times E)$ は自由な *involusion* であり、商 $X := S \times E/\langle j \rangle$ は $\kappa(X) = 1$ なる非特異多様体である。$[n]: E \to E$ を n 倍写像（但し、$n > 1$ は奇数）とする。$S \times E$ 上の自己準同型写像 $\psi := \mathrm{id}_S \times [n]$ は、非自明な自己準同型写像 $\varphi: X \to X$ を引き起こす。$\langle j \rangle$-不変な射影 $S \times E \to C$ は、X の飯高ファイブレーション $\phi: X \to C$ を与え、ϕ の一般ファイバーは超楕円曲面である。射影 $S \times E \to S \to C$ は、ファイバー空間の分解 $X \xrightarrow{g} T := S/\langle i \rangle \xrightarrow{p} C$ を誘導する。但し、$g: X \to T$ はザイフェルト楕円ファイバー空間、$p: T \to C$ は $\mathbf{P}^1$-ファイバー空間、且 $\phi = p \circ g$。他方、射影 $S \times E \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_E} C \times E \to C$ は、分解 $X \xrightarrow{h} C \times E' \xrightarrow{q} C$ を誘導する。但し、$E' := E/\langle t \rangle$ は楕円曲線、$h: X \to C \times E'$ は、$\phi: X \to C$ の相対的アルバネーゼ写像であり、非ザイフェルトな楕円ファイバー空間、かつ $\phi = q \circ h$。

X を g の正則ファイバー $g^{-1}(t), t \in T$ に沿ってブローアップして得られる多様体を X' とする。明らかに、$\phi: X \to X$ は、X' 上の非自明自己準同型写像 $\phi': X' \to X'$ に持ちあがる。他方、$\pi: Y \to X$ を h の正則ファイバー F に沿ってのブローアップとすると、Y は非自明な自己準同型写像を持たない。

証明は背理法による。非自明な自己準同型写像 $u: Y \to Y$ が存在したとせよ。命題 *1* と定理 *4* より、適当な合成積 $v := u^k (k > 0): Y \to Y$ は、非自明な自己準同型写像 $w: X \to X$ を引き起こし、$\pi \circ v = w \circ \pi$ 且 $w^{-1}(F) = F$ が成り立つ。よって、*rigidity Lemma* より、$C \times E'$ の自己準同型写像 w' がとれて、$h \circ w = w' \circ h$ となる。$w: X \to X$ は、C の自己同型を引き起こすから、w' はエタール射。更に、$w^{-1}(F) = F$ より、w' は自己同型。よって、$\kappa(X) = 2$ の場合の主定理の証明と同様の論法より、$h: X \to C \times E'$ はザイフェルト楕円ファイバー空間となる。特に、h のファイバーは、全て楕円曲線であり、仮定 $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$ に反する。

5 その他

（1）本稿では、非自明な自己準同型 $f: X \to X$ に対して、多様体 X の構造の解明に重点を置き、射 f は適当な合成積で自由に置きかえる立場を採った。他方、射 f をも重視する立場としては、（注 2）を用いて minimal reduction を多少、変更すると、以下を示す事もできる。

定理 17 $\{f_n: X_n \to X_{n+1}\}_{n=1,2,\cdots}$ を、小平次元が 2 の非特異 3 次元射影代数多様体 X_n の間の、同型でない有限次エタール被覆の無限降下列とせよ。すると、各 X_n もザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。

（2）非自明な自己準同型写像を持つ $\kappa(S) = -\infty$ なる代数曲面 S は中山 [7] によって分類された。特に、S が有理曲面の場合、S が非自明な自己準同型写像を持つ為の必要十分条件は、S がトーリック曲面となる事である。この状況下で、S 上の自己交点数が負の既約曲線 C 全体は、有限集合であって、非自明な自己準同型写像によって保存される。end で保存される新型データは、他にもないだろうか？　例えば、ファノ多様体の一般の点を通る有理曲線の length によって、非自明な自己準同型写像のデーターが引き出せないか？

（3）小平次元の正負に関わらず、非自明な自己準同型写像をもつコンパクト複素多様体には、アーベル多様体、乗法群 ‥ 等の群が何らかの形で作用しているのではないか？と思われる。次の問題を提起しておく。

問題 (cf. [2]) $\kappa(X) \geq 0$ なる非特異射影代数多様体 X が、非自明な自己準同型写像 $f: X \to X$ を有するとせよ。すると

(i) 十分一般の点 $p \in X$ に対して、$S(p)$ は $\{f^n(p) | n = 1, 2, \cdots\}$ の Zariski 閉包を表す。もし、$s(p) \neq X$ ならば、$S(p)$ の適当な有限次エタール被覆 $S'(p)$ は、アーベル多様体になるか？

(ii) 更に、K_X がネフでないと仮定しよう。すると、X の任意の端射有理曲線は、$S(p)$ と横断的に交わるか？

参考文献

[1] A. Fujiki, On a holomorphic fiber bundle with meromorphic structure, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **19** (1983), 117–134.

[2] Y. Fujimoto, Endomorphism of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **38** (2002), 33–92.

[3] Y. Fujimoto, Decomposition Problem on Endomorphisms of Projective Varieties, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[4] S. Mori, Threefold whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math., **116** (1982), 133–176.

[5] N. Nakayama, Local structure of an elliptic fibration, Advanced Studies in Pure Math, **35** (2002), Higher Dimensional Algebraic Geometry, 185–295.

[6] N. Nakayama, Projective 3-folds whose universal coverings are $\mathbf{C}^3$, the proceeding of symposium on vector bundles and algebraic geometry, Kyusyu University, January, 1997, organized by S. Mukai and E. Sato, 6–10.

[7] N. Nakayama, Ruled surfaces with nontrivial surjective endomorphisms, Kyusyu J. Math, **56** (2002), 433–446.