数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 16-33

平坦トーラス内の極小曲面とそのモジュライについて

庄田　敏宏
Toshihiro Shoda

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
Department of Mathematics
Graduate School of Science and Engineering
Tokyo Institute of Technology

1 Introduction

Riemann 多様体内の部分多様体で, その面積関数の第 1 変分が 0 となる多様体を極小部分多様体と云い, その第 2 変分が 0 以上になる部分多様体を安定極小部分多様体と云う. 本研究の対象は n 次元平坦トーラス内の種数 g コンパクト極小曲面であり, 課題は次の 2 つである : (i) 平坦トーラス内の極小曲面全体の集合, 即ちモジュライ空間の探求, (ii) 平坦トーラス内極小曲面の具体例の構成. 筆者はこの問題を $n=4$ の場合で考察し, モジュライ空間の鍵になる空間の新しい連結成分を 2 つ発見してその次元を計算した. さらにそれを実現する種数 4 の場合の具体例を構成した. その構成法は, まず最初に 3 次元平坦トーラス内の良い性質をもつ極小曲面を構成し, それを適当な変形によって 4 次元トーラス内の極小曲面に変形すると云う手法である. 以下ではその詳細を述べる.

まず (i) について述べる. 平坦トーラス内極小曲面のモジュライ空間は C. Arezzo と G. P. Pirola [2] によって導入された. 但し, このモジュライ自身は代数的に処理し辛い空間なので, モジュライの鍵になる空間 $\mathcal{M}_g^n$ をメインに考察する事が本筋になる. $\mathcal{M}_g^n$ は Teichmüller 空間上の複素ベクトル束の解析部分多様体として定義される. $\mathcal{M}_g^n$ には特異点がある場合

もあるし連結成分が沢山ある場合もある．今の場合は $\mathcal{M}_g^4$ の研究が主題である．現在 $\mathcal{M}_g^4$ には計4つの連結成分が与えられている．正則曲線による極小曲面に対応する次元が $5g-2$ の連結成分，超楕円型極小曲面に対応する次元が $4g$ の連結成分，非超楕円型極小曲面に対応する次元が $4g$ の連結成分，そして generic Riemann 面による極小曲面に対応する次元が $4g$ の連結成分である．しかし他の連結成分は特に知られていない．今回，筆者は trigonal 極小曲面に対応する連結成分と d-gonal $(g > 2(d-1))$ 極小曲面に対応する連結成分を考察し，その次元が共に $4g$ である事を示した．ここで d-gonal とは球面の分岐 d-被覆になる Riemann 面の事であり，$d=3$ の場合を trigonal と云う．

今回の結果によって示唆される予想は $\mathcal{M}_g^4$ の連結成分は次元が $5g-2$ あるいは $4g$ の2つしかないと云うことであり，今後の大きな課題である．

ここで (ii) に入る前に随伴極小曲面について触れる．n 次元平坦トーラス内の種数 g コンパクト極小曲面には Weierstrass 表現公式と云う式表示が知られていて，極小曲面は平行移動は無視して正則微分 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を定点 p_0 から線積分した実部として表される：

$$\Re \int_{p_0}^{p} (\omega_1, \cdots, \omega_n)$$

ただし，この積分が道の取り方によらず well-defined に定義される事が重要な問題で，周期問題と云われている．この極小曲面に対して

$$\Re \int_{p_0}^{p} e^{i\theta} (\omega_1, \cdots, \omega_n)$$

が well-defined になるとき，これを随伴極小曲面と云う．$\theta = \pi/2$ の随伴極小曲面を共役極小曲面と云う．随伴極小曲面の存在は極小曲面論では主要な研究であり，$n=3$ の場合には長野-Smyth [9] による判定法が知られている．また，随伴極小曲面が可算稠密な $\theta \in S^1$ に対して存在するような3次元トーラス内の極小曲面を Property **P** を満たす極小曲面と云うが，Meeks [7] はこうした概念を導入し様々な結果を与えている．

(ii) について述べる．モジュライの研究も重要ではあるが，その元を実現する極小曲面の具体例を構成する事も重要な研究課題である．今回の場合は trigonal 極小曲面あるいは d-gonal 極小曲面の具体例の構成が主題である．代表として trigonal 極小曲面を考える．trigonal Riemann 面は $g \geq 4$ であり，ここでは一番簡単な $g=4$ の場合を考察する．これを4次元平坦トーラス内の極小曲面として直接構成する事は困難であるので，最

初に3次元平坦トーラス内のProperty **P** を満たすtrigonal極小曲面を構成してからそれを4次元平坦トーラス内の極小曲面へと変形する手法をとった．この方針を考えた理由はProperty **P** を満たす極小曲面は4次元平坦トーラス内の極小曲面へと変形できる事がMeeksによって示されている事にある．そして実際に，共役極小曲面をもち，さらにProperty **P** を満たすtrigonal極小曲面を構成する事ができた．構成における一番の難所は周期問題を解くことである．今回はテクニカルな座標変換を駆使して線積分を計算し，直接周期問題を解決した．これにより4次元平坦トーラス内trigonal極小曲面の具体例を与える事ができる．

