数理解析研究所講究録 1350 巻 2004 年 26-30

On Entropic Chaos Degree in a Quantum Dynamical System

井上 啓

東京理科大学理工学部

導入

カオスは、複雑で予測困難な振る舞いを示すが、そこには、隠れた規則 が存在していることが知られている。このカオスを用いれば、あるランダム なプロセスを生成することが可能なので、カオスが決定論的な現象と非 決定論的な現象(確率的な現象)を結ぶ役割を果たしている。また、カオ スには、初期状態に関する鋭敏性という性質がある。この性質は、2つの 状態が最初は非常に近接しているにも関わらず、時間が経つと全く異な る状態に推移するというものである。すなわち、カオス現象では、最初 のわずかな違いが、後の結果に大きな影響を及ぼすため、この性質が長 期予測を不可能にしている。

近年、こうしたカオスの量子系における振る舞いを調べるといった量子カオス の研究が行われている。量子カオスの研究の一つに、カオス系の量子古典 対応が壊れる時間スケールを見積もるという問題があり、古典カオスの特徴 である初期値に対する鋭敏性といった性質が量子系に拡張したときに、どの時刻まで維持できるかを調べるものである。特に、量子古典対応の時間スケールTをプランク定数hに関連した関数 t_hとして見積もることが重要な問題である。いままでに、時間スケールTの普遍的な形式は解析的に導出され ていないが、多くの数値計算結果から、$T = \frac{1}{\lambda}\log\frac{C}{h}$となるという予想が報告され ているcite: Zur,KZZ(ただし、λはリアプノフ指数,Cを比例 定数である)。

ここでは、量子パイこね変換という量子カオスの理論的なモデルに関して、量子古典対応の関係式を厳密に導出する。すなわち、量子パイこね変換 に従う位置作用素のある期待値の時間発展と古典パイこね変換に従うx 軸方向の時間発展の間の対応関係が対数時間で崩れることを示す cite: IOV。

古典パイこね変換

古典パイこね変換は、単位平面$0 \leq q,p,\leq 1$を単位平面自身に 変換するもので、以下の写像で定義される。

$$(q,p) \rightarrow \begin{cases} (2q, p/2), & (0 \leq q \leq 1/2) \\ (2q-1, (p+1)/2), & (1/2 < q \leq 1) \end{cases}$$

この写像は、p方向(y軸方向)に単位平面を押しつぶして、押しつぶされた単位平面を面積を保存するようq方向 (x軸方向)に関して単位平面から飛び出た部分を 切り取って、残りの部分の上に載せるという操作に対応している。

この古典パイこね変換は2進表現という単純な記述 を持っているcite: AY。この表現において、それぞれの点(p, q)はドットを持った記号列によって、次のように表される。

$$\xi = \cdots\xi_{-2}\xi_{-1}\xi_0.\xi_1\xi_2\cdots \quad \#$$

ただし、$\xi_k \in 0, 1$で

$$q = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{-k} 2^{-k-1}$$

記号列ξに関するパイこね変換の操作は、$U\xi = \acute{\xi}$ によって定義されるシフト写像(Bernoulli shift)Uで与えられる。ここでは、$\acute{\xi}_m = \xi_{m+1}$である。すなわち、古典 パイこね変換は、全体の記号列を固定したままの状態で、時間1 ステップ毎に、ドットを右側に一つシフトする変換とみなすことが できる。mステップ後には、q方向の成分は、

$$q_m = \sum_{k=1}^{\infty} = \xi_{m+k} 2^{-k} \quad \#$$

となる。この関係が初期値

$$q = q_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k} \quad \#$$

に関する古典軌道を与える。

量子パイこね変換

量子パイこね変換は、量子化された単位平面のD次元ヒルベルト 空間上で定義されているcite: BV。単位平面を量子化するために、それぞれ位置方向と運動量方向に対応する、ワイル形式のユニタリ 一移動作用素$\hat{U}$と$\hat{V}$をD次元ヒルベルト空間上に 定義する。これらの作用素$\hat{U}$と$\hat{V}$は、次の正準交 換関係にしたがっている:

$$\hat{U}\hat{V} = \varepsilon\hat{V}\hat{U},$$

ただし、$\varepsilon = \exp(2\pi i/D)$である。作用素 $\hat{U}$ と $\hat{V}$ は

$$\hat{U} = e^{2\pi i\hat{q}}, \hat{V} = e^{2\pi i\hat{p}} \quad \#$$

と書くことができる。整合性を保つために、相空間上における 量子スケールを$2\pi h = 1/D$とする. 位置作用素$\hat{q}$と 運動量作用素$\hat{p}$の固有値を反周期的境界条件cite: Sar に対応させながら、それぞれ $q_j = (j + \frac{1}{2})/D, j = 0, \ldots, D-1, p_k = (k + \frac{1}{2})/D, k = 0, \ldots, D-1$とする。さらに、ヒルベルト空間の次元$D$として、$N$ qubitsのヒルベルト空間の次元である$D = 2^N$を仮定する。