2 平坦トーラス内極小曲面のモジュライ空間

このセクションではArezzo-Pirola [2] にて導入された n 次元平坦トーラス内種数 g 極小曲面のモジュライ空間を考察する．はじめに次の極小曲面論における基本定理を述べる．

Theorem 2.1. (Weierstrass 表現公式) $f : M_g \longrightarrow \boldsymbol{R}^n/\Lambda$ を種数 g のコンパクト *Riemann* 面 M_g の平坦トーラス $\boldsymbol{R}^n/\Lambda$ への極小はめ込みとする．このとき，平行移動は無視して f は次のように表される：

$$(1) \qquad f(p) = \Re \int_{p_0}^{p} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T \quad Mod\ \Lambda,$$

ここで $p_0 \in M$ は定点，T は転置行列の意味であり，$\{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\}$ は M 上の正則微分で次をみたすものである．

$$(2) \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \text{ は共通ゼロ点がない}$$

$$(3) \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2 = 0$$

$$(4) \quad \left\{ \Re \int_{\gamma} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T \mid \gamma \in H_1(M_g, \boldsymbol{Z}) \right\} \text{ は } \Lambda \text{ の部分格子になる}$$

逆に上の3つの条件をみたす f は平坦トーラス内の極小はめ込みを定義する．

モジュライ空間の定義の仕方としては上記の M_g をTeichmüller空間上で動かし，(2) をみたす集合，その中から (3) をみたす集合，さらに (4) も

みたす集合として定義していく．まずTeichmüller空間の定義を与えておく．M_0を種数gのコンパクトRiemann面として1つ固定しておく．またM_gを任意の種数gのコンパクトRiemann面とし，$h: M_0 \longrightarrow M_g$を向きを保つ可微分同相写像とする．このときTeichmüller空間$\mathcal{T}_g$を以下で定義する：

$$\mathcal{T}_g := \{(M_g, h)\}/\sim,$$

ここで$(M_g, h) \sim (M'_g, h') \Longleftrightarrow h' \circ h^{-1}$が適当な$M_g$から$M'_g$への双正則写像にホモトピックになる．

平坦トーラス内極小曲面のモジュライ空間を導入する．まずは(2)をみたす空間$\mathcal{H}^n_g$を定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_g := \{(M_g, h),&\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n \,|\, (M_g, h) \in \mathcal{T}_g \text{ であり} \\ &\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n \in H^0(M_g, K) \text{ は共通ゼロ点がない}\}\end{aligned}$$

$\mathcal{H}^n_g$はTeichmüller空間上の$H^0(M_g, K) \cong \mathbf{C}^g$による$n$-frame束になっているので，複素次元$3g-3+ng$の複素多様体となる．次に$\mathcal{H}^n_g$の中で(3)をみたす空間$\mathcal{M}^n_g$を定義する．

$$\mathcal{M}^n_g := \{(M_g, h), \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n \in \mathcal{H}^n_g \,|\, \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2 = 0\}.$$

$\mathcal{M}^n_g$は$\mathcal{H}^n_g$のsubvarietyになっているので，一般的には連結成分が沢山あることもあるし，特異点をもつ事もある．ここで$\mathcal{M}^n_g$上の周期写像Πを以下で定義する(この周期写像はGriffithによるHodge structureの変形理論における周期写像に起因している)：

$$\Pi((M_g, h), \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) := \Re \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1}\omega_1 & \int_{\beta_1}\omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_g}\omega_1 & \int_{\beta_g}\omega_1 \\ \int_{\alpha_1}\omega_2 & \int_{\beta_1}\omega_2 & \cdots & \int_{\alpha_g}\omega_2 & \int_{\beta_g}\omega_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{\alpha_1}\omega_n & \int_{\beta_1}\omega_n & \cdots & \int_{\alpha_g}\omega_n & \int_{\beta_g}\omega_n \end{pmatrix}$$

ここで$\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g$は$H_1(M_g, \mathbf{Z})$のsymplectic基底である．このとき(4)が成り立つための条件は以下で与えられる：

$$(5) \qquad rank_{\mathbf{Q}} \Pi((M_g, \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g), \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = n$$

つまり適当に列を並びかえれば前半の(n, n)行列はrankがnであり，残りの$2g-n$列はそれらの列による有理数係数の一次結合で表す事ができ

る事である．$\Pi((M_g,h),\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ は $H_1(M_g,\mathbf{R})\cong\mathbf{R}^{2g}$ 内の n-plane による Grassmannian の元となる．実際，$\mathbf{R}^{2g}$ 内の n-plane による Grassmannian $G(n,2g)$ は $M(n,2g;n)/\sim$ と表される，ここで $M(n,2g;n)$ とは rank が n の $(n,2g)$ 実行列であり $A\sim B$ とは A による n-plane と B による n-plane とが一致する事である．最後に $\mathcal{M}_g^n$ の中で適当なトーラスに well-defined に極小はめ込みできる集合 $\mathcal{M}_g^n(\mathbf{Q})$ を定義する．

$$\mathcal{G}_{\mathbf{Q}},\ \mathrm{H}_1(\mathrm{M}_\mathrm{g},\mathbf{Q})\text{ の }\mathrm{n}-\text{planes による Grassmannian},$$
$$\mathcal{M}_g^n(\mathbf{Q}):=\{p\in\mathcal{M}_g^n\,|\,\Pi(p)\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}\}.$$

$\mathcal{M}_g^n(\mathbf{Q})$ を target である平坦トーラスの等長変換群である直交群 $\mathcal{O}(n)$ の作用で割った空間 $\mathcal{M}_g^n(\mathbf{Q})/\mathcal{O}(n)$ を平坦トーラス内極小曲面のモジュライ空間と云う．ここで $\mathcal{O}(n)$ は次のように $\mathcal{M}_g^n$ に作用する：

$$O((M_g,h),\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)=((M_g,h),(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)O).$$

ただし，$\mathcal{M}_g^n(\mathbf{Q})/\mathcal{O}(n)$ はかなり難解な集合になっているので代数的に処理しやすい $\mathcal{M}_g^n$ を考察する．

3　$\mathcal{M}_g^4$ の構造

このセクションでは 4 次元平坦トーラス内極小曲面のモジュライについて考える．よってここでの主題は $\mathcal{M}_g^4$ の考察である．$\mathcal{M}_g^n$ の任意の元に対して Gauss 写像 $G\,:\,M_g\longrightarrow\mathbf{C}P^{n-1}$ が $p\longmapsto(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)(p)$ によって定義される．(2) より Gauss 写像の像は quadric $Q_{n-2}:=\{w\in\mathbf{C}P^{n-1}|w\cdot w=0\}$ に含まれる，ここで"$\cdot$"は複素双線形な内積である．$n=4$ のとき，Veronese 写像 V によって Q_2 は $\mathbf{C}P^1\times\mathbf{C}P^1$ に同型である (p.19 [6])．この事から次の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
M_g \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathbf{C}P^3 \\
& \mathbf{C}P^1\times\mathbf{C}P^1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

V は以下で定義される Veronese 写像である．

$$V((s_1,s_2),(t_1,t_2))=(s_1\,t_1-s_2\,t_2,\ s_1\,t_2+s_2\,t_1,\ i\,(s_1\,t_1+s_2\,t_2),\ i\,(s_1\,t_2-s_2\,t_1)).$$

φ_1 と φ_2 を各々φ の各 $\mathbf{C}P^1$ への射影とする．このとき $G^*(\mathcal{O}(1)) = [(\omega_i)] = K$ となる．$\varphi_i^*(\mathcal{O}(1)) = L_i$ $(i = 1,\, 2)$ とおくと，可換図式から $L_1 + L_2 = K$ となる．ただし，この線束の対から極小はめ込みを構成できるわけではない，何故ならば正則微分を構成できないからである．そこで線束の対とその正則切断の組を考えれば極小はめ込みを復元できる．実際，$\varphi_1 = [s_1, s_2]$ と $\varphi_2 = [t_1, t_2]$ $(s_i \in H^0(M_g, L_1)$，$t_i \in H^0(M_g, L_2)$ $(i = 1,\, 2))$ をとると，Veronese 写像によって正則微分が構成される．そこで次の $\widetilde{\mathcal{M}}_g^4$ を導入する：

$$\widetilde{\mathcal{M}}_g^4 := \{(M_g, h), L, s_1, s_2, t_1, t_2 \,|\, s_i \in H^0(M_g, L),\, t_i \in H^0(M_g, K - L)\},$$

さらに次で与えられる全射 Ψ を考える．$\Psi : \widetilde{\mathcal{M}}_g^4 \longrightarrow \mathcal{M}_g^4$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= s_1\, t_1 - s_2\, t_2, \\
\omega_2 &= s_1\, t_2 + s_2\, t_1, \\
\omega_3 &= i\,(s_1\, t_1 + s_2\, t_2), \\
\omega_4 &= i\,(s_1\, t_2 - s_2\, t_1).
\end{aligned}$$

直接計算する事によって

$$\begin{aligned}
&\Psi^{-1}((M_g, \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g), \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \\
&\quad = \{(M_g, \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g), L, \lambda\, s_1, \lambda\, s_2, \lambda^{-1}\, t_1, \lambda^{-1}\, t_2 \,|\, \lambda \in \mathbf{C}^*\}
\end{aligned}$$

となる．この事から

$$\mathcal{M}_g^4 \cong \widetilde{\mathcal{M}}_g^4 / \mathbf{C}^*.$$

本講では分岐点のない，はめ込みだけを考察する．上記において分岐点となる場合は $s_1 = s_2 = 0$ あるいは $t_1 = t_2 = 0$ のときである．よって L と $K - L$ は共通ゼロ点をもたない 2 つの正則切断をもつ，これは $|D|$ と $|K - D|$ が base point free であると云う形で因子の言葉に直す事ができる，ここで D は L に対応する因子であり K は標準束や標準因子の事である．この事から L あるいは $K - L$ が自明束でない限り $h^0(L) > 1$ と $h^0(K - L) > 1$ を仮定して考える．ちなみに L あるいは $K - L$ が自明束のときは対応する極小はめ込み f がトーラスの適当な複素構造によって正則はめ込みになる．