単位平面をモデル化している$D = 2^N$ 次元ヒルベルト空間は、N qubits

$$|q_j\rangle = |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes\otimes\cdots\cdots \cdot \otimes|\xi_N\rangle, \quad \#$$

が定義される直積空間と同一視される。ただし、$j = \sum_{l=1}^{N} \xi_l 2^{N-l}, \xi_l \in \{0, 1\}$, であり、それぞれのqubitは基底

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を持つ。q_j を2進少数として、$q_j = 0.\xi_1\xi_2\ldots\xi_N 1$ と書くことができる。反周期的境界条件 から由来する位相要素$e^{i\pi/2}$の ため cite: SC、

$$|.\xi_1\xi_2\ldots\xi_N\rangle = e^{i\pi/2}|q_j\rangle \quad \#$$

と定義すると、位置作用素と運動量作用素 の固有ベクトルは、互いにフーリエ変換を通して関係 付けられる: $F|q_k\rangle = |p_k\rangle$.

位置作用素 $|.\xi_{n+1}\ldots\xi_N\xi_n\ldots\xi_1\rangle$ の最も右のnビットに対してのみフーリエ変換を適用する こと

によって、次の状態の族を得るcite: SC。

$$\begin{aligned}|\xi_1\ldots\xi_n.\xi_{n+1}\ldots\xi_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2^n}}|\xi_{n+1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\xi_N\rangle \\ \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i(0.\xi_1 1)}|1\rangle) \\ \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i(0.\xi_2\xi_1 1)}|1\rangle) \\ \otimes \cdots \\ \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i(0.\xi_n\ldots\xi_1 1)}|1\rangle),\end{aligned} \qquad \#$$

ただし、$1 \leq n \leq N-1$である。与えられたnに対して, これらの 状態は、正規直交基底を作る。状態 (ref: pf)は、位置と運動量の両方に おいて、局所化される: 幅$1/2^{N-n}$の位置領域において局所化され、位置$q = 0.\xi_{n+1}\ldots\xi_N 1$となり、幅$1/2^n$の運動量領域において 同様に局所化され、$p = 0.\xi_n\ldots\xi_1 1$となる。

いま、nを$0 \leq n \leq N-1$とすると、それぞれのnに対して、量子パイこね変換は

$$B_n|\xi_1\ldots\xi_n.\xi_{n+1}\ldots\xi_N\rangle = |\xi_1\ldots\xi_{n+1}.\xi_{n+2}\ldots\xi_N\rangle, \qquad \#$$

によって定義されるcite: SC。すなわち、量子パイこね変換は、ドットの 位置を一つ右にシフトする変換で表される。特に、$n = N-1$に対して、B_{N-1}は、オリジナルの量子パイこね変換であるcite: BV。また、相空間の言葉で説明すれば、量子パイこね変換B_nは、q方向 に引き伸ばし、p方向で折りたたみながら、$(q,p) = (0.\xi_{n+1}\ldots\xi_N 1, 0.\xi_n\ldots\xi_1 1)$ で局所化された状態を$(q',p') = (0.\xi_{n+2}\ldots\xi_N 1, 0.\xi_{n+1}\ldots\xi_1 1)$ で局所化された状態に移す写像とみなすことができる。

以下では、$n = 0$に対する量子パイこね変換 B_0 のみを考察する。量子パイこね変換 B_0 は、次の行列成分を持つユニタリー作用素 Tで表されるcite: SS:

$$\langle\xi|T|\eta\rangle = \frac{1-i}{2}\exp\left(\frac{\pi}{2}i|\xi_1 - \eta_N|\right)\prod_{k=2}^{N}\delta(\xi_k - \eta_{k-1}), \qquad \#$$

ただし、$|\xi\rangle = |\xi_1\xi_2\ldots\xi_N\rangle, |\eta\rangle = |\eta_1\eta_2\ldots\eta_N\rangle$ であり、$\delta(x)$ は、Kronecker symbol, $\delta(0) = 0$: $\delta(x) = 0, x \neq 0$である。

期待値

ある状態ベクトル $|\xi\rangle$に関する時刻$m = 0,1,\ldots$ の位置作用素$\hat{q}$ の期待値:

$$r_m^{(N)} = \langle\xi|T^m\hat{q}T^{-m}|\xi\rangle \qquad \#$$

を考える。ただし、$|\xi\rangle = |\xi_1\xi_2\ldots\xi_N\rangle$ である。

最初に、期待値$r_m^{(N)}$の導出結果を示す。このとき、位置 作用素$\hat{q}$の期待値の力学と相空間上のq方向の値q_m (式(ref: cq))を比較し、量子パイこね変換に対する量子古典対応が 対数時間で消失することを示す。

式(ref: element)によって、$m = 0,1,\ldots,N-1$に対して、

$$\langle\xi|T^m|\eta\rangle = \left(\frac{1-i}{2}\right)^m\left(\prod_{k=1}^{N-m}\delta(\xi_{m+k} - \eta_k)\right)\left(\prod_{l=1}^{m}\exp\left(\frac{\pi}{2}i|\xi_l - \eta_{N-m+l}|\right)\right) \qquad \#$$