C. Arezzo と G. P. Pirola [2] は $\mathcal{M}_g^4$ の連結成分を 4 つ与えている．正則はめ込みによる極小曲面に対応する，次元が $5g - 2$ である連結成分．Spin

束を含む超楕円型 Riemann 面による極小曲面に対応する，次元が $4g$ の連結成分．Spin 束を含む非超楕円型 Riemann 面による極小曲面に対応する，次元が $4g$ の連結成分．そして generic Riemann 面 ($3g-3$ の自由度で動く Riemann 面) による極小曲面に対応する，次元が $4g$ の連結成分である．ここで最後の連結成分に対して少々解説を述べる．まず次の variety $W_d^r(M_g)$ を導入する (p.153, p.176 [4]):

$$
\begin{aligned}
supp(W_d^r(M_g)) &= \{L \in Pic^d(M_g) \,|\, h^0(L) \geq r+1\} \\
&= \{|D| \,|\, deg\, D = d\,,\ h^0(D) \geq r+1,\}
\end{aligned}
$$

ここで $r \geq d-g$.

Lemma 3.1. (p.182 [4]) $r \geq d-g$ とする．$W_d^r(M_g)$ の連結成分は $W_d^{r+1}(M_g)$ に完全に横たわらない．特に $W_d^r(M_g) \neq \phi$ ならば $W_d^r(M_g) - W_d^{r+1}(M_g) \neq \phi$ となる．

今 generic Riemann 面上の $W_d^r(M_g)$ を考える．ここで Brill-Noether 数 $\rho = g-(r+1)(g-d+r)$ を考える．$\rho \geq 0$ ならば $W_d^r(M_g) \neq \phi$ であり $W_d^r(M_g) - W_d^{r+1}(M_g)$ は次元 ρ の smooth な variety になる (p.190, p.214 [4])． 最後の連結成分は $deg\, L = d$, $h^0(L) = 2$ の場合のものである．この場合，線束 L は $W_d^1(M_g) - W_d^2(M_g)$ を動く事から線束の自由度が計算でき，その連結成分の次元が $4g$ となる (see p.775 [2])．$\mathcal{M}_g^4$ の他の連結成分については未解決問題として問題提起されている．

generic Riemann 面上では $\rho < 0$ ならば $W_d^r(M_g)$ は空になる (p.214 [4])．しからば $\rho < 0$ であっても $W_d^r(M_g)$ が空でないような Riemann 面が存在するかどうかが問題になるが，実際に存在する．例えば種数が $g \geq 3$ の超楕円型 Riemann 面，種数が $g \geq 5$ の trigonal Riemann 面，そして種数が $g > 2(d-1)$ の d-gonal Riemann 面である (p.212 [4])，ここで d-gonal Riemann 面とは球面の分岐 d-被覆の構造をもつ Riemann 面の事であり，$d = 3$ の場合を trigonal と云う．この事からこうした Riemann 面による極小曲面に対応する連結成分を考察する．

(超楕円型 Riemann 面上の連結成分)

最初に一次系について述べる [4]．V を $H^0(M_g, \mathcal{O}(D))$ の線形部分空間とし $\mathcal{P}V$ をその射影空間とする．$deg\, D = d$, $\dim V = r+1$ のとき一次系 $\mathcal{P}V$ を g_d^r で表す．

d を $0 \leq d \leq g$ の整数とする．超楕円型 Riemann 面 M_g 上の任意の完備一次系 g_d^r は次のように表される：

$$r\, g_2^1 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{d-2r},$$

ここで各 p_i は超楕円型変換 (hyperelliptic involution) で移りあわない (p.13 [4])．必要ならば L と $K-L$ を入れ換える事によって，$0 \leq deg\, L \leq g-1$ としてよい．今は base point free の場合を考えているので $g_d^r = r\, g_2^1$ となる．特に $d = 2r$ である．これより $W_{2r}^r(M_g) - W_{2r}^{r+1}(M_g)$ は 1 点 g_{2r}^r より成る．よって $deg\, L = 2r$, $h^0(L) = r+1$ の場合の $\mathcal{M}_g^4$ の連結成分の次元が以下のように計算できる：

$$\begin{aligned}2g - 1 + 0 + 2h^0(L) + 2h^0(K-L) - 1 &= 2g - 1 + 2(r+1) + 2(g-r) - 1\\ &= 4g,\end{aligned}$$

ここでは Riemann-Roch を用いた．

Remark 3.1. *Arezzo-Pirola* による超楕円型の連結成分は $r = \dfrac{g-1}{2}$ の場合である (この場合の種数は奇数である)．

(trigonal Riemann 面上の連結成分)

Riemann 面 M_g が trigonal であるための条件は base point free の一次系 g_3^1 が存在する事である．さらに trigonal Riemann 面は $g \geq 4$ であり trigonal Riemann 面全体の集合の複素次元は $2g+1$ である事が知られている．今 trigonal Riemann 面上の $W_3^1(M_g)$ を考える．このとき $\rho = g - 2(g-3+1) = -g+4 \leq 0$ となる．$deg\, L = 3$, $h^0(L) = 2$ の場合の $\mathcal{M}_g^4$ の連結成分の次元は以下のようになる：

<u>$g = 4$ のとき</u>

このとき $W_3^1(M_g)$ は 2 点か 1 点で構成される事が知られている (p.206 [4])．Lemma 3.1 によって $W_3^1(M_g) - W_3^2(M_g)$ はそうした点によって与えられる．よって次元は

$$(2 \times 4 + 1) + 0 + 2 \times 2 + 2 \times 2 - 1 = 16 = 4g.$$

<u>$g > 4$ のとき</u>

このとき trigonal Riemann 面には完備一次系 g_3^1 が一意に存在する (p.37 [3], p.244 [8])．この事から $W_3^1(M_g) - W_3^2(M_g)$ はこの g_3^1 によって構成される．よって次元は

$$(2g+1) + 0 + 2 \times 2 + 2(g-2) - 1 = 4g.$$

(d-gonal Riemann 面上の連結成分)

ここでは d-gonal Riemann 面 $(g > 2(d-1))$ 上の $W_d^1(M_g)$ を考える．このとき $\rho = g - 2(g-d+1) = -g + 2(d-1) < 0$ となる．まず d-gonal Riemann 面全体の集合の次元は $2d+2g-5$ となる．実際，base point free の一次系 g_d^1 は $\mathbf{C}P^1$ の分岐 d-被覆を与えるが，Riemann-Hurwitz より $2d+2g-2$ 個の分岐点をもつ．$\mathbf{C}P^1$ の変換によって分岐点は $0, 1, \infty$ に固定できるので結局自由度は $2d+2g-5$ となるので題意を得る．$g > 2(d-1)$ のときは一次系 g_d^1 は一意になる ([1])．Lemma 3.1 から $W_d^1(M_g) - W_d^2(M_g)$ は g_d^1 によって構成される．よって $deg\, L = d$, $h^0(L) = 2$ による $\mathcal{M}_g^4$ の連結成分は

$$2d + 2g - 5 + 0 + 2 \times 2 + 2(g-d+1) - 1 = 4g.$$

4 具体例

このセクションでは 4 次元平坦トーラス内の trigonal 極小曲面の具体例を構成する．trigonal Riemann 面の種数 g は $g \geq 4$ となる．ここでは一番簡単な $g=4$ の場合を考察する．しかしながら，直接 4 次元平坦トーラスへの極小はめ込みを構成する事は困難があったので，一旦 3 次元平坦トーラス内の Property $\mathbf{P}$ をみたす極小曲面を構成しておきそれを変形して 4 次元平坦トーラス内の trigonal 極小曲面を構成する．実際に Meeks が次の事実を証明している：

Theorem 4.1. (*Corollary 9.1 [7]*) *$f : M \longrightarrow T^3$ を Property $\boldsymbol{P}$ をみたすコンパクト極小曲面とする．このとき M は 4 次元平坦トーラス内の極小曲面として full にはめ込む事ができる．ここで full とは 4 次元平坦トーラス内のどのような部分トーラスにも横たわらない事である．*

まず $a_1, a_2, \cdots, a_6$ を相異なる複素数とし，M を

$$w^3 = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_6) \tag{6}$$

で定義された種数 4 の trigonal Riemann 面とする．最初に正則微分全体の集合 $H^0(M,K)$ を決定する．$\omega := \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし，ψ を

$$\psi(z,w) := (z, \omega\, w)$$

で定義される M 上の正則変換とする．引き戻し ψ^* は $H^0(M,K)$ に作用する．$\psi^{*3}=id$ なので

$$H^0(M,K)=A_1\oplus A_\omega\oplus A_{\omega^2}$$

と固有分解しておく (A_1, A_ω, A_{ω^2} はそれぞれ固有値 1, ω, ω^2 の固有空間)．$f(z):=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_6)$ とおき (1) の両辺の微分を考えると

$$3w^2\,dw=f'(z)\,dz. \tag{7}$$

ここで (2) の両辺の zero を考える．w と $f'(z)$ の zero は全て一致しない．また，dw と dz は M 上の 1-form を generate するので共通 zero はない．よって位数もこめて dz と w^2 の zero が一致する．そこで

$$\omega_0:=\frac{dz}{w^2}$$

を考える．ω_0 は $z=\infty$ 以外では $zero$ をもたない．ここで $z=\infty$ での挙動を調べるために座標変換 $x=\dfrac{1}{z}$, $y=\dfrac{w}{z^2}$ を考えると

$$\omega_0=\frac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^2}=-x^2\,\frac{dx}{y^2}$$

となるので，$z=\infty$ $(x=0)$ において ω_0 は 6 位の zero をもつ．よって $\omega_0\in H^0(M,K)$．また，$\psi^*(\omega_0)=\omega\omega_0$ に注意する．