を導くことができる。また、$m = N$に対しては、

$$\langle T^N\rangle = \left(\frac{1-i}{2}\right)^N\left(\prod_{l=1}^{N}\exp\left(\frac{\pi}{2}i|\xi_l - \eta_l|\right)\right) \qquad \#$$

このとき、次の定理が成立する cite: IOV

定理 $m(0 \leq m \leq N)$に対して、

$$r_n^{(N)} = \langle \xi | T^m \hat{q} T^m | \xi \rangle = \sum_{k=1}^{N-m} \frac{\xi_{m+k}}{2^k} + \frac{1}{2^{N-m+1}} \quad \#$$

が成立する。また、$m = N$に対して

$$r_N^{(N)} = \frac{1}{2} \quad \#$$

が成立する。

時間スケール

この節では、量子パイこね変換の量子古典対応を考察する。$2^N = 1/\hbar$であるので、極限$\hbar \to 0$が極限$N \to \infty$に対応する。したがって、定理4.1と式 (ref: cq)から、$\hbar \to 0$のとき、量子系における 期待値と古典軌道の間に対応関係：

$$\lim_{N \to \infty} r_m^{(N)} = q_m, m = 0, 1, \ldots$$

があることがわかる。また、定理4.1と式(ref: cq)から、以下の命題を得る cite: IOV
命題 $r_m^{(N)}$ を位置作用素の時刻mでの期待値、q_m を 古典軌道、すなわち、$q_m = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{m+k} 2^{-k}$ とする。このとき、任意の$m(0 \leq m \leq N)$に対して、

$$q_m - r_m^{(N)} = \sum_{j=N-M+1}^{\infty} \xi_{m+j} 2^{-j} - \frac{1}{2^{N-m+1}} \quad \#$$

が成立する。

さらに、量子における期待値と古典軌道の違いに関して、次の関係式が成立する。cite: IOV
命題 q_m と $r_m^{(N)}$ を上記の命題と同じであると仮定する。このとき、任意の$\xi = \xi_1 \xi_2 \ldots$と$m(0 \leq m \leq N)$に対して、

$$\left| r_m^{(N)} - q_m \right| \leq \frac{1}{2^{N-m+1}} \quad \#$$

が成立する。

命題5.2は、量子パイこね変換に対する量子古典対応を示した 関係式である。$\hbar = 1/2^N$なので、式(ref: qcc)は

$$\left| r_m^{(N)} - q_m \right| \leq \frac{1}{2^{N-m+1}} = \hbar 2^{m-1} \quad \#$$

と書くことができる。特に、$m = 0$では

$$\left| r_0^{(N)} - q_0 \right| \leq \frac{\hbar}{2} \quad \#$$

である。ただし、$\xi = \xi_1 \xi_2 \ldots$ である。

いま、$\hbar = 1/2^N$であり、古典パイこね変換のリアプノフ 指数λは$\lambda = 1$であるので、$N = \frac{1}{\lambda} \log_2 \frac{1}{\hbar}$は対数時間 $t_\hbar$に対応する。したがって、式(ref: eqcc)は、対数時間$t_\hbar$までの量子パイこね変換に対する量子 古典対応の厳密な関係式であることを示している。

まとめ

ここでは、量子パイこね変換に対する位置作用素の期待値の 厳密な計算式を求め、対数時間$t_\hbar$までの、量子 パイこね変換に対する量子古典対応の関係式を導出した。

今回考察した量子パイこね変換のモデルは、最も量子化が 単純なモデルであったので、文献cite: SCで提案されている より複雑な量子化により導入された量子パイこね変換に 対して同様の量子古典対応の関係式を導出したい。また、今回のモデルに対する、対数時間$t_\hbar$以降の

時刻 の量子パイこね変換に対する位置作用素の期待値と古典 軌道の関係については、文献 cite: IOV2で考察されている。

AY V.M.Alekseev and M.N.Yakobson, *Symbolic dynamics and hyperbolic dynamics systems*, Phys. Rep., **75**, 287-325, 1981.

BV N.L.Balzas and A.Voros, *The quantized baker's transformation*, Ann. Phys., **190**, 1-31, 1989.

KZZ Z.P.Karkuszewski, J.Zakrzewski and W.H.Zurek, *Breakdown of correspondence in chaotic systems: Ehrenfest versus localization times*, nlin.CD/0012048.

SC R.Schack and C.M.Caves, *Shifts on a finite qubit string: A class of quantum baker's map*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **AAECC 10**, 305-310, 2000.

IOV K.Inoue, I.V.Volovich and M.Ohya, *On quantum-classical correspondence for baler's map*, quant-ph/0108107, 2001.

IOV2 K.Inoue, I.V.Volovich and M.Ohya, *Semiclassical properties and chaos degree for the quantum baker's map*, J. Math. Phys., Vol.43, No.2, 734-755, 2002.

Sar M.Saraceno, *Classical structures in the quantized baker transformation*, Ann. Phys., **199**, 37-60, 1990.

SS A.N.Soklakov and R.Schack, *Classical limit in terms of symbolic dynamics for the quantum baker's map*, Phys. Rev. E, **61**, 5108-5114, 2000.

Zur W.H.Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, quant-ph/0105127.