$\eta\in H^0(M,K)$ をとる．K は M 上の line bundle であり，η, ω_0 はその global section となるので $\dfrac{\eta}{\omega_0}=:h$ は M 上の meromorphic function となる．しかも ω_0 は $z=\infty$ 以外では zero をとらないので h は $z=\infty$ 以外では正則である．$\eta\in A_1$ のとき，η は S^2 上の正則微分になるので 0 になる．よって $A_1=0$. 次に $\eta\in A_\omega$ のときを考える．$\psi^*\eta=\omega\eta$ から $\psi^*h=h$ が導かれる．よって h は z の多項式で構成され，η の候補は ω_0, $z\,\omega_0$, $z^2\,\omega_0$, $z^3\,\omega_0,\cdots$ となる．$z=\infty$ での挙動をみると各々

$$-x^2\,\frac{dx}{y^2},\ -x\,\frac{dx}{y^2},\ -\frac{dx}{y^2},-\frac{1}{x}\,\frac{dx}{y^2},\cdots$$

となる．よって $\dfrac{dz}{w^2}$, $z\,\dfrac{dz}{w^2}$, $z^2\,\dfrac{dz}{w^2}\in H^0(M,K)$ となる．ちなみにこの 3 つの正則微分は共通 zero がない．最後に $\eta\in A_{\omega^2}$ のときを考える．$\psi^*\eta=\omega^2\,\eta$

から $\psi^* h = \omega h$ が導かれる．よって h は z と w による多項式で構成され，η の候補は $w\,\omega_0,\ zw\,\omega_0, \cdots$ となる．$z=\infty$ での挙動をみると各々

$$-y\,\frac{dx}{y^2},\ -\frac{1}{x}\,\frac{dx}{y^2}, \cdots$$

となる．よって $\dfrac{dz}{w} \in H^0(M,K)$. 以上より

$$H^0(M,K) = Span\left\{\frac{dz}{w^2},\ z\,\frac{dz}{w^2},\ z^2\,\frac{dz}{w^2},\ \frac{dz}{w}\right\}.$$

ここで簡単のため M を $w^3 = z^6 - 1$ で定義される trigonal curve とする．今，以下の $\mathbf{R}^3$ への極小はめ込みを考える：

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ p \ &\longmapsto \Re \int_{p_0}^{p} \left(\frac{1-z^2}{w^2},\ \frac{i\,(1+z^2)}{w^2},\ \frac{2\,z}{w^2}\right)^T dz. \end{aligned}$$

このとき f の周期行列 Ω は

$$\Omega = \Re\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix},$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2}A & -\frac{3}{2}A & 0 & -\frac{3}{2}A & 0 & \frac{3}{2}A & -\frac{3}{2}A \\ 0 & \frac{3}{2}B & \frac{3}{2}B & 0 & \frac{3}{2}B & 0 & -\frac{3}{2}B & -\frac{3}{2}B \\ -\sqrt{3}\,C & \frac{\sqrt{3}}{2}C & \frac{\sqrt{3}}{2}C & -\sqrt{3}\,C & -\frac{\sqrt{3}}{2}C & \sqrt{3}\,C & -\frac{\sqrt{3}}{2}C & -\frac{\sqrt{3}}{2}C \end{pmatrix},$$

となる，ここで A, B, C, X, Y は

$$\begin{aligned} A &:= \int_1^2 \frac{1}{((t^2-1)^2\,(4-t^2))^{\frac{1}{3}}}\,dt, \\ B &:= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2^{\frac{1}{3}}}{(t^2\,(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}\,\sqrt{1+t^2}}\,dt \\ C &:= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{(t^2\,(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}\,\sqrt{4-t^2}}\,dt \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} (-\omega^2+\omega)\,A & (1-\omega)\,A & (-1+\omega^2)\,A & (-\omega^2+\omega)\,A \\ (\omega^2-\omega)\,B & (1-\omega)\,B & (1-\omega^2)\,B & (-\omega^2+\omega)\,B \\ i\,(-\omega^2+\omega)\,C & i\,(1-\omega)\,C & i\,(-1+\omega^2)\,C & i\,(-\omega^2+\omega)\,C \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} (-1+\omega^2)\,A & (-\omega^2+\omega)\,A & (1-\omega)\,A & (-1+\omega^2)\,A \\ (1-\omega^2)\,B & (-\omega^2+\omega)\,B & (-1+\omega)\,B & (-1+\omega^2)\,B \\ i\,(1-\omega^2)\,C & i\,(\omega^2-\omega)\,C & i\,(-1+\omega)\,C & i\,(1-\omega^2)\,C \end{pmatrix}.$$

ここで次の格子変換を復習する．$\{u_1, \cdots, u_m\}$ $(m \geq n)$ を $\mathbf{R}^n$ を張るベクトルの列とする．

Proposition 4.1. ([5] section 6) $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が格子ベクトルになるための条件は，格子ベクトル $\{v_1, \cdots, v_n\}$ で以下をみたすものが存在する事である：

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_m)\, G_1,$$
$$(u_1, u_2, \cdots, u_m) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\, G_2,$$

ここで G_1，G_2 は各々整数係数の (m, n)，(n, m) 行列である．

今

$$\Lambda := \begin{pmatrix} 3A & 0 & \frac{3}{2}A \\ 0 & 3B & \frac{3}{2}B \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}C \end{pmatrix}, \quad G_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

とおくと

$$\Omega\, G_1 = \Lambda, \;\; \Lambda\, G_2 = \Omega$$

が成り立つ．よって3次元平坦トーラスへの極小はめ込み

$$
\begin{aligned}
f : M &\longrightarrow \mathbf{R}^3/\Lambda \\
p &\longmapsto \Re \int_{p_0}^{p} \left(\frac{1-z^2}{w^2}, \frac{i\,(1+z^2)}{w^2}, \frac{2\,z}{w^2} \right)^T dz. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (w^3 = z^6 - 1)
\end{aligned}
$$

を構成できる．

次に，この極小曲面の conjugate surface f^* を考える：

$$
\begin{aligned}
f^* : M &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\
p &\longmapsto \Re \int_{p_0}^{p} i \left(\frac{1-z^2}{w^2}, \frac{i\,(1+z^2)}{w^2}, \frac{2\,z}{w^2} \right)^T dz. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (w^3 = z^6 - 1)
\end{aligned}
$$

このとき周期行列 Ω' は

$$
\begin{aligned}
\Omega' &= \Re \begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix}
-\sqrt{3}\,A & \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{\sqrt{3}}{2}A & -\sqrt{3}\,A & \frac{\sqrt{3}}{2}A & -\sqrt{3}\,A & \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{\sqrt{3}}{2}A \\
\sqrt{3}\,B & \frac{\sqrt{3}}{2}B & -\frac{\sqrt{3}}{2}B & -\sqrt{3}\,B & -\frac{\sqrt{3}}{2}B & -\sqrt{3}\,B & -\frac{\sqrt{3}}{2}B & \frac{\sqrt{3}}{2}B \\
0 & -\frac{3}{2}C & \frac{3}{2}C & 0 & -\frac{3}{2}C & 0 & \frac{3}{2}C & -\frac{3}{2}C
\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

となる，ここで X', Y' は

$$
X' = \begin{pmatrix}
i\,(-\omega^2+\omega)\,A & i\,(1-\omega)\,A & i\,(-1+\omega^2)\,A & i\,(-\omega^2+\omega)\,A \\
i\,(\omega^2-\omega)\,B & i\,(1-\omega)\,B & i\,(1-\omega^2)\,B & i\,(-\omega^2+\omega)\,B \\
(\omega^2-\omega)\,C & (-1+\omega)\,C & (1-\omega^2)\,C & (\omega^2-\omega)\,C
\end{pmatrix}
$$

$$
Y' = \begin{pmatrix}
i\,(-1+\omega^2)\,A & i\,(-\omega^2+\omega)\,A & i\,(1-\omega)\,A & i\,(-1+\omega^2)\,A \\
i\,(1-\omega^2)\,B & i\,(-\omega^2+\omega)\,B & i\,(-1+\omega)\,B & i\,(-1+\omega^2)\,B \\
(-1+\omega^2)\,C & (-\omega^2+\omega)\,C & (1-\omega)\,C & (-1+\omega^2)\,C
\end{pmatrix}.
$$

このとき

$$\Lambda' := \begin{pmatrix} \sqrt{3}A & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}A \\ 0 & \sqrt{3}B & \frac{\sqrt{3}}{2}B \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}C \end{pmatrix}, \quad G_1' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2' := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

とおくと

$$\Omega' G_1' = \Lambda', \ \ \Lambda' G_2' = \Omega'$$

が成り立つ．よって conjugate surface

$$\begin{aligned} f^* : M &\longrightarrow \mathbf{R}^3/\Lambda' \\ p &\longmapsto \Re \int_{p_0}^{p} i \left(\frac{1-z^2}{w^2}, \frac{i\,(1+z^2)}{w^2}, \frac{2\,z}{w^2} \right)^T dz. \end{aligned}$$
$$(w^3 = z^6 - 1)$$

も構成される．

さらに f の associate surface f_θ を考える：

$$\begin{aligned} f_\theta : M &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ p &\longmapsto \Re \int_{p_0}^{p} e^{i\theta} \left(\frac{1-z^2}{w^2}, \frac{i\,(1+z^2)}{w^2}, \frac{2\,z}{w^2} \right)^T dz. \end{aligned}$$
$$(w^3 = z^6 - 1)$$

$$\Re \int_\gamma e^{i\theta}\,\Phi = \cos\theta\,\Re \int_\gamma \Phi + \sin\theta\,\Re \int_\gamma i\,\Phi,$$

なので，周期行列 Ω_θ は

$$\begin{aligned} \Omega_\theta &= \cos\theta\,\Omega + \sin\theta\,\Omega' \\ &= \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

となる. ここで X_1, Y_1, Z_1 は

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin\theta\, A & \left(\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) A & \left(-\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) A \\ \sqrt{3}\sin\theta\, B & \left(\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) B & \left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) B \\ -\sqrt{3}\cos\theta\, C & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\sin\theta\right) C & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\right) C \end{pmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin\theta\, A & \left(-\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) A & -\sqrt{3}\sin\theta\, A \\ -\sqrt{3}\sin\theta\, B & \left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) B & -\sqrt{3}\sin\theta\, B \\ -\sqrt{3}\cos\theta\, C & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\sin\theta\right) C & \sqrt{3}\cos\theta\, C \end{pmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) A & \left(-\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) A \\ \left(-\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) B & \left(-\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) B \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\right) C & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\sin\theta\right) C \end{pmatrix}.$$

ここで θ を

(8) $$2\sqrt{3}\sin\theta\, m = (3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)\, n$$

$$\left(\text{i.e.} \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{\frac{2m}{n} - 1}\right)$$

ととる (n, m は互いに素な整数). $nx + my = 1$ となる整数 x, y をとっておく.

さらに

$$\Omega'_\theta = \begin{pmatrix}\Omega'_{\theta 1} & \Omega'_{\theta 2}\end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & m & 1 & -1 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & m \\ -x & -x-y & 1 & 0 & m & 1 & -1 & m-n \\ y & -x-y & 0 & 1 & n & 1 & -1 & m-n \\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -n \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} -n & m & n-m & -n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & -n & -n & 0 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x & y & y & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & x & -x-y & y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をとる．ここで $\Omega'_{\theta 1}, \Omega'_{\theta 2}$ は

$$\Omega'_{\theta 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta\, A & 0 & -\sqrt{3}\sin\theta\, A & \frac{m}{n}\cdot\sqrt{3}\sin\theta\, A \\ 0 & \frac{1}{n}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta\, B & -\sqrt{3}\sin\theta\, B & -\frac{m}{n}\cdot\sqrt{3}\sin\theta\, B \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\cos\theta\, C & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\right) C \end{pmatrix}$$

$$\Omega'_{\theta 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき

$$\Omega_\theta F_1 = \Omega'_\theta, \quad \Omega'_\theta F_2 = \Omega_\theta$$

が成り立つ．また，(8) より

$$\Omega'_{\theta 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta\, A & 0 & -\sqrt{3}\sin\theta\, A & \frac{m}{n}\cdot\sqrt{3}\sin\theta\, A \\ 0 & \frac{1}{n}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta\, B & -\sqrt{3}\sin\theta\, B & -\frac{m}{n}\cdot\sqrt{3}\sin\theta\, B \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\cos\theta\, C & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\right) C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta\, A & 0 & -\sqrt{3}\sin\theta\, A & \frac{m}{n}\cdot\sqrt{3}\sin\theta\, A \\ 0 & \frac{1}{n}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta\, B & -\sqrt{3}\sin\theta\, B & -\frac{m}{n}\cdot\sqrt{3}\sin\theta\, B \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\cos\theta\, C & \frac{-m+2n}{2m-n}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\, C \end{pmatrix}$$

よって

$$rank_{\mathbf{Q}}\Omega_\theta = rank_{\mathbf{Q}}\Omega'_\theta = 3$$

となるので Ω_θ は格子 Λ_θ を定める．よって f の associate surface

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbf{R}^3/\Lambda_\theta \\ p &\longmapsto \Re\int_{p_0}^{p} e^{i\theta}\left(\frac{1-z^2}{w^2}, \frac{i(1+z^2)}{w^2}, \frac{2z}{w^2}\right)^T dz. \\ & \qquad\qquad (w^3 = z^6 - 1) \end{aligned}$$

も構成される．しかも (8) より，こうした associate surface は S^1 で dense に構成される．即ち property $\mathbf{P}$ を満たす．

参考文献

[1] E. Arbarello and M. Cornalba, *Footnotes to a Paper of B. Segre*, Math. Ann. 256 (1981), 341–362.

[2] C. Arezzo and G. P. Pirola, *On the existence of periodic minimal surfaces*, J. Alg. Geom 8 (1999), 765–785.

[3] M. Coppens and G. Martens, *Linear Series on 4-Gonal Curves*, Math. Nachr 213 (2000), 35–55.

[4] P. A. Griffiths E. Arbarello, M.Cornalba and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves. I*, Springer-Verlag, 1985.

[5] N. Ejiri, *A differential-geometric Schottky problem and minimal surfaces in tori*, Contemporary. Math. 308, 101–144 (2002).

[6] D. A. Hoffman and R. Osserman, *The geometry of the generalized Gauss map*, Mem. Amer. Math. Soc. vol.28, No.236 (1980).

[7] W. H. Meeks III, *The theory of triply periodic minimal surfaces*, Indiana Univ Math Journal 39 No3 (1990), 877–935.

[8] C. Keem M. Coppens and G. Martens, *PRIMITIVE LINEAR SERIES ON CURVES*, Manuscripta. Math. 264 (1992), 237–264.

[9] T. Nagano and B. Smyth, *Periodic minimal surfaces*, Comm. Math. Helv. 53 (1978), 29–55.